

**Юрий Вячеславович Решетов**

**<https://www.facebook.com/yury.v.reshetov>**

# Теорема справедливости

Вторая редакция

**Ташкентская школа экономики**

г. Ташкент

17 августа 2013 г.

## Оглавление

Предисловие.....	3
Формулировка.....	5
Доказательство.....	7
Выводы.....	9
Дополнение №1.....	11
Дополнение № 2.....	13
Дополнение № 3.....	14
Дополнение № 4.....	15
Нерешённые проблемы.....	16
Пример.....	17
Список литературы.....	19

# Предисловие

Для чего нужна эта теорема?

Кому то может показаться, что автор теоремы сошёл с ума, пытаясь математическими методами обосновать морально-этический термин: «справедливость». Более того, автор допускает обмен благами не только материальными, но и морально-этическими (например, в виде благодарностей). Однако, не стоит торопиться с выводами. Суть теоремы в том, чтобы попытаться выявить границу между справедливостью и несправедливостью с целью выявления и предотвращения несправедливости в общественном процессе обмена благами, как материальными, так и морально-этическими.

Доказательство теоремы справедливости реализовано с помощью математического аппарата. Поэтому значительная часть данной писанины посвящена математическим проблемам и их разрешимости.

Дело в том, что до сих пор экономические теории не имеют приемлемого математического базиса, т.е. либо базируются на словесных силлогизмах, как, например, теории австрийской школы, либо на чрезмерно усложнённых постановках задач, которые не пригодны для прикладного применения.

Например, в рамках математической теории игр делались попытки найти разрешимость задач, в которых экономические процессы можно было бы сформулировать либо в виде антагонистической игры для множества лиц (участников рынка), где решением является равновесие Нэша[2], либо через поиск решения для кооперативных игр, где участники рынка могут образовывать коалиции (сговор отдельных участников рынка, против остальных участников, путём объединения в коалицию).

В частности, силлогистическую попытку обосновать теорию справедливости через математическую теорию игр пытался осуществить Джон Ролз в своей «Теории справедливости»[3].

Основная проблема прикладного применения теории игр заключается в том, экономисты и математики предполагали, что участники рынка делятся на два класса:

1. Предприниматели, для которых необходимо максимизировать прибыль
2. Индивидуумы, для которых необходимо максимизировать полезность

Суть в том, что прибыль и полезность – это одно и то же. Возьмем, например, рыночный обмен, в котором два или более участника меняют валюту на другую валюту. Что может быть вредным или полезным в данном случае? Очевидно, что ничего. В другом примере возьмем

бартерный обмен, в котором два или более участника рынка меняют товар на другой товар без посредства денег. Опять мы видим, что границу между прибылью и полезностью получить не удаётся. Ведь любой товар может быть использован в качестве платёжного средства, т. е. денег, а любые деньги в качестве товара. Более того, если принять, что цена – это абсолютное значение арифметической дроби, где в числителе значится количество отдаваемого товара или денег, а в знаменателе получаемого товара или денег в обмен. В таком случае, оптимальное решение для отдельных участников рынка обобщается в задачу минимизации цены.

Для доказательства данной теоремы пришлось поставить знак равенства между прибылью и полезностью, а также между товаром и деньгами. Но при этом, для конструктивной части теоремы необходимым является учёт объёма будущих рыночных сделок, а не только значения цен.

Более того, добавив в математическую модель экономики внешнего по отношению к участникам рынка арбитра, как антагониста для всех участников рынка, удалось свести задачу к антагонистической игре двух лиц с нулевой суммой, где необходимо и достаточно всего лишь найти решение в соответствии с теоремой фон Неймана – Моргенштерна[1] о минимаксе. В этом случае, несмотря на то, что игра для двух лиц вроде бы не является кооперативной, тем не менее, при такой постановке задачи, получается антагонистичная игра для арбитра против объединённой коалиции всех участников рынка.

## Формулировка

Предположим, что у нас есть множество участников рынка, желающих участвовать в рыночном обмене. Предположим, что каждый участник рынка заранее решил по какой цене он хочет приобрести или продать тот или иной товар или в каких пропорциях обменять один товар на другой по бартеру, составив ценовые рыночные контракты, в которых присутствуют только объемы товаров, предполагаемых для обмена. Предположим, что у нас есть арбитр - посредник, который может заключать сделки (рыночные контракты) с любыми участниками рынка, но он не имеет права нарушать условия, указанные участниками рынка в контрактах. Т.е. арбитр имеет право заключать контракты с участниками рынка только в том случае, если все мнения всех участников, с (между) которыми заключаются контракты, достигают консенсуса.

Примечание № 1: решение арбитра в совершении сделок с участниками рынка вовсе не обязательно должно удовлетворять всем предлагаемым участниками рынка контрактам, но оно обязательно не должно нарушать ни одного заключенного арбитром контракта с участниками рынка – консенсус заинтересованных в рыночном обмене участников рынка.

Примечание № 2: физическое наличие арбитра, как посредника не является обязательным, т. е. он может быть и условным, поскольку участники рынка могут обмениваться благами между собой без всяких посредников, руководствуясь только решениями арбитра, но в практической реализации конструктивной части теоремы, в отсутствии арбитра, могут возникнуть проблемы, изложенные в дополнении № 2.

Выпишем ценовые пожелания из контрактов участников рынка в платежную матрицу для антагонистической игры двух лиц с нулевой суммой, где каждый столбец принадлежит отдельному контракту, а каждая строка товару участвующему в рыночном обмене. На пересечении строк и столбцов указывается количество товара, либо в виде отрицательного числа, указывающего объем товара, который участник согласен отдать в качестве оплаты, либо в виде положительного числа указывающего количество товара, которое участник согласен получить в обмен на отдаваемый товар.

Предположим, что мы получили решение вышеуказанной платежной матрицы – значение минимакса с условием минимизации выгоды для игрока по столбцам (участники рынка) и максимизации выгоды для игрока по строкам (арбитр).

Теорема справедливости, неконструктивная часть: если решение платежной матрицы текущего ценообразования имеет значение минимакса меньшее (игра несправедлива по отношению к участникам рынка) или равное нулю (игра справедлива и для участников рынка и для арбитра), то арбитр может принять справедливое решение, которое не нарушит ни единого заключенного арбитром контракта с участниками рынка. Если значение минимакса превышает нулевую отметку, то справедливое решение арбитр принять не сможет, поскольку в этом случае, любое решение будет в той или иной части нарушать, как минимум, один из заключённых контрактов.

Теорема справедливости, конструктивная часть: если решение арбитра справедливо, то решение платежной матрицы (стратегия) для игрока по столбцам – это пропорции объемов сделок для заключения контрактов. Для удовлетворения условий контрактов со стороны участников рынка, необходимо нормализовать решение платёжной матрицы по столбцам таким образом, чтобы, как минимум, один из контрактов с ненулевым объемом был выполнен полностью, а остальные с ненулевыми объемами частично.

## Доказательство

Теоретически постановка задачи согласно теории игр сводится к тому, что коалиция всех участников рынка играет против материальных ценностей, представленных в виде игрока по строкам. Но на самом деле, поскольку платёжная матрица для арбитра равна произведению платежной матрицы игроков на -1, т.к. игра с нулевой суммой и выигрыш одной из сторон равен проигрышу антагониста для этой самой стороны, то арбитр при такой постановке задачи математически обоснованно является антагонистом по отношению к участникам рынка, являясь также, как и участники рынка, игроком по столбцам, но с отрицательным знаком по отношению к участникам, а вовсе не защитником интересов материальных ценностей, предложенных участниками рынка для обмена. Ведь принимаемые решения арбитра, в случае достижения справедливости, соответствуют стратегии игрока по столбцам.

Представим платежную матрицу в виде аналогичной системы линейных неравенств:

$$a_{11} * x_1 + a_{12} * x_2 + \dots + a_{1n} * x_n \leq 0$$

$$a_{21} * x_1 + a_{22} * x_2 + \dots + a_{2n} * x_n \leq 0$$

...

$$a_{m1} * x_1 + a_{m2} * x_2 + \dots + a_{mn} * x_n \leq 0$$

где:

$a_{ij}$  – объем  $i$ -го товара для рыночного обмена, указанный неким участником рынка в  $j$ -ом контракте

$x_j$  – неизвестный объем исполнения  $j$ -го ценового пожелания

$n$  – количество контрактов

$m$  – количество наименований товаров или денег, указанных во всех контрактах участников рынка.

Если значение минимакса -  $Y$  будет больше нулевого то, подставив нормированное решение платежной матрицы (стратегию игрока по столбцам) в виде значений  $x_1, x_2, \dots, x_n$  в систему вышеуказанных линейных неравенств, для, как минимум, одного неравенства в случае наличия седловой точки или для, как минимум, двух неравенств, если седловой точки нет (смешанная стратегия) решение после нормирования решения будет:

$$a_{j1} * x_1 + a_{j2} * x_2 + \dots + a_{jn} * x_n = Y > 0$$

Т.е.:

$$a_{j1} * x_1 + a_{j2} * x_2 + \dots + a_{jn} * x_n - Y = 0$$

А это означает, что в этом случае, чтобы справедливо удовлетворить условия контрактов согласно решению для j-го товара, арбитру необходимо где-то на стороне взять j-й товар в объёме равном значению Y, чтобы возместить недостаток, что недопустимо для игр с нулевой суммой, либо не выполнить условия некоторых заключённых между ним и участниками рынка контрактов (выполнить с условиями худшими, по сравнению с теми, что указаны в контрактах участниками рынка). Т.е. в данном случае консенсус участников рынка, принимающих участие в кооперативной рыночной сделке, недостижим.

Если значение минимакса будет равно 0 то, подставив нормированное решение платежной матрицы в виде значений  $x_1, x_2, \dots, x_n$  в систему вышеуказанных линейных неравенств, для как минимум, двух неравенств, если седловой точки нет (смешанная стратегия) решение после нормирования решения будет:

$$a_{j1} * x_1 + a_{j2} * x_2 + \dots + a_{jn} * x_n = 0$$

А для остальных неравенств системы решение будет:

$$a_{j1} * x_1 + a_{j2} * x_2 + \dots + a_{jn} * x_n = -Y < 0$$

Т.е.:

$$a_{j1} * x_1 + a_{j2} * x_2 + \dots + a_{jn} * x_n + Y = 0$$

А это означает, что в этом случае, чтобы не более чем справедливо (в согласии с консенсусом участников рынка) удовлетворить условие контрактов согласно решению для j-го товара, арбитру необходимо изъять в свою пользу j-й товар в количестве Y, например, в качестве оплаты за посреднические услуги. Хотя в данном случае участники рынка отдают арбитру больше ценностей, чем получают, но в этом случае достигается консенсус между заинтересованными сторонами коллективной сделки, т.е. имеет место полное согласие всех заинтересованных сторон, участвующих в коллективной сделке.



## Выводы

В процессе обмена благами, как материальными, так и духовными (например, благодарностями) могут иметь место три различные ситуации:

1. Альтруизм, когда некоторая часть участников обмена благами - альтруистов согласна при обмене отдать больше благ, чем получить взамен. В этом случае значение минимакса меньше 0.
2. Рационализм, когда некоторая часть участников обмена благами - рационалистов согласна отдать столько же благ, сколько и получить взамен. В этом случае значение минимакса равно 0.
3. Эгоизм, когда часть участников обмена благами - эгоистов согласна получить больше благ, чем отдать взамен. В этом случае значение минимакса больше 0.

Поскольку, согласно теореме обмен благами без принуждения возможен только между:

1. Альтруистами и альтруистами
2. Альтруистами и рационалистами
3. Рационалистами и рационалистами

и невозможен без принуждения между любыми участниками рынка и эгоистами.

Следовательно, рационализм, не имеет отношения к эгоизму, а всего лишь является границей между альтруизмом и эгоизмом.

В связи с вышесказанным, как минимум рационализм и, как максимум альтруизм являются необходимыми и достаточными условиями для достижения консенсуса по волеизъявлению сторон без принуждения в плане удовлетворения потребностей общества в благах, т.е. свободы реализации волеизъявления членов общества. Эгоизм не является атрибутом свободы, т.к. при наличии эгоизма невозможно удовлетворения потребностей в благах между любым отдельно взятым эгоистом и любыми другими членами общества без принуждения. Если быть более точным, то невозможно удовлетворить волеизъявления любого отдельно взятого эгоиста без принудительного нарушения волеизъявлений какого либо другого индивидуума.

Соответственно, свободную и справедливую, т.е. либертарную часть общества представляют только альтруисты и рационалисты.

Более того, согласно теореме справедливости, чем выше степень альтруизма (чем меньше

значение минимакса в платежной матрице волеизъявлений обмена благами членов общества), тем более свободны и более справедливы возможности обмена благами между членами общества. Ведь в этом случае, участники обмена благами в общей сложности могут получить больше, чем они желают отдать.

В связи с вышесказанным окончательный вывод сводится к тому, что эгоизм является причиной насильственного принуждения в обществе, а принуждение против воли каких либо членов общества является следствием реализации волеизъявления эгоистов, выраженное в действии. Соответственно, для того чтобы общество стало свободным и справедливым необходимо и достаточно: выявлять эгоистичные волеизъявления отдельных индивидуумов (теорема справедливости доказывает, что эта задача разрешима) и предотвращать любые действия со стороны носителей эгоистичного волеизъявления, поскольку всякая реализация эгоистичного волеизъявления обязательно приведёт к насильственному принуждению против волеизъявления остальных членов общества.

## Дополнение №1

Теорема позволяет не только дать ответ на вопрос о границе справедливости в процессе рыночного обмена, но и о сравнительном анализе рыночных процессов в плане большей или меньшей справедливости. Поскольку наиболее оптимальная справедливость соответствует достижению значения минимакса, то это самое значение и является критерием сравнительного количественного анализа.

Как несложно убедиться данная теорема полностью в случае справедливого решения соответствует либертарным принципам австрийской школы:

1. Имеет место наличие арбитра, который выполняет договорные условия с участниками рынка, тем самым, предотвращая любые конфликты или недоразумения между ними.
2. Отсутствует какое либо принуждение со стороны арбитра по отношению к участникам рынка. Также участники рынка не могут принуждать арбитра к заключению контрактов.
3. Ограничения свободы выбора между участниками рынка и арбитром отсутствуют.
4. Участником свободного рынка может стать любой желающий, если у него есть некоторое количество товара или денег для рыночного обмена. В соответствии с дополнением № 3, участником рынка может стать любой желающий, даже если он абсолютно неимущий, но вежливый.

Арбитр выполняет роль справедливого посредника для участников рынка, с которыми он заключает контракты, а не роль начальника, т.к. у него отсутствует возможность принуждать участников рынка к каким либо действиям, с которыми участники могут не согласиться (при отсутствии консенсуса со стороны участников рынка).

Более того, уже даже не надо доказывать, что любое иное регулирование рынка со стороны кого бы то и чего бы то ни было, например, со стороны государства, не может дать решения более оптимального, т.к. любое иное решение, не достигающее значения минимакса будет либо менее справедливым, либо вообще несправедливым, согласно теореме.

Поскольку доказательство теоремы полностью соответствует либертарным принципам, то данная теорема также доказывает разрешимость справедливого решения договоров либертарными методами и может быть взята в качестве базиса для либертарных экономических теорий.

Теорема не подтверждает необходимость капитализма или иного классового общества, т.е. деления участников рынка на классы: предпринимателей и индивидуумов или ещё какие, для достижения справедливости. Теорема стирает все классовые и иные различия между участниками рынка, поскольку в её доказательствах отсутствует необходимость сепарации участников рыночного обмена по каким либо признакам - акциденциям.

Теорема опровергает необходимость этатизма для поддержания принципов справедливости в обществе. Либертарный арбитраж, в соответствии с теоремой, наиболее оптимален, как в плане распределения материальных благ, так и плане распределения моральных, например, в виде благодарностей.

Теорема опровергает необходимость денег для рыночного обмена. Но, присутствие денег в рыночном обмене позволит увеличить ликвидность рынка. Также теорема опровергает необходимость обеспечения денег чем либо более ценным по себестоимости, например, благородными металлами. Нестационарность эмиссии для денег или иных ценных бумаг, обмениваемых на рынке, также никак не влияет на справедливость решений арбитра.

Теорема доказывает необходимость права владения частной собственностью для индивидуумов общества, без которого достижение справедливости посредством рыночного обмена в обществе, как минимум: неоптимально, если собственность может быть только коллективной, и как максимум: неосуществимо, если собственность может быть только общественной.

## Дополнение № 2

В процессе справедливого рыночного обмена у арбитра в собственности будут накапливаться товары, для которых решения неравенств соответствуют условию:

$$a_{j1} * x_1 + a_{j2} * x_2 + \dots + a_{jn} * x_n + Y = 0$$

Если арбитр, например, является компьютерным сервером (желательно чтобы арбитр не был лицом заинтересованным в материальной выгоде, а для этих целей компьютерная программа является наиболее подходящей), то очевидно, что склады товаров будут заполняться изъятыми излишками.

В этом случае, получается, что участники рынка в некоторых случаях больше отдают ценностей арбитру, нежели получают. Это может показаться несправедливым, но на самом деле такой расклад осуществляется с согласия участников рынка, т.е. достигается консенсус участвующих в рыночном обмене сторон. Проблема в том, что изъятые излишки будут затоваривать склады, через которые осуществляется рыночный обмен, вместо того, чтобы приносить обществу пользу.

Первый способ решения данной проблемы заключается в том, что излишки делятся между участниками рынка, для которых объёмы контрактов в решении платежной матрицы для игрока по столбцам неотрицательные, пропорционально объёмам в решении. В этом случае участники всегда получают от арбитра ровно столько, сколько отдают, но иногда получают больше, по сравнению с тем, что они указали в контракте.

Второй способ заключается в том, что в случаях, когда решение платежной матрицы несправедливо, но на складе уже накопилось достаточное количество товаров чтобы полностью покрыть недостачу товаров в решении, то эти самые накопленные товары можно будет использовать для того, чтобы несправедливые решения стали ликвидными, т.е. возмещать недостачу накопленными избытками прежних сделок. Это повысит товарооборот рынка. В этом случае иногда участники рынка получают меньше, чем отдают арбитру, а иногда больше.

Третье решение заключается в том, что изъятые излишки могут пойти на решение социальных проблем общества, например, в пенсионные фонды, на услуги образования и медицину, на содержание пожарных команд и спасателей и проч. нужды. Такой подход позволяет устранить и заменить налогообложение, которое, как известно, не соответствует либертарным принципам и является принуждением.

## Дополнение № 3

К вопросу, который казалось бы является сугубо моральным, нежели материальным, а именно о благотворительности.

Предположим, что у кого-то не имеется никакого товара, который он мог бы обменять, чтобы получить взамен что-то материальное в результате рыночного обмена. В этом случае в платёжной матрице необходимо завести ещё одну строку для обмениваемого «товара» под названием «благодарность». Для тех контрактов, в которых участник рынка указал только положительные значения (просьба подаяния) на пересечении строки благодарностей необходимо поставить значение -1. Те участники рынка, которые пожелают быть благотворителями, на пересечении строки благодарностей могут указать положительное значение размера благодарности, которые они хотели бы получить.

## Дополнение № 4

Участникам рынка удобнее ориентироваться, если цены на товары выражены в каких либо единицах измерения, например, в деньгах или благородных металлах.

Чтобы узнать справедливые цены на товары, необходимо найти решение (стратегию) платёжной матрицы для игрока по строкам даже в тех случаях, когда справедливое решение арбитра недостижимо. Если в полученном решении для какого нибудь товара будет стоять нулевое значение, то это означает, что товар полностью неликвиден, т.е. не пользуется спросом. Соответственно, значение в стратегии платёжной матрицы для игрока по строкам при условии поиска решения максимизации выигрыша этого игрока, является показателем ликвидности товара в соответствующей строке — рыночного спроса, когда значение в решении прямо пропорционально рыночному спросу. Если получить решение для игрока по строкам с максимизацией выигрыша этого игрока, то полученные значения будут прямо пропорциональны рыночным предложениям товаров.

Для вычисления справедливой цены, необходимо значение из решения для игрока по строкам для соответствующей строки товара разделить на значение для строки единицы измерения, т. е. соответствующей другому товару или деньгам.

## Нерешённые проблемы

Неизвестно, как справедливо можно решить проблемы с адресной передачей прав владения собственностью от одного лица (физического или юридического) к другому лицу (физическому или юридическому). Ведь справедливый обмен достигается путем безадресного арбитража между участниками рынка. Гипотетически, адресные права передачи собственности от одних лиц к другим являются несправедливыми, кроме адресной передачи прав собственности от любых лиц арбитра.

Это вовсе не означает, что всякая передача прав владения собственностью от одних лиц к другим без посредничества арбитра запрещена. Любой запрет является ограничением права выбора для индивидуумов и не соответствует либертарным принципам, а посему недопустим. Это всего лишь означает, что лица, передающие или обменивающие права собственности без посредничества арбитра, не претендуют на справедливость.

Также нерешённой проблемой является вероятность долевого распределения прав собственности через арбитра даже для штучных, т.е. неделимых материальных ценностей. Частично эта проблема может быть решена тем, что любой участник рынка, имеющий долю прав собственности на штучные товары может её обменять через рынок на чтонибудь иное.



## Пример

Для упрощения предположим, что на рынке обмениваются два товара А и В, а также есть два участника рынка:

- Участник X, который владеет некоторым количеством товара А и хочет его обменять на некоторое количество товара В
- Участник Y, который владеет некоторым количеством товара В и хочет его обменять на некоторое количество товара А

Создадим платёжную матрицу:

	Участник X	Участник Y
Товар А	$-k_{11}$	$k_{12}$
Товар В	$k_{21}$	$-k_{22}$

Где:

$k_{11}$  – количество товара А, которое участник X хочет обменять на количество  $k_{21}$  товара В

$k_{12}$  – количество товара А, которое участник Y хочет получить в обмен на количество  $k_{22}$  товара В

$k_{21}$  – количество товара В, которое участник X хочет получить в обмен на количество  $k_{11}$  товара А

$k_{22}$  – количество товара В, которое участник Y хочет обменять на количество  $k_{12}$  товара А

Справедливая цена товара А в единицах товара В, согласно методу Гаусса равна: fair price (A)  
 $= (k_{21} + k_{22}) / (k_{12} + k_{11})$  В

В этом случае если  $k_{11} * k_{22} > k_{12} * k_{21}$ , то справедливое решение арбитра возможно.

По методу Гаусса, решением платёжной матрицы для игрока по столбцам является:

- Для контракта участника X значение  $volume_x = k_{12} + k_{22}$

- Для контракта участника Y значение  $\text{volume}_y = k_{21} + k_{11}$

Если  $k_{22} * \text{volume}_y > k_{21} * \text{volume}_x$ , тогда контракт участника X заключается в полном объеме, т.е. , а контракт участника Y в объеме:  $\text{volume}_y / \text{volume}_x$ . В противном случае, контракт участника Y заключается в полном объеме, а контракт участника X в объеме:  $\text{volume}_x / \text{volume}_y$ .

Например:

	Участник X	Участник Y
Товар А	-1	1
Товар В	2	-3

$$\text{fair price (A)} = (2 + 3) / (1 + 1) = 2.5 \text{ B}$$

$1 * 3 > 2 * 1$ , значит справедливое решение арбитра возможно.

$$\text{volume}_x = 1 + 3 = 4$$

$$\text{volume}_y = 1 + 2 = 3$$

Поскольку  $2 * 4 < 3 * 3$ , то контракт с участником X заключается полностью. Контракт с участником Y заключается на объем:  $3 / 4$ . Т.е. участник А должен передать 1 А арбитра, из которых  $3 / 4$  А арбитр должен передать участнику В. Участник В должен передать  $3 * 3 / 4 = 9 / 4$  В арбитра, из которых 2 В арбитр должен передать участнику А. После рыночного обмена у арбитра останется избыток товаров:  $1 - 3 / 4 = 1 / 4$  А и  $9 / 4 - 2 = 1 / 4$  В.

## Список литературы

1. Джон фон Нейман, Оскар Моргенштерн. [Теория игр и экономическое поведение](#). М., Издательство «Наука», 1970.
2. Джон Нэш. Некооперативные игры (Non-cooperative Games, 1951). Диссертация.
3. Ролз Джон. [Теория справедливости](#). Новосибирск, изд-во НГУ, 1995. — [ISBN 5-7615-0365-4](#).