А. Н. Ширяев

Основы стохастической финансовой математики

Том 1

Факты
Модели

ФАЗИС
Москва 1998

УДК 519.2

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 96-01-14180

Ширяев А. Н.
Основы стохастической финансовой математики.
Том 1. **Факты. Модели.**
Москва: ФАЗИС, 1998. 512 с.
(Стохастика, вып.2)
ISBN 5-7036-0043-X

Научное и Издательское Объединение ФАЗИС
(Лицензия на издательскую деятельность ЛР № 064705 от 09.08.1996)
123557 Москва, Пресненский вал, 42-44. E-mail: phasis@aha.ru

Отпечатано в Московской типографии № 2 РАН
121099 Москва Г-99, Шубинский пер., 6
Заказ № 3832

ISBN 5-7036-0043-X

Оглавление

Том 1

Том 2

Предисловие

Замысел автора состоял в том, чтобы

- *отобрать и изложить тот материал, который необходим и может оказаться полезным тем, кто имеет дело со стохастическим анализом и расчетами в моделях финансовых рынков, функционирующих в условиях неопределенности*;

- *привести основные понятия, концепции и результаты стохастической финансовой математики*;

- *дать применения к разнообразным расчетам в стохастической финансовой инженерии.*

Не в последнюю очередь имелись в виду и запросы преподавания по специальности “Финансовая математика и финансовая инженерия” с акцентом на вероятностно-статистические идеи и методы стохастического исчисления при анализе *рыночного риска*.

Подзаголовок “Факты. Модели. Теория” как нельзя лучше отражает характер и стиль изложения, сложившийся у автора, во многом, в результате “обратной связи” со слушателями ряда курсов его лекций (Москва, Цюрих, Орхус, ...).

Так, математическая аудитория неизменно проявляла большой интерес не только к чисто математическим вопросам “Теории”, но и к “Фактам” относительно реалий финансовых рынков и их функционирования. Именно это обстоятельство и побудило автора посвятить *первую главу* описанию ключевых объектов и структур таких рынков, определить цели и задачи

Предисловие

Замысел автора состоял в том, чтобы

- *отобрать и изложить тот материал, который необходим и может оказаться полезным тем, кто имеет дело со стохастическим анализом и расчетами в моделях финансовых рынков, функционирующих в условиях неопределенности*;
- *привести основные понятия, концепции и результаты стохастической финансовой математики*;
- *дать применения к разнообразным расчетам в стохастической финансовой инженерии.*

Не в последнюю очередь имелись в виду и запросы преподавания по специальности "Финансовая математика и финансовая инженерия" с акцентом на вероятностно-статистические идеи и методы стохастического исчисления при анализе *рыночного риска*.

Подзаголовок "Факты. Модели. Теория" как нельзя лучше отражает характер и стиль изложения, сложившийся у автора, во многом, в результате "обратной связи" со слушателями ряда курсов его лекций (Москва, Цюрих, Орхус, ...).

Так, математическая аудитория неизменно проявляла большой интерес не только к чисто математическим вопросам "Теории", но и к "Фактам" относительно реалий финансовых рынков и их функционирования. Именно это обстоятельство и побудило автора посвятить *первую главу* описанию ключевых объектов и структур таких рынков, определить цели и задачи финансовой теории и финансовой инженерии, а также изложить некоторые вопросы истории и становления вероятностно-статистической идеологии при анализе финансовых рынков.

С другой стороны, слушатели, знакомые, скажем, с рынком ценных бумаг и оперированием с ними, проявляли бóльшую заинтересованность в том, чтобы ознакомиться с разными классами стохастических процессов, применяемыми или могущими быть полезными при построении моделей динамики финансовых показателей (цен, индексов, обменных курсов, ...) и при проведении тех или иных расчетов (рисков, хеджирующих стратегий, рациональных стоимостей опционов, ...).

Этим целям служат *вторая и третья главы*, посвященные разнообразным стохастическим моделям как в случае дискретного, так и непрерывного времени.

Автору представляется, что материал этих глав, относящийся к теории случайных процессов, будет полезен широкому кругу читателей и не только в связи с финансовой математикой.

Хотелось бы здесь особо подчеркнуть, что в случае дискретного времени при описании эволюции стохастических последовательностей мы, как правило, отправляемся от их *разложения Дуба* на *предсказуемую* и *мартингальную* составляющие. Это объясняет, почему рассматриваемый подход часто называют "мартингальным" и почему "теория мартингалов" становится естественным и полезным математическим аппаратом в финансовой математике и инженерии.

Понятия "предсказуемости" и "мартингальности", пронизывающие все последующее изложение, в то же самое время оказываются весьма естественными и с экономической точки зрения. Так, например, такие экономические понятия, как *портфель ценных бумаг* и *хеджирование*, математически просто определяются именно с привлечением понятия предсказуемости. А такие понятия как *эффективность* и *безарбитражность* финансового рынка находят свое математическое воплощение с привлечением понятий мартингала и мартингальных мер ("первая фундаментальная теорема" теории расчетов финансовых активов; § 2b, гл. V).

Подход к описанию стохастических последовательностей, основанный на разложении Дуба, делает вполне понятным и логичным обращение в случае *непрерывного времени* к (весьма широкому) классу *семимартингалов* (§ 5a, гл. III). Будучи процессами, представимыми в виде суммы процесса ограниченной вариации ("медленно меняющаяся" компонента) и локального мартингала (многие из которых, как, например, броуновское движение, являются "быстро меняющимися"), семимартингалы обладают тем замечательным свойством, что для них определен стохастический интеграл, что, в свою очередь, открывает широкие возможности применения стохастического исчисления при моделировании финансовых показателей такими процессами.

Четвертая глава ("статистическая") призвана дать представление о том реальном статистическом "сырье", с которым приходится сталкиваться при эмпирическом анализе финансовых данных.

На статистическом материале, относящемся преимущественно к обменным курсам валют (финансовый рынок которых носит интернациональный характер и является одним из самых больших среди финансовых рынков, имея дневной оборот в несколько сотен миллиардов долларов), показывается, что величины "возврата" (см. (3) в § 1a, гл. II) имеют плотность распределения с "тяжелыми хвостами" и с сильной "вытянутостью" в центральной области. Во временнóм поведении этих величин наблюдаются свойства "кластерности" и "сильной зависимости" (образно – "цены помнят прошлое"). Выявляется фрактальная структура ряда характеристик волатильности (изменчивости) величин "возврата".

Все это, разумеется, надо учитывать при построении моделей, адекватно отражающих реальную динамику финансовых показателей, что становится особенно существенным, если преследовать цель *прогноза* их будущего движения.

Собственно "Теории" и, в частности, *теории арбитража* отводятся *пятая глава* (дискретное время) и *седьмая глава* (непрерывное время).

Центральными здесь являются *первая* и *вторая фундаментальные теоремы теории расчетов финансовых активов*.

"Первая теорема" утверждает (с некоторыми оговорками), что финансовый рынок является *безарбитражным* в том и только том случае, когда существует так называемая мартингальная (риск-нейтральная) вероятностная мера, относительно которой (дисконтированные) цены образуют мартингал. "Вторая теорема" описывает те безарбитражные рынки, для которых выполнено свойство *полноты*, гарантирующее возможность построения портфеля ценных бумаг, капитал которого воспроизводит платежные поручения.

Обе эти теоремы действительно заслуживают того, чтобы их называть *фундаментальными*, поскольку они дают возможность придать экономическому понятию "безарбитражности" точный математический смысл в рамках (хорошо развитой) *теории мартингалов*.

Шестая и восьмая главы посвящены расчетам, опирающимся на "первую и вторую фундаментальные теоремы". При этом, традиционно, много места отводится расчетам рациональных стоимостей и хеджирующих стратегий разного рода *опционов* (Европейского и Американского типов), являющихся теми *производными* финансовыми инструментами, для которых наиболее развита теория расчетов и на примере которых лучше всего понимать общие принципы и приемы расчетов на безарбитражных рынках.

Перед автором, естественно, стояла проблема не только отбора "репрезентативного" материала для изложения, но и выбора формы изложения.

Читатель заметит, что автор часто следует лекционному стилю, приводя пояснения типа "что–где–когда". В случае дискретного времени приводятся, по существу, все доказательства основных результатов. В случае же непрерывного времени довольно-таки часто многие результаты (теории мартингалов, стохастического исчисления, ...) приводятся лишь своими формулировками с указанием соответствующей литературы, где могут быть найдены доказательства.

Предложение о написании книги по финансовой математике для издательства *World Scientific* было сделано профессором Оле Е. Барндорфф-Нильсеном в начале 1995 года. Дав свое согласие, автор смог приступить к первым наброскам текста лишь в середине 1995 года, планируя вначале излагать весь материал только для случая *дискретного времени*. Однако, по мере работы над текстом, автор все больше убеждался в том, что без случая *непрерывного времени* представление о финансовой математике и финансовой инженерии будет далеко не полным. В результате в книге дается изложение и для дискретного, и для непрерывного времени.

Книга состоит из двух томов. Первый том ("Факты. Модели") включает главы I–IV. Второй том ("Теория") состоит из глав V–VIII.

На само написание основного текста автору понадобилось примерно два года. Несколько месяцев ушло на компьютерный набор текста, редактирование и подготовку оригинал-макета книги, осуществленные И. Л. Легостаевой, Т. Б. Толозовой и А. Д. Изааком на базе Информационно-издательского сектора Отделения математики Российской академии наук. Автор приносит им свою искреннюю признательность прежде всего за их высококвалифицированную и самоотверженную помощь, а также за ту терпимость, которую они к нему проявляли всякий раз, когда он менял уже набранный и отредактированный текст, представляя свою очередную "последнюю" версию.

Автор благодарен своим друзьям и коллегам, российским и зарубежным, а также АФЦ (Актуарно-финансовый центр, Москва), VW-project (the Volkswagen-project, Germany), MCAA и CAF (the Mathematical Research Center and the Centre for Analytical Finance, Aarhus, Denmark), INRIA-МГУ (институт им. А. М. Ляпунова, Paris–Москва) за поддержку и гостеприимство.

Москва
1995 – 1997

А. Ширяев
Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН
и
Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Том 1

Факты

Модели

Глава I. Основные понятия, структуры, инструменты, цели и задачи финансовой теории и финансовой инженерии

1. Финансовые структуры и инструменты

Согласно современным воззрениям (см., например, [79], [334] и [345]), *теория финансов* и *финансовая инженерия* призваны исследовать свойства финансовых структур и заниматься тем, как наиболее *рациональным* образом распоряжаться финансовыми ресурсами с учетом факторов *времени, риска, характера* (как правило, случайного) *окружающей среды*, используя разнообразные финансовые инструменты и операции.

Время, динамика, неопределенность, стохастика – вот компоненты, определяющие то, что такие "вероятностно-статистические" теории, как, например,

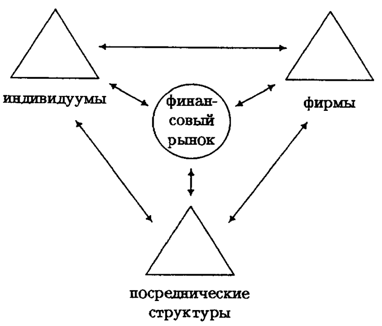
- стохастические процессы,
- стохастическое исчисление,
- статистика случайных процессов,
- стохастическая оптимизация

образуют используемый в настоящей книге математический аппарат, адекватный нуждам финансовой теории и инженерии.

§ 1a. Ключевые объекты и структуры

1. Можно выделить следующие *ключевые объекты* и *структуры*, с которыми имеет дело теория финансов и которые определяют и объясняют специфику финансовой проблематики, цели и средства финансовой математики и инженерии:

- *индивидуумы*,
- *фирмы*,
- *посреднические структуры*,
- *финансовый рынок*.



Представленная диаграмма показывает, что в теории и практике финансов среди выделенных четырех структур *финансовому рынку* отводится центральное место и именно он-то и представляет основной интерес для математической теории финансов в последующем изложении.

2. Индивидуумы – их финансовая деятельность подчинена решению проблемы *потребление – инвестирование.* Дуализм в поведении индивидуумов как потребителей ("побольше потреблять сейчас") и как инвесторов ("инвестировать сейчас так, чтобы иметь побольше в будущем") приводит к рассмотрению оптимизационных проблем, которые в математической экономике формулируются как *потребление – сбережение* (consumption – saving) и *размещение* (portfolio decision making). В рамках *Теории полезности и предпочтения* первая проблема опирается на аксиомы (фон Неймана–Моргенштерна) *рационального* поведения индивидуумов в условиях неопределенности, дающие подход и способ определять *предпочтительность* того или иного типа поведения посредством количественного сравнения, например, средних значений *функций полезности* (utility functions). Проблема "размещение", стоящая перед индивидуумами, может быть в общих чертах описана как задача наилучшего размещения (инвестирования) финансовых средств (с учетом возможного риска), скажем, в недвижимость, золото, в ценные бумаги (облигации, акции, опционы, фьючерсы и т. п.), ... Идеи диверсификации (см. § 2b) при составлении портфелей находят свое воплощение в таких известных выражениях, как "Don't put all your eggs in one basket", "Nothing ventured, nothing gained". В дальнейшем будут описаны те возможности, которые открываются перед индивидуумами (в зависимости от величины начального капитала) на рынке ценных бумаг.

Фирмы (компании, корпорации, ...) – обладая такими физически осязаемыми ценностями, как "земля", "заводы", "машины", ..., а также ценностями типа "организационные структуры", "рынки", "патенты", ..., осуществляют деловую организацию, деловое партнерство, управление технологическим производством. Для увеличения капиталовложений в развитие производства фирмы время от времени выпускают акции, а иногда (как и государство) – облигации. Управление деятельностью фирмы должно быть ориентировано на наилучшее удовлетворение интересов держателей акций и обладателей облигаций.

Посреднические структуры (финансовые посреднические структуры) – это банки, инвестиционные компании (типа mutual funds – фондов взаимных вложений), пенсионные фонды, страховые компании, ... К посредническим структурам можно отнести биржи (exchanges) по торговле опционами, фьючерсными контрактами, ...

Всемирно известны такие биржи, как NYSE (New York Stock Exchange), AMEX (American Stock Exchange), NASDAQ (The NASDAQ Stock Market), NYFE (New York Futures Exchange), CBOT (Chicago Board of Trade), ..., находящиеся в США.[1)]

3. Финансовый рынок представляет собой совокупность денежных и валютных рынков, рынков ценных (благородных) металлов, рынков финансовых инструментов, включая ценные бумаги.

На рынке *финансовых инструментов* принято различать:

- **основные** (первичные) инструменты,
- **производные** (вторичные) инструменты;

последние являются *сложными* финансовыми инструментами, построенными на базе основных (более элементарных) инструментов.

[1)] Обращение к финансовым структурам и финансовой активности в США будет далее происходить довольно часто. Вызвано это, в основном, тем, что финансовый рынок США имеет богатые традиции ("Wall Street"!); именно с этим рынком связаны многочисленные финансовые инновации. К тому же по этому рынку имеется обширная литература и в виде многочисленных журнальных изданий, и в виде монографий, учебных пособий, справочных изданий и т. п. В этом читатель легко убедится, обратившись к списку литературы в конце книги.

К числу *основных* финансовых инструментов относят *ценные бумаги*:

- банковский счет,
- облигации,
- акции.

К *производным* финансовым инструментам относят:

- опционы,
- фьючерсные контракты,
- варранты,
- свопы,
- комбинации,
- спрэды,
- сочетания,
- ...

Отметим, что весьма часто *финансовая инженерия* определяется именно как оперирование с *производными финансовыми инструментами* (и с целью *увеличения капитала*, и с целью *редуцирования риска*, обусловленного неопределенностью будущего состояния рынка).

Дадим описание некоторых основных ингредиентов финансового рынка.

§1b. Финансовый рынок

1. Деньги ведут свое начало с того времени, когда люди научились торговать "тем, что они имели" в обмен на "то, что они хотели иметь". Эта система взаимоотношений работает и поныне – мы используем *деньги* в обмен на товар (который мы желаем иметь, а продавец в свою очередь использует полученные деньги для покупки чего-то другого), а также как средство оплаты услуг.

Современная технология революционизировала способы, которыми циркулируют деньги. Так, в настоящее время в США лишь только 8% всей массы долларов, находящихся в обороте, оплачиваются посредством денежных купюр и монет. Основная же денежная оплата производится чеками и пластиковыми карточками с помощью электронной связи.

Помимо функции "средства обращения" деньгам принадлежит важная роль "меры стоимости" и "средства накопления", [108].

2. Валюта – как *деньги других государств* (количество ее, состояние обменных курсов и т. д.) – является важным показателем экономического благосостояния и развития страны, представляя собой *инструмент расчетов* в международных экономических связях, для осуществления которых требуется "иностранная валюта".

Интернационализация экономики привела к образованию *валютных блоков* разных стран, заключающих соглашения относительно согласования денежно-кредитной политики и соотношений между обменными курсами валют.

Примером может служить известная Бреттон-Вудсская валютно-кредитная система. В 1944 году в местечке Бреттон-Вудс, штат Нью-Гэмпшир, США, состоялась конференция основных участников процесса международной торговли. На этой конференции была принята валютная система, получившая название "Бреттон-Вудсской системы", которая устанавливала, что обменные курсы валют могут отклоняться от официально заявленных паритетов в очень узких пределах – не более 1% в каждую сторону. При этом паритетные обменные курсы исчислялись в долларах США, а для внедрения и руководства этой системой был создан Международный Валютный Фонд (МВФ).

Однако, когда в 1973 году валютно-финансовый кризис затронул основные валюты (доллар США, немецкую марку и японскую иену), "Бреттон-Вудсская система" была признана исчерпавшей свою роль, и на ее смену пришли "*плавающие*" обменные курсы валют.

В марте 1979 года была образована Европейская монетарная система, охватывающая большинство стран-членов "Общего рынка" (Европейского экономического сообщества, ЕЭС). Эта система устанавливала, что колебания курсов валют стран-участниц должны быть, как правило, в пределах $\pm 2.25\%$ от официальных центральных паритетов. При этом центральные банки стран, обменный курс которых имеет опасность выхода из установленного "коридора", должны своими взаимными *интервенциями* препятствовать этому выходу, обеспечивая тем самым *стабильность* соотношений между их валютами. (Это обстоятельство объясняет, почему системы подобного типа называют также "*скорректированными* системами плавающих курсов".)

Другими примерами валютных блоков могут служить соглашения между разными группами стран Карибского бассейна, Центральной и Южной Америки, Восточной Азии и др., которые фиксируют обменные курсы своих валют относительно какой-либо мощной "*валюты-лидера*". (Подробнее см. [108; с. 459–468].)

3. Ценные металлы (в слитках) – золото, серебро, платина, другие *благородные* металлы (к их числу относят также элементы платиновой группы: иридий, осмий, палладий, родий, рутений) – играли ранее (особенно в XIX веке и части XX века) и продолжают играть сейчас важную роль в международной валютно-кредитной системе.

В работе [108] в разделе "Золотой стандарт", с. 459–460, по поводу роли золота говорится следующее: "Почти весь девятнадцатый век и часть века двадцатого золото играло центральную роль в международной валютно-кредитной системе. Эра золотого стандарта началась в 1821 году, когда вскоре после окончания наполеоновских войн Британская империя сделала фунт стерлингов конвертируемым в золото. Вскоре и Соединенные Штаты сделали то же самое с американским долларом. Наибольшей силы золотой стандарт достиг в период с 1880 до 1914 года, но никогда больше не возродил свой прежний статус после Первой мировой войны. Его последние следы исчезли в 1971 году, когда Государственное Казначейство США окончательно отменило практику купли-продажи золота по фиксированной цене".

Золото, конечно, продолжает играть важную роль в международной валютной системе. Так, например, золотые резервы широко используются центральными банками для погашения внешних долгов.

Из сказанного выше следует, что на данный момент в международной валютно-кредитной системе, регулирующей деятельность центральных эмиссионных банков на внешних валютных рынках, четко прослеживаются три периода: "золотой стандарт", "Бреттон-Вудсская система" и "система скорректированных плавающих курсов".

4. Банковский счет может рассматриваться как ценная бумага, относящаяся к облигациям (см. далее п. 5), суть которой состоит в том, что банк обязуется выплачивать по Вашему счету определенный процент от суммы счета. В последующих рассмотрениях *банковский счет* будет возникать не раз, что объясняется во многом тем, что он является удобной "единицей измерения" цен разнообразных ценных бумаг.

Принято различать два основных способа начисления процентов:

- m раз в год (*простые проценты*),
- непрерывно (*сложные проценты*).

Если Вы открываете банковский счет с *процентной ставкой* $r(m)$ начисления процентов *m раз в год*, то внесенный Вами начальный капитал B_0 через N лет станет равным

$$B_N(m) = B_0\left(1+\frac{r(m)}{m}\right)^{mN}, \tag{1}$$

а через дробное число лет, $N + k/m$, где $0 \leqslant k \leqslant m$, Ваш капитал будет равен

$$B_{N+k/m}(m) = B_0\left(1+\frac{r(m)}{m}\right)^{m(N+k/m)}.$$

В случае *непрерывно* начисляемых процентов с "*процентной ставкой* $r(\infty)$" начальный капитал B_0 через N лет будет равен

$$B_N(\infty) = B_0 e^{r(\infty)N}. \tag{2}$$

Понятно, что

$$B_N(m) \to B_N(\infty),$$

когда $r(m) \to r(\infty)$, $m \to \infty$.

Если непрерывно начисляемый процент $r(\infty) = r$, то соответствующий ему "m раз начисляемый процент" $r(m)$ определяется формулой

$$r(m) = m\left(e^{r/m} - 1\right), \tag{3}$$

откуда следует, что по $r(m)$ соответствующий эквивалентный непрерывный процент $r = r(\infty)$ находится по формуле

$$r = m\ln\left(1+\frac{r(m)}{m}\right). \tag{4}$$

В том частном случае, когда $m = 1$, для $\widehat{r} = r(1)$ и $r = r(\infty)$ получаем следующие формулы их взаимного пересчета:

$$\widehat{r} = e^r - 1, \quad r = \ln(1+\widehat{r}). \tag{5}$$

Наряду с объявлением "годовой процентной ставки $\widehat{r}$" банк может объявлять также и величину "годовой учетной ставки $\widehat{q}$", говорящей о том, что для получения через год капитала в размере $B_1 = B_1(1)$ надо в начальный момент иметь на счете $B_0 = B_1(1-\widehat{q})$. Понятна связь между $\widehat{r}$ и $\widehat{q}$:

$$(1-\widehat{q})(1+\widehat{r}) = 1,$$

откуда

$$\widehat{q} = \frac{\widehat{r}}{1+\widehat{r}}.$$

Можно задаться таким вопросом: через какое количество N лет Ваш капитал (при непрерывно начисляемой процентной ставке $r = a/100$) увеличится в 2 раза? Ясно, что N определяется из соотношения

$$2 = e^{aN/100},$$

то есть,

$$N = \frac{\ln 2 \cdot 100}{a} \approx \frac{70}{a}.$$

На практике (при начислении процентов, скажем, дважды в год) широко распространено так называемое **правило 72**: *если процентная ставка есть $a/100$, то удвоение капитала произойдет через $72/a$ лет.*

Чтобы дать представление о том, как растет капитал при разных способах начисления процентов ($m = 1, 2, 3, 4, 6, 12, \infty$), приведем таблицу соответствующих значений $B_t(m)$ для $t = 0, 1, \dots, 10$, $B_0 = 10000$ и $r(m) = 0.1$ для всех m:

t \ m	1	2	3	4	6	12	∞
0	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000
1	11000	11025	11034	11038	11043	11047	11052
2	12100	12155	12174	12184	12194	12204	12214
3	13310	13401	13433	13449	13465	13482	13499
4	14641	14775	14821	14845	14869	14894	14918
5	16105	16289	16353	16386	16419	16453	16487
6	17716	17959	18044	18087	18131	18176	18221
7	19487	19799	19909	19965	20022	20079	20138
8	21436	21829	21967	22038	22109	22182	22255
9	23579	24066	24238	24325	24414	24504	24596
10	25937	26533	26743	26851	26960	27070	27183

5. Облигации, или боны, – это *долговые* обязательства, выпускаемые государством или банками, корпорациями, акционерными компаниями, другими финансовыми институтами с целью аккумулирования капитала.

Облигации весьма популярны в разных странах, и в абсолютном выражении вклады в них превышают инвестирование в акции и другие виды ценных бумаг. Основная их привлекательность (особенно для консервативных инвесторов) состоит в том, что по ним выплачиваются на регулярной основе оговоренные проценты и гарантирована полная выплата ссудного капитала в установленное время. Нельзя, конечно, с достоверностью утверждать, что облигации, выпускаемые государством или корпорациями, являются *безрисковыми* финансовыми инструментами. Доля риска, связанная с разорением, скажем, той или иной корпорации, с нарушением обязательств по выплате процентов, разумеется, всегда присутствует. В этом смысле, государственные облигации менее рискованны, чем облигации корпораций, но зато и купонные проценты, выплачиваемые корпорациями, больше государственных.

Покупателю облигаций, естественно, интересно знать степень *риска* различных корпораций, рассматриваемых на предмет покупки выпускаемых ими облигаций. Существует ряд изданий (например, Standard & Poor's Bond Guide), в которых печатаются рейтинги различных финансовых институтов, выпускающих облигации. Менее рискованные корпорации (т.е. с высоким рейтингом) выплачивают более низкий купонный процент. И соответственно, корпорации с низким рейтингом для привлечения покупателей выпускают облигации с высоким процентом выплат по купонам.

Каждую облигацию, выпускаемую в момент $t = 0$, характеризует ряд числовых параметров ((i)–(vii)):

(i) *номинальная стоимость* (par value, face value) $\mathsf{P}(T, T)$, т.е. та сумма, которая выплачивается обладателю облигации в
(ii) *момент погашения* (the year the bond matures) T, где T – срок жизни (maturity) облигации (для *краткосрочных* облигаций это, обычно, срок до года и меньше; для *среднесрочных* – от 1 до 10 лет; для *долгосрочных* – $T \geqslant 10$ лет);
(iii) *купонная процентная ставка облигации* (bond's interest rate, coupon yield) r_c, определяющая *дивиденды* – величину годичных купонных платежей, выплачиваемых эмитентом облигации ее обладателю и равных "$r_c \times$(номинальную стоимость)";
(iv) *начальная цена облигации* (the original price of bond) $\mathsf{P}(0, T)$, выпускаемой в свет в момент $t = 0$ со сроком жизни в T лет.

Если, скажем, в момент $t = 0$ выпускается облигация со сроком действия $T = 10$ лет, номинальной стоимостью в 1000 \$ и процентной купонной ставкой $r_c = 6/100$ ($= 6\%$), то покупатель, купивший ее по (начальной, покупной) цене в 1000 \$, по истечении десяти лет получит доход в 600 \$, слагающийся следующим образом:

номинальная стоимость		1000 \$
+		
купонные платежи за 10 лет	$1000 \times 6\% \times 10 =$	600 \$
−		
покупная цена		1000 \$
....		
=		+600 \$

Обладатель облигации сроком действия в T лет, купивший ее в момент $t = 0$, естественно может ее держать все эти T лет, получая купонные платежи и (в момент T) номинальную стоимость облигации. Однако, ему на самом деле может оказаться невыгодным держать ее до момента погашения T, если, например, *инфляционная* процентная ставка $r_{\text{inf}} \geqslant r_c$. В этом случае обладатели облигаций пользуются правом ее продажи (вообще говоря, в любой момент $0 \leqslant t \leqslant T$) по ее

(v) *рыночной цене* $\mathsf{P}(t, T)$

в момент времени t (со сроком погашения в момент T).

Понятно, что $\mathsf{P}(0, T)$ – это (начальная) цена облигации в момент ее выпуска, а $\mathsf{P}(T, T)$ – ее номинальная стоимость. (В приведенном примере эти значения были равны 1000 \$.) Хотя, в принципе, и возможен случай, когда рыночная цена $\mathsf{P}(t, T)$ больше номинальной стоимости $\mathsf{P}(T, T)$, типичной является ситуация, когда $\mathsf{P}(t, T) \leqslant \mathsf{P}(T, T)$.

Представим себе, что обладатель облигации решил ее продать спустя два года, когда рыночная цена облигации $\mathsf{P}(2, 10)$ для $t = 2$, $T = 10$ стала равной 800 \$. Тогда его доход от покупки и обладания облигацией в течение двух лет будет следующий:

рыночная цена		800 \$
+		
купонные платежи	$1000 \times 6\% \times 2 =$	120 \$
−		
покупная стоимость		1000 \$
....		
=		−80 \$

Тем самым, доход на самом деле *отрицателен*, т. е. потери составляют в этом случае 80 \$. Тот же, кто купит эту облигацию по рыночной цене $\mathsf{P}(2, 10) = 800$ \$, по прошествии 8 лет будет иметь следующий доход:

номинальная стоимость		1000 \$
+		
купонные платежи	$1000 \times 6\% \times 8 =$	480 \$
−		
покупная стоимость		800 \$
....		
=		+680 \$

Подчеркнем, что величина купонной процентной ставки облигации r_c, определяющей величину купонных платежей, *неизменна* на протяжении всего периода жизни облигации. Однако, рыночная стоимость облигации $\mathsf{P}(t, T)$ *флуктуирует* во времени. Это значение складывается в результате действия многочисленных экономических факторов: спроса и предложения, величины процентных ставок других ценных бумаг, спекулятивных действий и т. п. Рассматривая $\{\mathsf{P}(t, T)\}$ как *случайный процесс*, развивающийся в моменты времени $0 \leqslant t \leqslant T$, видим, что он является *условным* в том смысле, что фиксировано его значение $\mathsf{P}(T, T)$, являющееся номинальной стоимостью облигации.

Рис. 1 дает представление о том, как может флуктуировать рыночная цена $\mathsf{P}(t, T)$ во времени t, $0 \leqslant t \leqslant T$, "приходя" в момент погашения T в заранее фиксированное значение номинальной стоимости $\mathsf{P}(T, T)$.

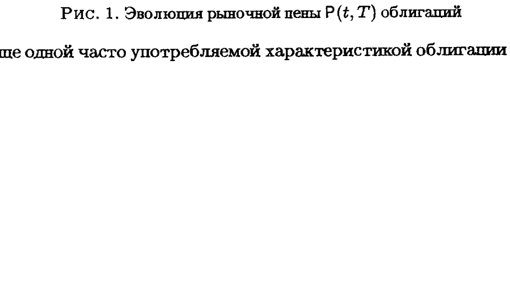


Рис. 1. Эволюция рыночной цены $\mathsf{P}(t, T)$ облигаций

Еще одной часто употребляемой характеристикой облигации является

(vi) *текущая процентная ставка* (the current yield) $r_c(t,T), 0 \leqslant t \leqslant T$, определяемая как отношение "годовых купонных выплат" к (текущей) рыночной цене:

$$r_c(t,T) = \frac{r_c \cdot \mathsf{P}(T,T)}{\mathsf{P}(t,T)},$$

что дает возможность *сравнения* различных облигаций. (В приведенном выше примере $r_c(0,10) = r_c = 6\%$, $r_c(2,10) = 6\% \cdot 1000/800 = 7.5\%$.)

Существует другая и, пожалуй, наиболее важная характеристика облигации, позволяющая судить о *доходе* (за оставшийся период ее действия) как за счет купонных выплат, так и выплаты в момент погашения, что дает еще одну возможность сравнивать разные облигации:

(vii) *доход* (в процентах) *до момента погашения* (the yield to maturity), или *доходность*

$$\rho(T-t,T)$$

(где $T-t$ – оставшееся время жизни облигации), для которой сумма дисконтируемых величин купонных платежей и номинальной стоимости на интервале $(t,T]$ равна текущей рыночной цене облигации; доходность, таким образом, определяется как корень $\rho = \rho(T-t,T)$ уравнения

$$\mathsf{P}(t,T) = \sum_{k=1}^{T-t} \frac{r_c \mathsf{P}(T,T)}{(1+\rho)^k} + \frac{\mathsf{P}(T,T)}{(1+\rho)^{T-t}}. \tag{6}$$

(Единицей измерения считается один год, $t = 1, 2, \dots, T$.)

В том случае, когда рыночная цена $\mathsf{P}(t,T)$ совпадает с номинальной ценой $\mathsf{P}(T,T)$, из данного определения следует, что $\rho(T-t,T) \equiv r_c$.

Типичная (схематическая) картина поведения *кривой доходности* $\rho(s,T)$ как функции *оставшегося* времени $s = T - t$ представлена на рис. 2.

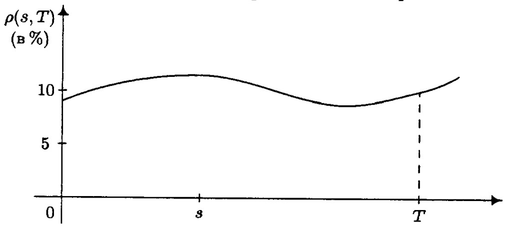


Рис. 2. Кривая доходности $\rho = \rho(s,T)$ как функция от $s = T - t$

В приведенном описании мы не затрагивали вопрос о *структуре* рыночных цен $\{\mathsf{P}(t,T)\}$, рассматриваемых, скажем, в рамках вероятностного подхода. К этому довольно-таки непростому вопросу мы обратимся далее в гл. III.

Сейчас же лишь отметим, что при вероятностном описании структуры и динамики цен $\{\mathsf{P}(t,T)\}$ обычно используются следующие два способа:

a) *непосредственное* (прямое) задание временнóй эволюции цен $\mathsf{P}(t,T)$ (a price-based approach);
b) *опосредованное* задание, в котором изначально задаются не цены $\mathsf{P}(t,T)$, а временнáя структура или доходности $\{\rho(T-t,T)\}$, или сходные характеристики типа "процентных ставок" (a term structure approach).

Заметим также, что формула (6), являющаяся связующей при взаимном пересчете цен и доходности, построена по схеме "простых процентов" (ср. с (1) при $m = 1$). Нетрудно дать и соответствующую формулу и в схеме "сложных процентов" (ср. с (2)), т. е. в случае непрерывного начисления процентов.

Как уже отмечалось, облигации выпускаются различными финансовыми учреждениями и с разными целями.

Облигации корпораций (corporate bonds) – с целью накопления капитала для расширения производства, модернизации, покрытия операционных расходов, ...

Государственные облигации (government bonds) – для разных правительственных программ, выплаты национального долга, ... В США это U.S. Treasury bills, notes, bonds, которые можно приобрести через один из Федеральных Резервных Банков или через брокеров.

Муниципальные облигации (municipal bonds), выпускаемые штатами, городами, ... , – для оплаты разных проектов (строительство дорог, школ, мостов, ...), пополнения бюджета, ...

Информация об облигациях корпораций, их характеристиках может быть найдена во многих изданиях (например, см. в "New York Stock Exchange" раздел "New York Exchange Bonds" или "American Stock Exchange").

Представление о том, в каком виде дается информация об облигациях, можно получить из следующего описания:

IBM-JJ15-7% of '01,

означающего, что речь идет об облигациях корпораций IBM с купонной выплатой[2)] 15 января и 15 июля, со ставкой $r_c = 7\%$ и моментом погашения в 2001 году.

Разумеется, также дается информация о номинальной стоимости облигаций и их текущей стоимости. (Подробнее см., например, книгу [469].)

6. Акции (stock, stocks) – это *долевые* ценные бумаги, выпускаемые корпорациями, компаниями, фирмами также (как и в случае облигаций) для увеличения капитала. Акции, в основном, бывают двух видов – *Обыкновенная акция* (Common stock) и *Привилегированная акция* (Preferred stock), различающиеся по выплате *дивидендов* по ним и степени риска обладания ими.

Обладатели обыкновенной акции получают дивиденды как соответствующую часть профита (дохода) компании, величина которого зависит от успеха ее деятельности. В случае разорения компании инвестор теряет все свои инвестиции. Привилегированная же акция гарантирует инвестору меньший риск потери всех своих инвестиций, гарантированную выплату дивидендов, размер которых, вообще говоря, не растет с увеличением дохода компании.

Существуют и другие виды акций, оговаривающие долю участия, специальный способ выплаты дивидендов и т. п.

Многих инвесторов покупка акций привлекает не дивидендами (соответственно – купонными выплатами в случае облигаций), а возможностью "делать" деньги на колебаниях цен акций, покупая их по низкой цене перед тем, как остальные начнут это делать, и продавая их по высокой цене перед тем, как другие будут это делать.

По некоторым оценкам более 50 млн. американцев владеют акциями. (В конце 1992 г. акциями компании AT&T обладали 2 418 447 инвесторов при общем числе акций 1 339 916 615; см. [357].)

Чтобы купить или продать акцию, надо обращаться в *брокерскую контору* (brokerage house) – инвестиционную фирму, являющуюся членом биржи по обмену акциями (stock exchange). Следует отметить, что, хотя число индивидуальных инвесторов (в акции) растет, реальная доля обладателей акций падает, поскольку инвесторы обычно участвуют на рынке ценных бумаг не непосредственно, а через "инвестиционные учреждения" (institutional investors), к которым относятся фонды взаимных вложений

[2)] В Европе купонные выплаты осуществляются обычно раз в год, а в США – через 6 месяцев два раза в год.

(mutual funds), пенсионные системы, страховые компании, банки и др., являющиеся основными "игроками" на рынке ценных бумаг, в том числе и на рынке акций.

Торговля акциями происходит на биржах в разных странах. Видимо, одной из самых первых бирж, возникших еще в XVII веке, явилась Амстердамская фондовая биржа (1602 г.), предметом торговли которой были акции акционерных компаний. Традиционно (фондовые) биржи в Европе находились под сильным контролем банков. В то же время американские фондовые биржи существуют автономно от банковской системы ([482; с. 10]).

Крупнейшей биржей в США является NYSE (New York Stock Exchange – название существует с 1817 года; число "мест" (seats) – 1366 в 1987 году) и AMEX (American Stock Exchange – образована в 1921 году на базе New York Curb Exchange, основанной в 1842 году). Чтобы компания могла торговать своими акциями на бирже, она должна удовлетворять некоторым требованиям (на ее размеры, доход и т. п.). Так, на NYSE требования к компаниям таковы: претаксовый заработок (прибыль до вычета налога; pre-tax earnings, pre-tax profit) должен быть больше или равен 2.5 млн. $; необходимо обладать не менее 1.1 млн. акций с минимальной рыночной ценой, большей или равной 18 млн. $. Тем самым, торговлей на этой бирже занимаются старейшие, хорошо известные компании (к 1993 году зарегистрировано 2089 компаний). На AMEX торгуют акциями, в основном, компании средних размеров; зарегистрирована 841 компания.

NASDAQ (National Association of Securities Dealers Automatic Quotations) биржа – другая крупная организация в США по торговле акциями; зарегистрировано 4700 компаний разных размеров – больших, средних, развивающихся малых.

Внушителен по числу участников (порядка 40 тысяч, [357]) рынок ценных бумаг OTC (Over-the-counter). Этот рынок, также как и NASDAQ, не имеет централизованного места, подобно, скажем, NYSE, AMEX, ... Торговля производится посредством компьютерно-телефонной связи через дилеров, которые покупают и продают ценные бумаги на свои счета. Эта торговля включает в себя самые разнообразные ценные бумаги – обыкновенные и привилегированные акции, облигации корпораций, ценные бумаги, выпускаемые правительством США, муниципальные облигации, опционы, варранты, иностранные ценные бумаги.

Основная причина, почему малые или новые компании или компании с небольшим числом акций обращаются к OTC – это то, что практически нет никаких требований (или они минимальны) на размер капитала компании и т. п.

С другой стороны, те компании, которые удовлетворяют требованиям других бирж, часто обращаются к ОТС, если "торгово-переговорный" стиль ОТС более предпочтителен, нежели система "хорошо организованных бирж". Есть и другие причины обращения к ОТС, скажем, нежелание обнародовать свое финансовое состояние, что требуется для торговли на "больших" биржах.

Естественно, что и для "больших", и для "малых" инвесторов важна *информация* о состоянии компаний, торгующих своими акциями, курсах акций и их эволюции. Важна также и информация о "глобальном" состоянии экономики, состоянии рынка ценных бумаг, выражаемая в виде некоторых "суммарных", "обобщенных" индексов.

С точки зрения информации о "глобальном" состоянии экономики наиболее известными являются "*Средние*" и "*Индексы*" Доу Джонса (Dow Jones). Имеются четыре "*Средних*":

- DJIA – *Dow Jones Industrial Average* (по 30 индустриальным компаниям);
- *Dow Jones Transportation Average* (по 20 авиакомпаниям, железнодорожным компаниям и компаниям, занимающимся перевозками);
- *Dow Jones Utility Average* (по 15 газовым, электрическим и энергетическим компаниям);
- *Dow Jones* 65 *Composite Average* (по 65 компаниям в трех вышеприведенных Averages).

Отметим, что, скажем, (суммарный) индекс DJIA, обычно называемый *Dow*, составленный по тридцати крупным ("blue-chip") компаниям, не является простым средним арифметическим. Он формируется так, что акции с высокой стоимостью вносят в суммарный индекс и больший вес. Таким образом, значительное изменение в ценах акций небольшого числа компаний может сильно изменить значение индекса (как показателя состояния "индустриальной" экономики) в целом [310].

(*К истории Dow.* В 1883 г. Чарльз Доу (Charles H. Dow) начал составлять списки средних значений "цен закрытия" акций девяти железнодорожных и двух производственных фирм. Эти списки, пользовавшиеся большой популярностью, и стали предшественниками "The Wall Street Journal", основанного в 1889 г. Чарльз Доу вместе с его партнером Эдвардом Джонсом (Edward H. Jones). См., например, [310].)

Помимо индексов *Dow Jones* широкое распространение имеют:

- Standard & Poor's 500 (S&P500) index,
- The NYSE Composite index,
- The NASDAQ Composite index,
- The AMEX Market Value index,
- Value-Line,
- The Russel 2000,
- The Wilshire 5000,

. . .

Индекс Standard & Poor's 500 в настоящее время составлен (в отличие от "Dow Jones") с учетом большего числа компаний (500 = 400 индустриальных + 20 транспортных + 40 коммунальных + 40 финансовых); индекс "NYSE" включает акции всех компаний, торгующих на "New York Stock Exchange", ...

(*К истории Standard & Poor's.* Henry Varnum Poor начал публикацию его годичных "Poor's Manual of Corporate Statistics" в 1860 году – за двадцать с лишним лет до того, как компания Dow Jones & Company начала публиковать дневные средние значения "цен закрытия". В 1941 году компания *Poor's* Finance Services слилась со *Standard* Statistic Company – другим лидером в составлении и публикации финансовых данных. Созданная в результате этого слияния *Standard & Poor's* Corporation стала одним из крупнейших информационных служб и издателей финансовой статистики. См., например, [310].)

Кроме печатных изданий типа упомянутых выше, текущую информацию о ценах "покупки" и "продажи" ("bid price" и "ask price") дает электронная система "NASDAQ", включающая акции порядка 5 тыс. компаний, принимающих участие в ОТС. Через дилеров брокеры могут в любой момент узнать цены покупки и продажи, предлагаемые другими дилерами. После этого брокер может вступать непосредственно в "торговый контакт" с тем дилером, чья предлагаемая цена его больше устраивает.

Интернационализация экономики привела к необходимости знания состояния не только компаний собственной страны, но и других стран. Соответствующие издания также существуют (в США принята такая терминология: термины "World", или "Worldwide", или "Global" относятся ко всем рынкам, включая и рынок США; термин же "International" относится к иностранным рынкам, не включая США).

О состоянии 16 основных мировых (International) бирж можно узнать из ежедневно публикуемой газеты "The Wall Street Journal", печатающей в разделе "Stock Market Indices" дневное состояние индексов закрытия вместе с процентным и абсолютным его изменениями в *сравнении* с прошлым днем.

Каждый хорошо знает по многочисленным публикациям, даже в обычных газетах, что цены акций, значения всевозможных финансовых индексов меняются весьма замысловатым, хаотическим образом.

Вот, например, график, показывающий изменение индекса DJIA:

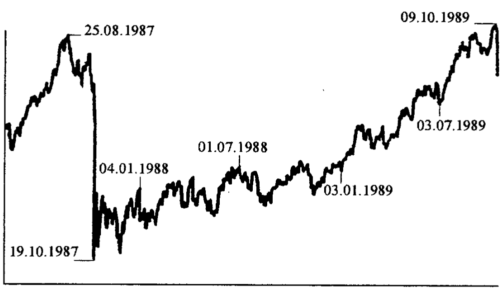


Рис. 3. Эволюция индекса DJIA (Dow Jones Industrial Average). В день краха, 19.10.1987, индекс DJIA упал на 508 пунктов

На следующем рис. 4 представлен график изменений *дневных* значений $S = (S_n)$ индекса S&P500 в период 1982–88 гг. Из дальнейшего станет ясно, что с точки зрения изучения поведения "стохастической" составляющей в индексах удобнее иметь дело не с величинами $S = (S_n)$, а с величинами $h_n = \ln \dfrac{S_n}{S_{n-1}}$, интерпретируемыми как "возврат", "отдача", "логарифмическая прибыль" (см. § 1a в гл. II) и ведущими себя более "однородно", нежели $S = (S_n)$. Соответствующий график значений $h = (h_n)$ приведен на рис. 5.

Резкий спад в конце 1987 г., четко выраженный на рис. 3 и 4, относится к известному *октябрьскому краху*, когда цены акций резко упали и инвесторы, опасаясь "потерять все", бросились продавать акции. Массовый характер начавшегося избавления от акций вызвал все нарастающий эмоциональный и психологический хаос и привел к обвальному выбросу акций на рынок для продажи. Так, например, на бирже NYSE в январе 1987 г.

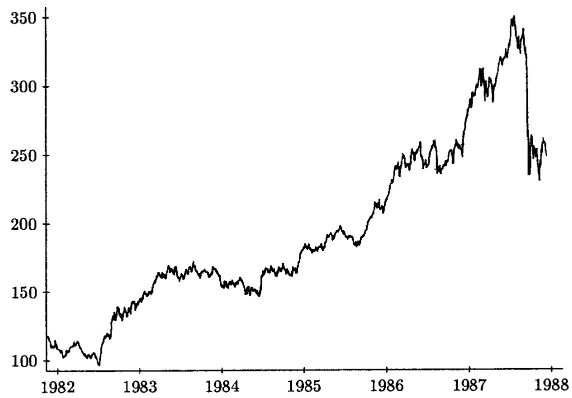


Рис. 4. Индекс S&P500 в период 1982–88 гг.

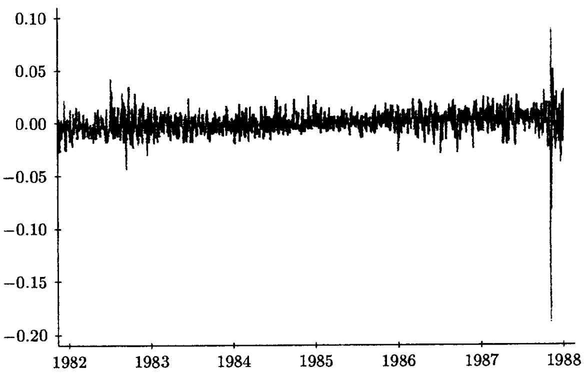


Рис. 5. Дневные значения $h_n = \ln \dfrac{S_n}{S_{n-1}}$ для индекса S&P500, построенные по данным рис. 4

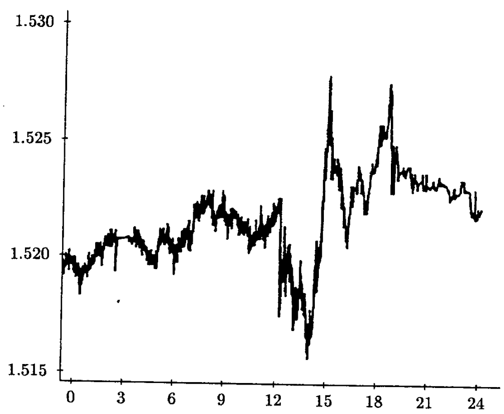


Рис. 6. Динамика средних значений (между ценами покупки и продажи) в обменном курсе DEM/USD в течение 24 часов 19.08.1993 года (точка 0 соответствует 0:00 по Гринвичу)

в дневном обороте участвовало примерно 300 млн. акций. В день же краха, 19 октября 1987 г., для продажи было выброшено 604 млн. акций, а 20 октября эта цифра поднялась до 608 млн.

В день краха "цена открытия" акции AT&T была равна 30, а "цена закрытия" равна $23\frac{5}{8}$. Тем самым, в процентном отношении потери этой компании составили 21.2%.

Глобальным же образом, индекс DJIA 19 октября 1987 г. по сравнению с состоянием на 31 декабря 1986 г. упал на 22.6%, что в абсолютном выражении составило 500 миллиардов долларов (1 миллиард $= 10^9$).

Другой известный экономический кризис, 1929 года, также происшедший в октябре, характеризуется тем, что в дневном обороте биржи NYSE 24 октября (до кризиса) участвовало 12.9 млн. акций, а в день краха, 29 октября – уже 16.4 млн. акций. Соответственно, индекс DJIA по сравнению с 31 декабря 1928 г. упал на 12.8%, что в абсолютном выражении составило 14 миллиардов долларов.

В дополнение к рис. 3–5, хорошо иллюстрирующим флуктуационный

характер изменений индексов DJIA и S&P500 в *течение ряда лет*, укажем также на рис. 6, наглядно показывающий, как менялся обменный курс DEM/USD в *течение одного бизнес-дня* (четверг, 19.08.1993).

Первая попытка математического описания эволюции стоимостей $S = (S_t)_{t\geqslant 0}$ акций (на парижском рынке), опирающегося на *концепции теории вероятностей*, была предпринята Л. Башелье (Louis Bachelier; 11.03.1870–28.04.1946) в его диссертации "Théorie de la spéculation", опубликованной в 1900 г. в Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, том 17, 1900, с. 21–86, [12], где он предложил рассматривать $S = (S_t)_{t\geqslant 0}$ как *случайный процесс*.

Анализируя экспериментальные данные цен $S_t^{(\Delta)}$, $t = 0, \Delta, 2\Delta, \dots$, (с интервалом времени Δ), он замечает, что $S_t^{(\Delta)} - S_{t-\Delta}^{(\Delta)}$ имеют (в статистическом смысле) нулевое среднее и флуктуации $|S_t^{(\Delta)} - S_{t-\Delta}^{(\Delta)}|$ порядка $\sqrt{\Delta}$.

Таким свойством обладает, например, случайное блуждание $S_t^{(\Delta)}$, $t = 0, \Delta, 2\Delta, \dots$, с

$$S_t^{(\Delta)} = S_0 + \sum_{k\leqslant[\frac{t}{\Delta}]} \xi_k^{(\Delta)},$$

где независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_k^{(\Delta)}$ принимают два значения, $\pm\sigma\sqrt{\Delta}$, с вероятностями $\frac{1}{2}$.

Предельный переход по $\Delta \to 0$ приводит (в соответствующем вероятностном смысле) к случайному процессу

$$S_t = S_0 + \sigma W_t, \qquad t \geqslant 0,$$

где $W = (W_t)_{t\geqslant 0}$ есть не что иное, как рассмотренное Л. Башелье *броуновское движение* (или *винеровский процесс* – в честь Н. Винера (N. Wiener, [476]), построившего этот процесс в 1923 году и развившего для него строгую математическую теорию; см. также далее § 3а, гл. III).

Отправляясь от броуновского движения, Л. Башелье дал формулу для математического ожидания $\mathbb{C}_T = \mathsf{E} f_T$ с $f_T = (S_T - K)^+$, что с современной точки зрения есть (в предположении, что процентная ставка банковского счета $r = 0$) значение *рациональной* (*справедливой*) *стоимости* (премии), которую покупатель стандартного опциона-колл (call option) должен заплатить продавцу опциона, обязавшемуся продать покупателю акции в момент исполнения (maturity time) T по цене исполнения (strike price, exercise price) K (см. далее § 1с). (Если $S_T > K$, то покупатель опциона имеет суммарный выигрыш, равный $S_T - K = \mathbb{C}_T$, поскольку он может купить акции по цене K и тут же их продать по более дорогой цене S_T; если же

$S_T < K$, то покупатель просто не предъявляет опцион к исполнению, и его потери равны выплаченной им премии $\mathbb{C}_T$.)

Найденная Л. Башелье формула (см. § 1а, гл. VIII)

$$\mathbb{C}_T = (S_0 - K)\,\Phi\left(\frac{S_0 - K}{\sigma\sqrt{T}}\right) + \sigma\sqrt{T}\,\varphi\left(\frac{S_0 - K}{\sigma\sqrt{T}}\right), \tag{7}$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}, \qquad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y)\, dy,$$

явилась предвестником знаменитой *формулы Блэка и Шоулса* (см. § 1b, гл. VIII) для рациональной стоимости стандартного опциона-колл в случае, когда $S = (S_t)$ описывается *геометрическим*, или *экономическим*, броуновским движением

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + (\mu - \sigma^2/2)t}, \tag{8}$$

где $W = (W_t)_{t \geqslant 0}$ – броуновское движение.

В предположении, что процентная ставка r банковского счета равна нулю, формула Блэка и Шоулса дает следующее выражение для рациональной стоимости $\mathbb{C}_T = \mathsf{E}(S_T - K)^+$ стандартного опциона-колл:

$$\mathbb{C}_T = S_0 \Phi(y_+) - K\Phi(y_-), \tag{9}$$

где

$$y_{\pm} = \left[\ln\frac{S_0}{K} \pm \frac{\sigma^2 T}{2}\right] \Big/ \sigma\sqrt{T}. \tag{10}$$

(По поводу общей формулы Блэка и Шоулса в случае $r \neq 0$ см. гл. VIII.)

Интересно отметить, что, согласно (7), при $K = S_0$

$$\mathbb{C}_T = \sigma\sqrt{\frac{T}{2\pi}},$$

что дает представление о росте величины рациональной стоимости опциона-колл с ростом "времени исполнения" T.

Проблема "правильного" описания динамики тех или иных финансовых индексов $S = (S_t)_{t \geqslant 0}$, типа цен акций, далека от своего завершения и является предметом многочисленных исследований теоретико-вероятностного и статистического характера. (Далее этим вопросам посвящаются II, III и IV главы.) Как уже объяснялось ранее (п. 4), аналогичная (и, пожалуй, более трудная) проблема возникает также в связи с описанием стохастической эволюции рыночных цен облигаций $\mathcal{P} = \{\mathsf{P}(t, T)\}$ как случайных процессов ($0 \leqslant t \leqslant T < \infty$) с фиксированными условиями на "правом конце", т. е. при $t = T$. (Эти вопросы рассматриваются далее в гл. III.)

§ 1с. Рынок производных ценных бумаг. Финансовые инструменты

1. Резкое повышение интереса к рынку ценных бумаг во всех странах мира относят к началу *семидесятых* годов. Естественно попытаться понять, что же произошло к началу семидесятых годов, что послужило толчком к новым сдвигам в экономике и, в частности, на рынке ценных бумаг.

Финансовый рынок (включая и рынок капитала – долгосрочных бумаг, и денежный рынок – краткосрочных бумаг) в шестидесятые годы отличался очень низкой *волатильностью* (изменчивостью), процентные ставки стали очень устойчивыми, обменный курс валют был фиксированным. С 1934 года по 1971 год США придерживались политики покупки и продажи золота по фиксированной цене 35 долларов на унцию (= 28.25 г). Доллар США рассматривался как эквивалент золота, был "так же хорош, как и золото". Тем самым, истинная цена золота определялась не рыночными силами, а искусственным образом.

Такое общее состояние рынка ограничивало инициативу инвесторов, сдерживало введение новой финансовой технологии.

С другой стороны, в 70-х годах произошло несколько событий, способствовавших значительным структурным изменениям и возрастанию волатильности на финансовых рынках. Перечислим наиболее важные среди них (см. [345], [108], а также п. 2 в § 1b).

1) Отказ (1973 г.) от фиксированного обменного курса валют (для ряда групп стран) и переход к "плавающему" курсу (для некоторых видов валют в определенном "коридоре"), что поставило, в частности, интересную и важную задачу об оптимальных *интервенциях* центральных банков.

2) Обесценивание доллара (по отношению к золоту): в 1971 году администрация Р. Никсона отказалась от фиксированной цены в 35 долларов за унцию золота. Это привело к тому, что в семидесятых годах цена золота в долларовом исчислении резко взлетела вверх: в 1980 году она была равна 570 долларов за унцию, в 1984 году упала до 308 долларов; с 1984 года эта цена флуктуирует, преимущественно, в интервале 300–400 долларов.

3) Всемирный нефтяной кризис, возникший в связи с политикой нефтяного картеля ОПЕК (OPEC), ставшего одним из основных законодателей цен на нефть на международном рынке. (OPEC – Organization of the Petroleum Exporting Countries – создана в 1960 году для унификации и координации нефтяной политики членов этой организации с целью защиты их интересов; в настоящее время ее членами являются Алжир, Венесуэла, Индонезия, Ирак, Иран, Катар, Кувейт, Ливия, Нигерия, Объединенные Арабские Эмираты, Саудовская Аравия.)

4) Упадок активности в реализации акций. (В США этот упадок в реальных терминах более значителен, нежели в период Великой депрессии 30-х годов.)

5) Разные страны оказались (особенно с учетом разрушительности Второй Мировой войны) в разном экономическом состоянии.

В таких условиях традиционные "правила большого пальца" (the old "rules of thumb") и простые модели регрессии стали полностью не соответствовать состоянию экономики и, в том числе, финансового бизнеса.

И рынок, действительно, быстро среагировал на новые возможности для инвесторов, получивших значительный простор для спекуляций (не в худшем понимании этого слова, а в его первоначальном: "speculation" – предположение, умозрительное построение, размышление). В разных местах стали создаваться биржи по опционам, фьючерсам на облигации (боны). В 1973 году была открыта CBOE – Chicago Board Options Exchange – биржа по заключению стандартных контрактов с опционами. Вот как инвесторы реагировали на новые, более динамичные возможности. В день открытия, 26 апреля, было заключено 911 контрактов на опционы-колл на 16 видов акций; через год заключалось более 20 тысяч контрактов в день; три года спустя – 100 тысяч в день; в 1987 году – 700 тысяч контрактов. Если учесть, что каждый единичный контракт – это сделка на куплю или продажу партии из 100 акций, то, следовательно, в дневном обороте 1987 года было задействовано 70 млн. акций. (См. подробнее [353].)

В этом же 1987 году на Нью-Йоркской бирже NYSE (New York Stock Exchange) в дневном обороте участвовало 190 млн. акций.

1973 год был знаменателен не только созданием первой организованной биржи по заключению стандартных контрактов с опционами. В этом же году были опубликованы две работы: F. Black and M. Scholes. *The pricing of options and corporate liabilities*, [44] и R. C. Merton. *The theory of rational option pricing*, [346], совершившие, можно сказать без преувеличения, революцию в методологии финансовых расчетов. Трудно, пожалуй, указать другие теоретические публикации в финансовой литературе,

которые бы с такой быстротой нашли применение в практике финансовых расчетов и стали к тому же источником многочисленных исследований как более сложных опционов, так и других видов производных ценных бумаг.

2. Среди производных ценных бумаг как инструментов финансовой инженерии наиболее заметное место занимают *опционы* и *фьючерсные контракты*. Общепризнано, что и те, и другие имеют очень высокий риск, но в то же самое время они и их разнообразные комбинации с успехом используются не только с целью получения (спекулятивного) дохода, но и как *средство защиты* от драматического изменения цен.

Опцион (option; выбор) – это ценная бумага (контракт), выпускаемая фирмами, корпорациями, банками и другими финансовыми институтами и дающая покупателю *право* купить или продать определенную ценность (например, акцию, облигацию, валюту) в установленный период или момент времени на заранее оговариваемых условиях.

В отличие от опционов, дающих *право* на покупку или продажу,

Фьючерс, или фьючерсный контракт (futures; заблаговременный, будущий контракт) – это *соглашение-обязательство* купить или продать определенную ценность (например, зерно, золото, валюту) в определенный момент в будущем по (*фьючерсной*) цене, оговариваемой в момент заключения соглашения.

α) *Фьючерсы* представляют практический интерес и для продавцов, и для покупателей самых разнообразных товаров и ценностей.

Так, например, разумный фермер, беспокоящийся о продаже будущего урожая по "хорошей" цене и боящийся драматического скачка цен "вниз", предпочтет лучше заключить "подходящий" контракт с мельником (пекарем) о поставке (еще и не выращенного-то) урожая, вместо того, чтобы дожидаться потом его созревания и продажи по той цене, которая (кто знает как!) сложится на рынке в будущем.

Соответственно и мельник (пекарь) заинтересован в покупке зерна по "подходящей" цене, также думая о том,чтобы избежать возможного значительного подорожания зерна в будущем.

В конечном счете цель и одного, и другого одна – *минимизировать риск*, обусловленный неопределенностью будущих значений цен на рынке. В этом смысле фьючерсные контракты являются формой взаимного соглашения, которая может устроить обе заинтересованные стороны.

Прежде чем переходить к содержательной стороне фьючерсных контрактов, уместно сначала остановиться на родственной им форме соглашений – так называемых форвардных контрактах.

β) Как и в случае фьючерсных контрактов,

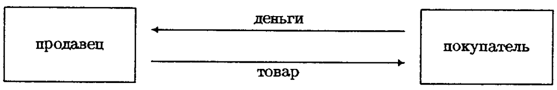
Форвардный контракт, или **форвард**, есть также соглашение о поставке-покупке некоторой ценности или товара в будущем по заранее оговариваемой (форвардной) цене.

Разница между фьючерсным и форвардным контрактами состоит в том, что форварды обычно заключаются между двумя сторонами без каких-либо посредников. Фьючерсные же контракты заключаются на *организованных биржах*, причем задействованные "покупатель" и "продавец" могут вовсе и не знать друг друга, а специальная система текущих перерасчетов делает отказ той или иной стороны от контракта делом убыточным.

Обычно о том, кто хочет что-то купить, говорят, что он "занимает *длинную* (long) позицию". Тот же, кто обязуется осуществить поставку, "занимает *короткую* (short) позицию".

Кардинальный вопрос и форвардных, и фьючерсных контрактов – это вопрос о договорной цене, называемой соответственно "форвардной" и "фьючерсной" ценой, которая на самом деле (в момент расчета) может оказаться отличной от рыночной цены поставляемого товара.

Схематично операции с форвардами выглядят следующим образом:



Здесь товар понимается в широком смысле. Например, им может быть валюта. При этом, если Вы хотите, скажем, за американские доллары (USD) купить швейцарские франки (CHF), то, гипотетически, информация о форвардах может выглядеть следующим образом:

Сегодняшняя цена 1 USD = 1.20 CHF,

(т. е. за 1 USD можно купить 1.20 CHF);

30-дневный форвард 1 USD = 1.19 CHF;

90-дневный форвард 1 USD = 1.18 CHF;

180-дневный форвард 1 USD = 1.17 CHF.

Представленная здесь ситуация является типичной в том смысле, что с *увеличением* интервала времени (срока поставки) за 1 доллар Вы будете получать *меньше* и, значит, если Вам через 6 месяцев надо иметь 10 000 швейцарских франков, то за это надо будет заплатить

$$\frac{10\,000}{1.17} = 8\,547 \text{ (долларов).}$$

Но если бы Вы сейчас нуждались в 10 000 швейцарских франков, то это обошлось бы в

$$\frac{10\,000}{1.20} = 8\,333 \text{ (доллара).}$$

Понятно, что *реальная, рыночная* стоимость 10 000 CHF через 6 месяцев может оказаться отличной от 8 547 USD. Она может быть и меньше, но может быть и больше, что определяется состоянием курса CHF/USD через 6 месяцев.

Форвардное соглашение – это, как уже отмечалось, соглашение между двумя сторонами, и в принципе существует потенциальная опасность его нереализации. К тому же часто бывает трудно найти поставщика требующегося Вам товара и, соответственно, наоборот – найти заинтересованного покупателя.

γ) Видимо, именно эти обстоятельства привели к возникновению *фьючерсных контрактов*, торгуемых на биржах со специальным механизмом перерасчета, который в общих чертах может быть описан следующим образом.

Представим, что 1 марта Вы даете своему брокеру указание купить на торговой бирже, скажем, 1 октября определенное количество пшеницы (с указанием ориентировочной цены). Брокер передает этот заказ на биржу, которая в свою очередь передает этот заказ одному из трейдеров биржи. Трейдер подыскивает подходящую цену и в случае ее нахождения дает сигнал другим трейдерам о том, что он желает купить контракт по этой цене. Если какой-то трейдер соглашается, то дело сделано. Если же этого не происходит, то трейдер уведомляет брокера, а он – Вас о наличии товара по более высокой цене, и Вы должны принимать то или иное решение.

Допустим, что, в конце концов, контракт заключен, и Вы – покупатель – занимаете *длинную* позицию, а продавец – *короткую*.

Далее, пусть Φ_0 есть (фьючерсная) цена, относительно которой обе стороны договорились, что пшеница будет поставлена 1 октября (по цене Φ_0). Теперь, чтобы контракт был действительно заключен, каждая из сторон должна внести на специальный счет биржи определенную сумму (порядка 2%–10% от Φ_0 в зависимости от авторитета клиентуры), называемую *начальной маржой* (initial margin). В дальнейшем в дело вступает определенная система перерасчета, осуществляемая в конце каждого дня и состоящая в следующем.

Допустим, что в момент (исполнения) $t = 0$ $\Phi_0 = 10\,000\$$ есть (фьючерсная) цена поставки пшеницы в момент $T = 3$, т. е. через три дня, и пусть к концу следующего дня ($t = 1$) рыночная фьючерсная цена поставки пшеницы в момент $T = 3$ стала равной 9 900 \$. В этом случае клиринговая палата биржи перечисляет на счет поставщика (т. е. фермера) 100 \$ (= 10 000 − 9 900). Таким образом, фермер получил прибыль и начинает как бы оперировать с контрактом, фьючерсная цена которого теперь равна 9 900 \$, а не 10 000 \$.

Заметим, что если бы в конце первого дня осуществлялась поставка по этой новой фьючерсной цене 9 900 \$, то суммарная величина, полученная фермером, была бы в точности равна фьючерсной цене Φ_0, поскольку $100\,\$ + 9\,900\,\$ = 10\,000\,\$ = \Phi_0$.

Естественно, что эти 100 \$ клиринговой палатой снимаются со счета покупателя, и он должен внести дополнительно 100 \$ на счет маржи. Возможна, впрочем, и ситуация, когда требование о дополнительном взносе поступает только тогда, когда маржовый счет падает ниже некоторого определенного уровня (maintenance margin).

Пусть аналогичное происходит и в момент $t = 2$ (см. рис. 7). Тогда фермер получает на свой счет поступление в 200 \$ и столько же будет снято со счета покупателя.

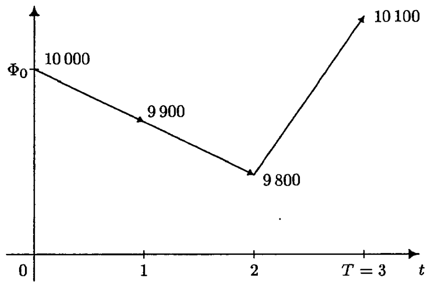


Рис. 7. Эволюция фьючерсной цены

Но если в момент $t = 3$ фьючерсная цена поставки (= реальная цена) станет равной 10 100 \$, то со счета фермера будет снято 300 \$ (= 10 100 − 9 800) и, следовательно, суммарно он потеряет 100 \$ (= 300 − 200), а покупатель получит эти 100 \$.

Заметим, что если бы в момент $T = 3$ покупатель решил купить пшеницу (с мгновенной поставкой) в момент $T = 3$, то он должен был бы заплатить 10 100 \$ (= реальная цена в этот момент). Но с учетом того, что покупатель уже получил на свой счет 100 \$, фактическая для него цена поставки равна $10\,100 - 100 = 10\,000$ (\$), т. е. в точности совпадает с договорной ценой Φ_0.

Аналогично и для фермера: фактически полученная плата за поставку в точности равна 10 000 \$, поскольку в момент $T = 3$ он получает реальную цену 10 100 \$, но с учетом снятых у него со счета 100 \$ это в точности равно 10 000 \$.

Из приведенного изложения становится понятной роль клиринговой палаты как "сторожевого пса" (watchdog), следящего за всем осуществлением перерасчетов, состоянием маржи, что, в конечном счете, направлено на то, чтобы контракт действительно "работал".

Как уже отмечалось выше, один из кардинальных вопросов теории расчетов форвардных и фьючерсных контрактов состоит в отыскании "справедливых" значений соответствующих цен.

Далее, в § 1e, гл. VI будет показано, как соображения "безарбитражности" в соединении с мартингальными методами позволяют дать формулы для форвардных и фьючерсных цен контрактов, заключенных в момент времени t с исполнением поставок в момент $T > t$.

δ) Опционы. В теории и практике опционов как производных финансовых инструментов есть свои понятия, определенная специфическая терминология, с которыми имеет смысл ознакомиться уже на раннем этапе обращения к ним. Это тем более важно, что большая часть математического анализа производных ценных бумаг далее будет относиться именно к опционам, что вызвано несколькими обстоятельствами.

Во-первых, математическая теория опционов наиболее продвинута и на ее примере удобно изучать основные принципы оперирования с ценными бумагами, в частности, принципы расчетов справедливых цен и *хеджирующих* (т. е. защищающих) стратегий.

Во-вторых, реальный объем опционов, торгуемых на рынках, исчисляется миллионами штук, и, следовательно, для них имеется "хорошая статистика", дающая возможность проверки качества вероятностно-статистических моделей эволюции цен опционов.

Хотя опционы известны как финансовые инструменты с давних пор (см., например, книгу [312]), пожалуй, Л. Башелье был первым, кто в своей, ставшей теперь знаменитой, диссертации "Théorie de la spéculation" [12], в 1900 году дал первый математический анализ стоимости опционов и обосновал целесообразность инвестирования в опционы. А организованным образом опционы стали продаваться, как уже отмечалось выше, не так уж давно – с 1973 года (см. § 1c).

ε) Для определенности последующего изложения, относящегося к опционам, предположим, что финансовая активность происходит в моменты времени

$$n = 0, 1, \ldots, N$$

с завершением всякой деятельности в момент времени N.

Будем предполагать, что речь идет об опционах, построенных на акциях, стоимость которых описывается случайной последовательностью

$$S = (S_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}.$$

Согласно общепринятой терминологии, опционы делятся на два класса:

- опционы *покупателя*
  (*call option*, отсюда происходит название опцион-колл);
- опционы *продавца*
  (*put option* – опцион-пут).

Опцион-колл дает *право покупки.*

Опцион-пут дает *право продажи.*

С точки зрения финансовой инженерии важно то, что эти финансовые инструменты "работают в разных направлениях": когда доход от одного растет, доход от другого уменьшается. Именно это обстоятельство объясняет широко распространенную практику *диверсификации* при оперировании с опционами разных классов, быть может, и в комбинации с другими ценными бумагами.

По времени исполнения опционы классифицируются на два типа: *Европейские* и *Американские.*

Если опцион предъявляется к исполнению только в *заранее* определенный момент времени N, то говорят, что N – момент исполнения, а опцион является опционом *Европейского типа.*

Если же опцион может быть предъявлен к исполнению в *любой* (случайный) момент времени $\tau \leqslant N$, то говорят, что это – опцион *Американского типа.*

На практике большинство торгуемых опционов являются опционами Американского типа, которые дают больше свободы покупателю, допуская *выбор* момента исполнения τ. В случае же опционов Европейского типа этот момент заранее определен ($\tau \equiv N$). Отметим, что имеются случаи, когда опционы Американского и Европейского типов "совпадают" (в том смысле, что "оптимальный" момент τ для опциона Американского типа равен N). Подробнее см. гл. VI (§ 5b) и VIII (§ 3c).

Рассмотрим теперь, для определенности, *стандартный опцион покупателя* (call option, опцион-колл) *Европейского типа* со временем исполнения N. Такой опцион характеризуется *фиксированной* в момент его покупки ценой K, по которой покупатель может купить, скажем, акции, фактическая стоимость которых S_N в момент N может, и существенным образом, отличаться от K.

Если $S_N > K$, то эта ситуация окажется благоприятной для покупателя, поскольку ему, по условиям контракта, дано право купить акции по цене K, что он может и сделать с немедленной затем их продажей по рыночной цене S_N. В этом случае получаемый им от этой операции доход равен $S_N - K$.

Если же окажется, что $S_N < K$, то данное покупателю право покупки (по цене K) ему ничего не дает, поскольку он может купить акции и по более низкой цене (S_N).

Объединяя эти два случая, можно сказать, что в момент N доход покупателя f_N определяется формулой

$$f_N = (S_N - K)^+,$$

где $a^+ = \max(a, 0)$.

Разумеется, за покупку такого финансового инструмента надо заплатить некоторую премию $\mathbb{C}_N$. Таким образом, *чистый доход покупателя опциона-колл* будет равен

$$(S_N - K)^+ - \mathbb{C}_N,$$

то есть,

$$\begin{aligned} (S_N - K) - \mathbb{C}_N, &\quad \text{если} \quad S_N > K, \\ -\mathbb{C}_N, &\quad \text{если} \quad S_N \leqslant K. \end{aligned}$$

Соответственно, *доход продавца* будет равен

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_N - (S_N - K), &\quad \text{если} \quad S_N > K, \\ \mathbb{C}_N, &\quad \text{если} \quad S_N \leqslant K. \end{aligned}$$

Из этих рассмотрений ясно, что покупка опциона-колл связана с надеждой на *повышение* стоимости акций. Подчеркнем также, что стоимость опциона $\mathbb{C}_N$, конечно, зависит не только от N, но и от K. Понятно при этом, что чем меньше K, тем больше стоимость $\mathbb{C}_N$.

Замечание. Существует специальная терминология для тех, кто играет на *повышение* и на *понижение*. Согласно [65]:

"*Бык*" (bull) – "дилер на фондовой бирже, валютном или товарном рынке, ожидающий, что цены поднимутся. Рынок 'быков' – это такой рынок, на котором дилер с большей вероятностью будет покупать, а не продавать, причем он может покупать даже за свой собственный счет, открывая позицию 'быка'. 'Бык' с открытой 'длинной' позицией надеется продать по более высокой цене то, что он купил, после повышения конъюнктуры на рынке".

"*Медведь*" (bear) – "дилер на фондовой бирже, валютном или товарном рынке, ожидающий падения цен. 'Медвежий рынок' – это рынок, на котором дилер с большей вероятностью будет продавать ценные бумаги, валюту или товары, нежели покупать их. Он может даже продавать ценные бумаги, валюту или товары, которых у него нет. Такие операции носят название 'короткие продажи', или 'установление медвежьей позиции'. 'Медведь' надеется закрыть (или покрыть) свою короткую позицию путем покупки ценных бумаг, валюты или товаров по ценам, более низким по сравнению с теми, по которым он их продал. Разница между ценой покупки и первоначальной ценой продажи представляет собой прибыль 'медведя'".

В зависимости от соотношений между начальной ценой S_0 и величиной K опционы подразделяются на три категории: *с выигрышем* (in-the-money), *с нулевым выигрышем* (at-the-money) и *с проигрышем* (out-of-money). В случае опциона-колл этим категориям отвечают, соответственно, соотношения: $S_0 > K$, $S_0 = K$ и $S_0 < K$.

Следует сразу отметить, что в положениях продавца и покупателя имеется огромная разница.

Покупатель, купив опцион, просто выжидает наступление момента N его предъявления, созерцая, быть может, как наблюдатель, за характером изменения цен S_n, $n \geqslant 0$.

Роль же продавца много сложнее, поскольку он должен думать о необходимости исполнения контракта, что заставляет его не созерцательно относиться к движению цен S_n, $n \geqslant 0$, а использовать все имеющиеся в его распоряжении финансовые средства для составления такого портфеля ценных бумаг, который бы обеспечил выплату $(S_N - K)^+$.

Ключевыми здесь являются следующие два вопроса – какова "справедливая" цена $\mathbb{C}_N$ продажи-покупки опциона и как должен действовать продавец опциона, чтобы выполнить условия контракта.

В случае *стандартного опциона продавца* (put option, опцион-пут) *Европейского типа* со временем исполнения N фиксируется величина K, по которой покупатель опциона имеет *право продать* (в момент N) акции. Поэтому, если истинная цена акции в момент N равна S_N и $S_N < K$, то ее продажа по цене K даст доход $K - S_N$. *Чистый* же *доход*, с учетом премии $\mathbb{P}_N$ за покупку такого опциона, будет равен

$$(K - S_N) - \mathbb{P}_N.$$

Если же $S_N > K$, то предъявлять опцион к исполнению нет смысла, поскольку обусловленная контрактом продажная цена K меньше рыночной цены S_N.

Таким образом, *чистый доход покупателя опциона-пут* будет равен $(K - S_N)^+ - \mathbb{P}_N$.

Как и в случае опциона-колл, здесь также возникает вопрос о значении "справедливой" цены $\mathbb{P}_N$, которая бы устроила и продавца, и покупателя.

η) Рассмотрим иллюстративный пример на опцион-колл.

Пусть Вы покупаете 10 контрактов на акции. Каждый контракт обычно заключается на 100 акций. Таким образом, реально речь идет о покупке 1 000 акций. Предположим, что рыночная цена S_0 каждой акции равна 30 (скажем, \$), $K = 35$, $N = 2$, премия за все 10 контрактов равна 250\$.

Пусть, далее, рыночная цена S_2 в момент $n = 2$ стала равной 40\$. В этом случае опцион предъявляется к исполнению, и отвечающий этой ситуации чистый доход будет *положительным:*

$$(40 - 35) \times 1\,000 - 250 = 4\,750 \text{ (\$)}.$$

Если же рыночная цена $S_2 = 35.1$\$, то, поскольку $S_2 > K = 35$\$, опцион снова будет предъявляться к исполнению, но соответствующий этой ситуации чистый доход будет *отрицательным*:

$$(35.1 - 35) \times 1\,000 - 250 = -150 \text{ (\$)}.$$

Ясно, конечно, что доход будет *нулевым*, если

$$(S_2 - K) \cdot 1\,000 = 250 \text{ (\$)},$$

т.е. тогда, когда $S_2 = 35.25$\$, поскольку $K = 35$\$.

Таким образом, всякий раз, когда цена акции S_2 падает ниже отметки 35.25 \$, покупатель такого опциона-колл оказывается в проигрыше.

Предположим теперь, что рассматривается опцион-колл Американского типа с возможными моментами предъявления опциона к исполнению

$n = 1$ и $n = 2$. Если вообразить, что в момент $n = 1$ произошло резкое повышение цен акций, скажем, $S_1 = 50\,\$$, то покупатель этого опциона-колл имеет право предъявить его к исполнению в момент $n = 1$, получив большой чистый доход:

$$(50 - 35) \cdot 1\,000 - 250 = 15\,000 - 250 = 14\,750\ (\$).$$

Но понятно, однако, что премия за такие опционы должна быть не 250 \$, а значительно выше, поскольку "за большие возможности надо и больше платить". И действительно, *реальная* стоимость опционов Американского типа выше, нежели опционов Европейского типа. См. далее гл. VI и VIII.

Предыдущий пример рассматривался с позиции покупателя. Обратимся теперь к продавцу.

Для него, в принципе, имеются две возможности – это продавать акции, которыми он уже владеет (этот случай называется "writing covered stock"), или же продать акции, которыми он не владеет (этот случай называется "writing naked call").

Последняя возможность является очень рискованной и может оказаться просто разорительной, поскольку если опцион предъявляется к исполнению (когда $S_2 > K$), то продавец должен реально купить акции, чтобы их продать покупателю по цене K для выполнения условий контракта опциона-колл.

Если, скажем, $S_2 = 40\,\$$, то надо будет заплатить 40 000 \$ за покупку 1 000 акций.

Премия же составляет всего лишь 250 \$, и, следовательно, суммарный убыток равен

$$40\,000 - 35\,000 - 250 = 4\,750\ (\$).$$

Следует отметить, что в обоих рассматриваемых случаях чистый доход продавца не превышает 250 \$. И если он его действительно получает, то это чисто спекулятивный доход "на колебаниях цен акций", и к тому же в случае "writing naked stocks" способ его получения весьма рискованный. Тем самым можно сказать, что возможный здесь "*доход продавца – это компенсация за его риск*".

3. В реальном мире с целью редуцирования риска "большие" инвесторы, имеющие большие финансовые возможности, широко прибегают к методам *диверсификации*, *хеджирования*, инвестируя средства в самые *разнообразные* ценные бумаги (акции, облигации, опционы, ...), сырье и т. д. В этом отношении весьма интересна и поучительна книга Дж. Сороса [451], в которой он в ряде мест (см., к примеру, таблицы в [451; §§ 11, 13]) описывает по дням *эволюцию* структуры портфеля ценных бумаг (состоящего из разнообразных видов финансовых активов) руководимой им компании "Quantum Fund" (с 1968 по 1993 гг.). Так, например, 4 августа 1986 г. (см. [451, с. 243 – в англ. изд. и с. 283 – в русском изд.]), портфель включал в себя акции, облигации, товарно-сырьевую продукцию.

Можно с уверенностью сказать, что с точки зрения финансовой инженерии книга Дж. Сороса является блестящим руководством для практической деятельности на рынке ценных бумаг.

4. Если говорить об **опционах покупателя** Европейского типа, то, как мы уже видели, они характеризуются

1) временем исполнения N,
2) функцией выплаты f_N.

• Для *стандартного опциона-колл*

$$f_N = (S_N - K)^+.$$

• Для *стандартного опциона-колл с последействием*

$$f_N = (S_N - K_N)^+,$$

где $K_N = \min(S_0, S_1, \ldots, S_N)$.

• Для *арифметического азиатского опциона-колл*

$$f_N = (\overline{S}_N - K)^+, \qquad \overline{S}_N = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} S_k.$$

Следует отметить, что величина K, входящая, скажем, в функцию выплаты $f_N = (S_N - K)^+$ стандартного опциона и называемая *ценой исполнения* (strike price), обычно близка к значению S_0. Как правило, опционы с большой разницей в значениях S_0 и K не торгуются.

В случае **опционов продавца**:

• для *стандартного опциона-пут*

$$f_N = (K - S_N)^+;$$

• для *стандартного опциона-пут с последействием*

$$f_N = (K_N - S_N)^+, \qquad K_N = \max(S_0, S_1, \ldots, S_N);$$

• для *арифметического азиатского опциона-пут*

$$f_N = (K - \overline{S}_N)^+, \qquad \overline{S}_N = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} S_k.$$

Существует огромное количество опционов, многие из которых имеют весьма *экзотические* названия (см., например, [414] и далее § 4a,b, гл. VIII). В § 4e, гл. VI, приведены также некоторые виды стратегий, основанные на опционах (комбинации, спрэды, сочетания).

Для покупателя опционы привлекательны тем, что они стоят не так дорого, хотя комиссионные могут быть и значительными. Чтобы дать представление о том, как рассчитывается *стоимость опционов* (иначе – *премия*, или невозвращаемая плата за их покупку), рассмотрим следующую несколько идеализированную ситуацию.

Пусть стоимость акций S_n, $0 \leqslant n \leqslant N$, такова, что

$$S_n = S_0 + (\xi_1 + \dots + \xi_n),$$

где целое $S_0 > N$ и (ξ_k) – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с вероятностью

$$\mathsf{P}(\xi_k = \pm 1) = \frac{1}{2}.$$

Тогда заведомо $S_n > 0$, $0 \leqslant n \leqslant N$.

Предположим, что в нашем распоряжении находится также банковский счет $B = (B_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ с $B_n \equiv 1$, т.е. с процентной ставкой $r = 0$. Будем рассматривать стандартный опцион-колл Европейского типа с функцией выплаты $f_N = (S_N - K)^+$.

Мы хотим показать, что *рациональная* (иначе – *справедливая*, *взаимоприемлемая*) цена $\mathbb{C}_N$ за покупку такого опциона определяется следующей формулой:

$$\mathbb{C}_N = \mathsf{E}(S_N - K)^+,$$

т.е. величина премии равна значению среднего выигрыша покупателя.

Формальному определению цены $\mathbb{C}_N$, методам ее расчета в дальнейшем будет уделено много места (см. гл. V). В рассматриваемом же случае формулу $\mathbb{C}_N = \mathsf{E}(S_N - K)^+$ можно обосновать следующим образом.

Предположим, что назначенная продавцом цена $\widetilde{\mathbb{C}}_N > \mathsf{E}(S_N - K)^+$, и покупатель опциона согласился его купить по этой цене. Покажем, что в этом случае продавец заведомо имеет *безрисковый доход*, равный $\widetilde{\mathbb{C}}_N - \mathbb{C}_N$.

В самом деле, покупатель опциона понимает, что он должен соглашаться с той ценой, которая дает продавцу возможность выполнить условия, заложенные в контракт при покупке опциона. И понятно, конечно, что эта цена не может быть "малой". Но покупатель также понимает, что он не должен переплачивать, а должен платить ту *минимальную* цену, которая будет еще достаточна для того, чтобы продавец выполнил условия контракта.

Так что надо показать, что получив премию $\mathbb{C}_N = \mathsf{E}(S_N - K)^+$, продавец опциона может так ею распорядиться (под этим здесь понимается ее *инвестирование*), чтобы условия контракта были бы выполнены.

Для простоты положим $N = 1$ и $K = S_0$. Тогда $\mathbb{C}_1 = \mathsf{E}\xi_1^+ = \frac{1}{2}$. Покажем, как продавец (= эмитент) опциона может распорядиться этой премией, с тем чтобы обеспечить выполнение условий контракта.

Представим $\frac{1}{2}$ в виде

$$\frac{1}{2} = \Big(\frac{1}{2} - \frac{S_0}{2}\Big) + \frac{S_0}{2} \qquad (= \beta_0 \cdot 1 + \gamma_0 \cdot S_0).$$

Если обозначить $X_0 = \beta_0 \cdot 1 + \gamma_0 \cdot S_0$ $(= \frac{1}{2})$, то можно сказать, что полученная премия $\frac{1}{2}$ образует (начальный) капитал эмитента, помещенный на банковский счет (величиной β_0) и в акции (числом γ_0). То, что в рассматриваемом случае β_0 отрицательно, просто означает *заем* (взятие в долг) с банковского счета, который, разумеется, должен быть возвращен.

Пара (β_0, γ_0) образует, как говорят, *портфель ценных бумаг* продавца в момент $n = 0$.

Какой капитал этот портфель даст в момент $n = 1$? Если этот капитал обозначить X_1, то будем иметь

$$\begin{aligned} X_1 &= \beta_0 \cdot B_1 + \gamma_0 \cdot S_1 = \beta_0 + \gamma_0(S_0 + \xi_1) \\ &= \Big(\frac{1}{2} - \frac{S_0}{2}\Big) + \frac{1}{2}(S_0 + \xi_1) = \frac{1 + \xi_1}{2} \\ &= \begin{cases} 1, & \text{если } \xi_1 = 1, \\ 0, & \text{если } \xi_1 = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Поскольку

$$\xi_1^+ = \frac{1 + \xi_1}{2},$$

то мы видим, что

$$X_1 = f_1 \qquad (= (S_1 - K)^+).$$

Иначе говоря, портфель (β_0, γ_0) обеспечивает получение капитала X_1, *в точности* равного функции выплаты f_1, что дает продавцу возможность выполнить условия контракта и при этом возвратить взятый долг.

Действительно, если $\xi_1 = 1$, то акции дадут $\frac{1}{2}(S_0+1)$. Поскольку

$$\frac{1}{2}(S_0+1) = 1 + \Big(\frac{S_0}{2} - \frac{1}{2}\Big),$$

то видим, что средств, полученных от акций, достаточно, чтобы вернуть долг $\Big(\frac{S_0}{2} - \frac{1}{2}\Big)$ и выплатить покупателю $(S_1-K)^+ = (S_1-S_0)^+ = \xi_1^+ = 1$.

Если же $\xi_1 = -1$, то акции дадут $\frac{1}{2}(S_0-1)$. В этом случае покупатель не предъявляет опцион к исполнению (ведь $S_1 = S_0+\xi_1 = S_0 - 1 < S_0 = K$), и, следовательно, все, что должен выплатить эмитент, – это вернуть долг, который равен $\frac{1}{2}(S_0-1)$, т.е. в точности то, что получено в этом случае $(\xi_1 = -1)$ от акций.

Итак, если назначенная продавцом цена опциона есть $\widetilde{\mathbb{C}}_1 > \mathbb{C}_1 = \mathsf{E}(S_1-K)^+$, то он будет иметь безрисковый доход $\widetilde{\mathbb{C}}_1 - \mathbb{C}_1$, выполняя при этом все условия опционного контракта.

Покажем теперь, что назначение премии $\widetilde{\mathbb{C}}_1 < \mathbb{C}_1$ $(=\frac{1}{2})$ не даст эмитенту возможности выполнить (без потерь) условия опционных выплат.

Действительно, выбор портфеля (β_0, γ_0) дает

$$X_0 = \beta_0 + \gamma_0 S_0$$

и

$$X_1 = \beta_0 + \gamma_0(S_0+\xi_1) = X_0 + \gamma_0\xi_1.$$

Если $\xi_1 = 1$, то по условиям опциона эмитенту надо выплатить покупателю 1 и еще $-\beta_0$, т.е. от акции надо в этом случае иметь

$$\gamma_0(S_0+1) = 1 - \beta_0.$$

В случае же $\xi_1 = -1$ от акции надо иметь

$$\gamma_0(S_0-1) = -\beta_0.$$

Таким образом, должно быть

$$\gamma_0 = \frac{1}{2}, \qquad \beta_0 = \frac{1}{2} - \frac{S_0}{2}.$$

Но при этих значениях $\beta_0 + \gamma_0 S_0 = \frac{1}{2}$, и, следовательно, равенство $X_0 = \beta_0 + \gamma_0 S_0$ с $X_0 < \frac{1}{2}$ невозможно.

Итак, формула $\mathbb{C}_N = \mathsf{E}(S_N - K)^+$ установлена для $N = 1$ и $S_0 = K$. В общем случае она может быть доказана с помощью аналогичных аргументов. Мы не будем сейчас это делать, поскольку далее (в гл. V) эта формула будет следовать из общих рассмотрений.

Отметим, что если $S_0 = K$, то

$$\mathbb{C}_N = \mathsf{E}(\xi_1 + \cdots + \xi_N)^+,$$

и из центральной предельной теоремы нетрудно заключить, что

$$\mathbb{C}_N \sim \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \cdot \sqrt{N}\,.$$

Таким образом, с ростом времени N стоимость опциона растет как $\sqrt{N}$. Этот результат полностью согласуется с тем, который получается (при $S_0 = K$) из формулы Башелье для $\mathbb{C}_T$, приведенной в конце § 1b, согласно которой

$$\mathbb{C}_T = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \cdot \sqrt{T}$$

(при $\sigma = 1$ и $S_0 = K$).

5. Как уже отмечалось, торгуемые опционы весьма разнообразны.

Например, в США весьма распространены *опционы на индексы*, к числу которых относятся опционы на индексы S&P100 и S&P500, торгуемые на CBOE. (Опционы на S&P100 являются опционами Американского типа, а на S&P500 – Европейского.) В силу большой волатильности срок действия этих опционов весьма короток.

В случае *опционов на фьючерсы* роль цен (S_n) играют фьючерсные цены (Φ_n). В случае *опционов на облигации* ценами (S_t) служат цены облигации $\mathsf{P}(t,T)$. По поводу других видов опционов см. § 4а, гл. VIII.

2. Финансовый рынок в условиях неопределенности. Классические теории динамики финансовых индексов, их критика и пересмотр. Неоклассические теории

Вот лишь некоторые из вопросов, которые естественно возникают при соприкосновении с теорией и практикой финансового рынка:

- как *функционирует* финансовый рынок в условиях неопределенности,
- как *складываются* и *описываются* цены и какова их динамика во времени,
- на какие *концепции* и *теории* следует опираться при расчетах,
- *предсказуемо* ли будущее движение цен,
- каков *риск* тех или иных финансовых инструментов.

При описании динамики цен и расчетах, например, стоимостей производных финансовых инструментов мы будем придерживаться той точки зрения, что рынок ведет себя так, что на нем отсутствуют *арбитражные возможности*. С *математической* точки зрения эта *экономически* понятная концепция приводит, по-существу, к тому, что существует так называемая *мартингальная* (*риск-нейтральная*) вероятностная мера, относительно которой (нормированные) цены оказываются *мартингалами*, что дает, в свою очередь, возможность использования хорошо развитого аппарата "стохастического исчисления" для изучения их эволюции и для разного рода расчетов.

Не преследуя здесь цель подробного изложения имеющихся теорий и разных концепций *финансового рынка*, мы остановимся далее лишь на тех из них, которые ближе всего по духу к изложению, принятому в данной

книге, где основной (вероятностный) акцент сделан на "стохастическое исчисление" и "статистику" в финансовой математике и финансовой инженерии. (Укажем на некоторые учебные пособия и монографии: [79], [83], [112], [117], [151], [240], [268], [284], [332]–[334], [387], [460], в которых можно найти отражение самых разнообразных аспектов финансового рынка – экономические идеи, концепции, теории в условиях определенности и неопределенности, модели равновесия, оптимальность, полезность, портфель, риск, финансовые решения, дивиденды, производные ценные бумаги, ...)

Вкратце отметим, что в двадцатых годах настоящего столетия, к которым относят зарождение *теории финансов*, основной ее интерес был связан, главным образом, с вопросами администрирования и увеличения фондов, а ее "высшая математика" сводилась, в сущности, к подсчету сложных процентов.

Последующее развитие шло в двух направлениях – в предположении *полной определенности* (в ценах, спросе, предложении, ...) и предположении условий *неопределенности*.

В первом случае определяющую роль сыграли работы И. Фишера (I. Fisher, [159]) и Ф. Модильяни и М. Миллера (F. Modigliani and M. Miller, [356], [350]), рассматривавших вопросы *оптимальных* решений для индивидуумов и фирм соответственно. С математической точки зрения дело сводилось к задачам максимизации функций многих переменных при наличии ограничений.

Во втором случае нужно прежде всего отметить работу Г. Марковитца (H. Markovitz, [332]) 1952 года и работу М. Кендалла (M. Kendall, [269]) 1953 года.

Работа Г. Марковитца, заложившая основы *теории портфеля* (*portfolio*) *ценных бумаг*, была посвящена проблеме *оптимизации инвестиционных решений* в *условиях неопределенности*. Соответствующий вероятностный анализ, именуемый *mean-variance analysis* (средне-дисперсионный анализ), выявил исключительно важную роль *ковариаций* между ценами как того ключевого ингредиента, от которого зависит степень (несистематического) *риска* создаваемого портфеля (набора) ценных бумаг. Именно в работе Г. Марковитца была в полной мере осознана роль идеи *диверсификации* при составлении портфеля для редуцирования несистематического риска, оказавшей свое влияние на создание в 1964 году В. Шарпом (W. Sharpe, [433]) и в 1976 году С. Россом (S. Ross, [412]) двух *классических* теорий –

- *CAPM – Capital Asset Pricing Model*
  (Модель ценообразования основных фондов) [433],
- *APT – Arbitrage Pricing Theory*
  (Арбитражная теория расчетов) [412],

дающих объяснение того, как складывается и чем определяется доход той или иной ценной бумаги (скажем, акции) в зависимости от состояния "глобального рынка", на котором эта ценная бумага функционирует ($CAPM$-теория), от каких факторов этот доход зависит (APT-теория) и из каких концепций следует исходить при финансовых расчетах. Основные положения теории Г. Марковитца, теорий $CAPM$ и APT будут изложены ниже в §§ 2b–2d.

Уже из этого краткого изложения становится понятным, что и теория Марковитца, и теории $CAPM$, APT относятся к проблематике *редуцирования риска* на финансовом рынке.

Говоря о *риске*[3], следует иметь в виду, что в финансовой теории обычно различают два его вида:

- *несистематический риск*, который можно редуцировать диверсификацией (diversifiable risk, unsystematic risk, residual risk, specific, idiosyncratic, ...), т.е. тот, на который инвестор может повлиять своими действиями,
- *систематический*, или собственно рыночный *риск* (market risk, undiversifiable risk, systematic risk).

Примером систематического риска может служить риск, связанный, скажем, со стохастической природой процентных ставок, индексов акций, и на который ("малый") инвестор не может оказать влияния своими действиями. Это не означает, конечно, что с этим риском нельзя "бороться". По существу, именно с целью *контролирования* возможного систематического риска, с целью выработки рекомендаций для рациональных финансовых решений, с целью защиты от больших и катастрофических рисков (как, например, в страховании) и создаются, притом довольно сложные, системы по сбору статистических данных, их обработке, предсказанию возможного движения цен на рынке. Именно этой цели служат производные финансовые инструменты, такие как фьючерсные контракты, опционы, комбинации, спрэды, сочетания, ... Именно этой цели служит и развитая для них техника *хеджирования* (более сложная, нежели диверсификация) – учитывающая вероятностные изменения в будущем движении цен и преследующая цель редуцировать риск от возможных неблагоприятных последствий этих изменений. ("Хеджирование" и соответствующая теория расчетов подробно рассматриваются в шестой главе.)

[3] О риске *вообще*, в том числе и в страховании, см. далее §§ 3a, 3b.

Работа М. Кендалла 1953 года [269], доложенная им на заседании Королевского статистического общества (Royal Statistical Society) Великобритании, относится к другому, и в определенном смысле более начальному, вопросу о том, *как ведут себя цены на рынке*, какими стохастическими процессами описывается динамика этих цен. Эта работа важна тем, что поставленные в ней вопросы привели, в конечном счете, как к созданию "*Теории эффективного рынка*" (Efficient Capital Market Theory – ECM-theory), излагаемой в следующем параграфе, так и к созданию разнообразных ее уточнений и обобщений.

§ 2a. Гипотеза случайного блуждания и концепция эффективного рынка

1. В тридцатых годах появилось несколько работ, в которых проводился эмпирический анализ различных финансовых характеристик с целью получения ответа на сакраментальный вопрос: *предсказуемо ли движение цен, стоимостей* и т.п.? Среди этих работ, написанных статистиками, надо назвать прежде всего работы А. Каулеса (A. Cowles, [84], 1933 и, впоследствии, [85], 1944), Г. Воркинга (H. Working, [480], 1934), А. Каулеса и Г. Джонса (A. Cowles and H. Jones, [86], 1937). А. Каулес оперировал с данными рынка акций, Г. Воркинг – с ценами товаров.

Хотя эти работы содержали богатый статистический материал и интересные неожиданные выводы о том, что, скорее всего, приращения $h_k = \ln \dfrac{S_k}{S_{k-1}}$ логарифмов цен S_k, $k \geqslant 1$, являются независимыми, ни экономисты, ни практики не обратили должного внимания на эти работы.

Как отмечается в [35; с. 93], происходило это, видимо, потому, что, с одной стороны, экономисты рассматривали вопросы динамики цен как нечто второстепенное (sideshow) в экономической системе, а с другой стороны, не так много экономистов в то время имело соответствующую математическую подготовку и владело статистической техникой.

Что касается практической стороны дела, то выводы этих работ о том, что последовательность $(H_k)_{k\geqslant 1}$ с $H_k = h_1 + \dots + h_k$ носит характер "случайного блуждания" (иначе – есть сумма независимых случайных величин), не согласовывались с бытующим среди практиков мнением, что цены следуют некоторым *ритмам*, *циклам*, *трендам*, ... , выявление которых вроде бы только и могло дать основу для предсказания движения цен.

После этих работ и до 1953 года, когда появилась упомянутая выше работа М. Кендалла [269], с которой начался современный период исследований эволюции финансовых характеристик, никаких принципиальных работ на эту тему, по-существу, не было.

Отправной точкой в работе М. Кендалла послужило желание выявить *цикличность* в поведении цен акций (stocks) и товаров (commodities). Анализируя реальные статистические данные (недельные данные для девятнадцати акций в период с 1928 по 1938 год, месячные средние цены на пшеницу на Чикагском рынке с 1883 по 1934 годы и на хлопок на Нью-Йоркской торговой бирже (New York Mercantile Exchange) с 1816 по 1951 годы), он, к своему удивлению, не смог обнаружить ни ритмов, ни трендов, ни циклов и, более того, пришел к заключению, что ряд наблюдаемых данных выглядит так, как если бы "... *the Demon of Chance drew a random number ... and added it to the current price to determine the next ... price*"[4]. Иначе говоря, представляется, что логарифмы цен $S = (S_n)$ ведут себя как *случайное блуждание*, т.е. если $h_n = \ln \dfrac{S_n}{S_{n-1}}$, то

$$S_n = S_0 e^{H_n}, \quad n \geqslant 1,$$

где H_n есть сумма *независимых* случайных величин $h_1, \ldots, h_n$.

Здесь уместно опять напомнить (ср. с § 1b), что, на самом деле, идея использования "случайного блуждания" для описания эволюции цен была впервые (до упомянутых работ А. Каулеса и Г. Воркинга) высказана Л. Башелье в его диссертации 1900 года "Théorie de la spéculation", [12]. Л. Башелье считал, что цены $S^{(\Delta)} = (S^{(\Delta)}_{k\Delta})$ (а не логарифмы цен, между прочим) меняют свои значения в моменты времени $\Delta, 2\Delta, \ldots$, причем так, что цена

$$S^{(\Delta)}_{k\Delta} = S_0 + \xi_\Delta + \xi_{2\Delta} + \cdots + \xi_{k\Delta},$$

где $(\xi_{i\Delta})$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения $\pm\sigma\sqrt{\Delta}$ с вероятностями $\frac{1}{2}$. Тем самым,

$$\mathsf{E} S^{(\Delta)}_{k\Delta} = S_0, \quad \mathsf{D} S^{(\Delta)}_{k\Delta} = \sigma \cdot (k\Delta).$$

Как уже отмечалось выше, полагая $k = \left[\dfrac{t}{\Delta}\right]$, $t > 0$, Л. Башелье формальным предельным переходом получает, что предельный процесс $S = (S_t)_{t\geqslant 0}$

---

[4] "... Демон Случая извлекал случайным образом число ... и добавлял его к текущему значению для определения ... цены в следующий момент".

с $S_t = \lim\limits_{\Delta\to 0} S^{(\Delta)}_{[\frac{t}{\Delta}]\Delta}$ (предел должен пониматься в некотором подходящем вероятностном смысле) имеет вид (см. п. 6, § 1b)

$$S_t = S_0 + \sigma W_t,$$

где $W = (W_t)$ есть то, что теперь принято называть *стандартным* ($W_0 = 0$, $\mathsf{E} W_t = 0$, $\mathsf{E} W_t^2 = t$) *броуновским движением*, или *винеровским процессом*, т.е. случайным процессом с *независимыми гауссовскими (нормальными) приращениями и непрерывными траекториями*. См. подробнее §§ 3a, 3b в гл. III.

2. После работы М. Кендалла резко увеличился интерес к более углубленному изучению динамики финансовых показателей и построению различных вероятностных моделей, объясняющих наблюдаемые эффекты, такие как, например, кластерность. Отметим в этой связи две работы конца пятидесятых годов – работу Г. Робертса (H. Roberts, [405], 1959) и М. Осборна (M. F. M. Osborne, [371], 1959).

Работа Г. Робертса, следующая идеям Г. Воркинга и М. Кендалла, была адресована непосредственно практикам финансового бизнеса и содержала эвристические аргументы в пользу *гипотезы случайного блуждания*. Работа астрофизика М. Осборна, названная "Brownian Motion in the Stock Market", возникла, по его же словам (см. [35; с. 103]), как желание апробировать его физическую и статистическую технику на реальных данных, каковыми являлись цены акций. Не будучи знакомым с работами Л. Башелье, Г. Воркинга и М. Кендалла, М. Осборн пришел, по-существу, к тем же самым выводам, отмечая, правда (и это оказалось важным для дальнейшего), что не сами цены S_t (с которыми оперировал Л. Башелье), а их логарифмы подчиняются броуновскому движению (со сносом). Эта же мысль получила затем свое развитие в работе П. Самуэльсона (P. Samuelson, [420]), введшего в финансовую теорию и практику *геометрическое* (или, как он говорил, – *экономическое*) *броуновское движение*

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + (\mu - \sigma^2/2)t}, \quad t \geqslant 0,$$

где $W = (W_t)$ – стандартное броуновское движение.

3. Нельзя сказать, что *гипотеза случайного блуждания* для описания эволюции цен была сразу принята экономистами, но именно она-то и привела к классической концепции *рационально функционирующего* (или, как обычно принято говорить, *эффективного*) *рынка*, основная начальная цель которой в том и состояла, чтобы найти аргументацию в защиту применения *вероятностной* идеологии, и, в ее рамках, к естественности *гипотезы случайного блуждания* и более общей *гипотезы мартингальности*.

С *наглядной* точки зрения "эффективность" здесь означает то, что рынок *рационально* реагирует на обновление "информации" – под этим подразумевается, что на рынке:

1) *мгновенно производится коррекция цен*, которые устанавливаются так, что оказываются в состоянии "равновесия", становятся "справедливыми", не оставляя места участникам рынка для арбитражных возможностей – получения прибыли за счет разницы в ценах;
2) *участники* рынка (трейдеры, инвесторы, ...) *однородно* интерпретируют поступающую информацию, при этом *мгновенно корректируют свои решения* при обновлении этой информации;
3) участники рынка *однородны* в своих целевых установках, их действия носят "коллективно-рациональный" характер.

С *формальной* же точки зрения понятие эффективности должно рассматриваться по отношению и в зависимости от характера получаемой рынком и его участниками *информации*.

Принято различать следующие *три* вида доступной информации:

1° информация, содержащаяся в *прошлых* значениях цен;
2° информация, содержащаяся не только в прошлых значениях цен, но и в *публично доступных источниках* (газеты, бюллетени, телевидение, ...);
3° вся *мыслимая* информация.

Для уточнения используемого здесь понятия "информация" будем исходить из того, что "неопределенность", возникающая на рынке, может быть описана (несколько подробнее об этом см. § 1а в гл. II) как "случайность" в рамках *некоторого* вероятностного пространства $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$. Как обычно, здесь

$\Omega = \{\omega\}$ – *пространство исходов, или пространство элементарных событий*,

$\mathscr{F}$ – *σ-алгебра подмножеств* Ω,

P – *вероятностная мера на* $(\Omega, \mathscr{F})$.

Полезно дополнить вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ *потоком* (*фильтрацией*) $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$, состоящим из σ-подалгебр $\mathscr{F}_n$ таких, что $\mathscr{F}_m \subseteq \mathscr{F}_n \subseteq \mathscr{F}$, если $m \leqslant n$.

События из $\mathscr{F}_n$ мы интерпретируем как "*информацию*", доступную наблюдению до момента времени n (включительно).

4. Замечание. В связи с понятием "события", наблюдаемого до момента времени n и формально являющегося множеством из $\mathscr{F}_n$, отметим следующее обстоятельство.

В экспериментальной деятельности (в том числе, и при наблюдении за ценами) мы обычно интересуемся не столько тем, какой *конкретный* исход имеет место, а тем, принадлежит ли исход тому или иному *подмножеству* всех исходов.

Те множества $A \subseteq \Omega$, для которых по условиям эксперимента (по состоянию рынка, применительно к рассматриваемой ситуации) возможен ответ одного из двух типов: "исход $\omega \in A$" или "исход $\omega \notin A$", объявляются (наблюдаемыми) событиями. Так, если $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, где значение $\omega_i = +1$ интерпретируется как "поднятие" цены в момент i, а $\omega_i = -1$ – как "опускание" цены в этот момент, то пространство всех мыслимых исходов (в этой трехшаговой модели) состоит из восьми точек

$$\Omega = \{(-1,-1,-1), (-1,-1,+1), \ldots, (+1,+1,+1)\}.$$

Если у нас имеется возможность регистрации *всех* значений $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, то, скажем, множество

$$A = \{(-1,+1,-1), (+1,-1,+1)\}$$

будет "событием", поскольку, имея у $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ зарегистрированные все три значения $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, мы можем достоверным образом сказать "$\omega \in A$" или "$\omega \notin A$".

Если же, однако, мы не имеем возможности фиксировать в момент $i = 2$ результат ω_2, т. е. нет "информации" об этом значении, то тогда множество A уже не будет "событием", поскольку мы, имея только ω_1 и ω_3, не можем ответить на вопрос о том, будет ли $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ принадлежать или не принадлежать множеству A.

5. Пространства $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F} = (\mathscr{F}_n), \mathsf{P})$ с выделенными потоками σ-алгебр $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_n)$ в стохастическом исчислении принято называть *фильтрованными* вероятностными пространствами. В контексте финансовой математики мы будем называть $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_n)$ также *потоком информации*. С помощью этого понятия разные формы *эффективности* рынков можно определить так.

Пусть на $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ выделены три потока σ-алгебр

$$\mathbb{F}^1 = (\mathscr{F}_n^1), \quad \mathbb{F}^2 = (\mathscr{F}_n^2), \quad \mathbb{F}^3 = (\mathscr{F}_n^3),$$

где $\mathscr{F}_n^1 \subseteq \mathscr{F}_n^2 \subseteq \mathscr{F}_n^3$ и каждая из σ-алгебр $\mathscr{F}_n^i$ интерпретируется как информация вида (i) в момент времени n.

Следуя Е. Фама (E. Fama, [150], 1965), будем говорить, что рынок является *слабо эффективным* (*weakly efficient*), если каждая из цен $S = (S_n)$ (финансового инструмента на этом рынке) такова, что для всех них найдется некоторая нормирующая цена $B = (B_n)_{n\geqslant 0}$ (обычно это безрисковый банковский счет) и вероятностная мера $\widehat{\mathsf{P}}$, локально эквивалентная P (т. е. такая, что ее сужения $\widehat{\mathsf{P}}_n = \widehat{\mathsf{P}} \,|\, \mathscr{F}_n^1$ на $\mathscr{F}_n^1$ эквивалентны $\mathsf{P}_n = \mathsf{P} \,|\, \mathscr{F}_n$ для каждого $n \geqslant 0$), такие, что

$$\frac{S}{B} = \left(\frac{S_n}{B_n}\right)_{n\geqslant 0}$$

являются $\widehat{\mathsf{P}}$-*мартингалами*: $\dfrac{S_n}{B_n}$ – $\mathscr{F}_n^1$-измеримы и

$$\widehat{\mathsf{E}}\left|\frac{S_n}{B_n}\right| < \infty, \quad \widehat{\mathsf{E}}\left(\frac{S_{n+1}}{B_{n+1}} \,\Big|\, \mathscr{F}_n\right) = \frac{S_n}{B_n}, \qquad n \geqslant 0.$$

В случае "мартингальности" $\dfrac{S}{B}$ относительно потока информации $\mathbb{F}^3 = (\mathscr{F}_n^3)$ говорят о *строгой эффективности* рынка (strongly efficient market), а в случае потока $\mathbb{F}^2 = (\mathscr{F}_n^2)$ – о *полустрогой эффективности* (semi-strongly efficient market).

Для простоты последующего в этом разделе изложения будем считать, что $B_n \equiv 1$ и $\widehat{\mathsf{P}} = \mathsf{P}$.

Прежде чем обсуждать данные определения, заметим, что между классами мартингалов $\mathscr{M}^1 = \mathscr{M}(\mathbb{F}^1)$, $\mathscr{M}^2 = \mathscr{M}(\mathbb{F}^2)$ и $\mathscr{M}^3 = \mathscr{M}(\mathbb{F}^3)$ относительно потоков $\mathbb{F}^1$, $\mathbb{F}^2$ и $\mathbb{F}^3$ соответственно, имеют место следующие соотношения:

$$\mathscr{M}^3 \subseteq \mathscr{M}^2 \subseteq \mathscr{M}^1.$$

Действительно, если цена $S = (S_n)_{n\geqslant 0} \in \mathscr{M}^2$, то это означает, что S_n – $\mathscr{F}_n^2$-измеримы и $\mathsf{E}(S_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n^2) = S_n$. Отсюда, используя "телескопическое" свойство условных математических ожиданий

$$\mathsf{E}(S_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n^1) = \mathsf{E}\big(\mathsf{E}(S_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n^2) \,|\, \mathscr{F}_n^1\big)$$

и учитывая, что S_n – $\mathscr{F}_n^1$-измеримы (напомним, что $\mathscr{F}_n^1$ порождается значениями *всех* цен до момента n, включая и значения S_k, $k \leqslant n$), находим, что $\mathsf{E}(S_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n^1) = S_n$, т. е. $S \in \mathscr{M}^1$.

Если $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – последовательность *независимых* случайных величин с $\mathsf{E}|\xi_k| < \infty$, $\mathsf{E}\xi_k = 0$, $k \geqslant 1$, $\mathscr{F}_n^\xi = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\mathscr{F}_0^\xi = \{\varnothing, \Omega\}$ и $\mathscr{F}_n^\xi \subseteq \mathscr{F}_n^1$, то последовательность $S = (S_n)_{n\geqslant 0}$ с $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, $n \geqslant 1$, $S_0 = 0$, будет, очевидно, мартингалом относительно $\mathscr{F}^\xi = (\mathscr{F}_n^\xi)_{n\geqslant 0}$ и

$$\mathsf{E}(S_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n^i) = S_n + \mathsf{E}(\xi_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n^i), \qquad i = 1, 2, 3.$$

Отсюда ясно, что последовательность $S = (S_n)_{n\geqslant 0}$ является мартингалом класса $\mathscr{M}^i$, если для каждого n величины ξ_{n+1} не зависят от $\mathscr{F}_n^i$ (в том смысле, что для любого борелевского множества A событие $\{\xi_{n+1} \in A\}$ не зависит от любого из событий из $\mathscr{F}_n^i$). Так что, если ξ_{n+1} рассматривается как "полностью новая информация" по отношению к $\mathscr{F}_n^3$, то S будет принадлежать классу $\mathscr{M}^3$.

Для дальнейшего важно отметить, что если $X = (X_n)$ является мартингалом относительно потока $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_n)$, $X_n = x_1 + \cdots + x_n$, $x_0 = 0$, то $x = (x_n)$ является *мартингал-разностью*:

$$x_n \text{ – } \mathscr{F}_n\text{-измеримы},$$
$$\mathsf{E}|x_n| < \infty,$$
$$\mathsf{E}(x_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) = 0.$$

Из последнего свойства следует, что в предположении $\mathsf{E}|x_n|^2 < \infty$, $n \geqslant 1$, для любых $n \geqslant 0$ и $k \geqslant 1$

$$\mathsf{E}\, x_n x_{n+k} = 0,$$

т. е. величины $x = (x_n)$ являются *некоррелированными*. Иначе говоря, *квадратично интегрируемые* мартингалы принадлежат классу случайных последовательностей с *ортогональными приращениями*:

$$\mathsf{E}\, \Delta X_n \Delta X_{n+k} = 0,$$

где $\Delta X_n \equiv X_n - X_{n-1} = x_n$, $\Delta X_{n+k} = x_{n+k}$. Обозначая класс таких последовательностей OI_2 (orthogonal increments, нижний индекс "2" отвечает "квадратичной интегрируемости"), получаем

$$\mathscr{M}_2^3 \subseteq \mathscr{M}_2^3 \subseteq \mathscr{M}_2^1 \subseteq OI_2.$$

Из всего сказанного следует, что, в конечном счете, *эффективность* рынка надо понимать просто как *мартингальность* цен его активов. Частным случаем такого рынка является рынок, где цены ведут себя как *случайное блуждание*[5].

6. Почему гипотеза "мартингальности", обобщающая гипотезу "случайного блуждания" и заложенная в концепцию "эффективного рынка", является вполне естественной? На этот счет имеется несколько причин, и, пожалуй, наилучшее объяснение дается в рамках *теории безарбитражных рынков*, в которой *эффективность* рынка, или, более определенно, его *рациональность*, просто ассоциируется с отсутствием арбитражных возможностей, что, как будет видно из дальнейшего, самым непосредственным образом приводит к появлению мартингалов. (См. об этом подробнее далее в § 2а, гл. V.)

Сейчас же, чтобы дать некоторое представление о том, как в рассматриваемом контексте возникают мартингалы, приведем следующие элементарные рассуждения.

Пусть $S = (S_n)_{n\geqslant 1}$, S_n – цена, скажем, акции в момент времени n. Обозначим ($\Delta S_n \equiv S_n - S_{n-1}$)

$$\rho_n = \frac{\Delta S_n}{S_{n-1}}, \quad n \geqslant 1,$$

– относительное изменение цен, называемое также *процентной ставкой*, и предположим, что рынок функционирует так, что относительно потока доступной информации $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_n)$ величины S_n – $\mathscr{F}_n$-измеримы и (P-п.н.)

$$\mathsf{E}(\rho_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) = r, \tag{1}$$

где r – некоторая константа. Из двух последних формул находим, что

$$S_n = (1+\rho_n)S_{n-1} \tag{2}$$

и (в предположении $1 + r \neq 0$)

$$S_{n-1} = \frac{\mathsf{E}(S_n \mid \mathscr{F}_{n-1})}{1+r}. \tag{3}$$

[5] В вероятностно-статистической литературе "случайным блужданием" обычно принято называть блуждание, описываемое суммой *независимых* случайных величин. В экономической же литературе этот термин иногда используется и в другом смысле – просто тогда, когда надо подчеркнуть *случайный* характер, скажем, движения цен.

Мы предположили, что цены акций $S = (S_n)_{n\geqslant 0}$ эволюционируют так, что

$$\Delta S_n = \rho_n S_{n-1}, \quad n \geqslant 1.$$

Будем считать, что наряду с акцией имеется также *банковский счет* $B = (B_n)_{n\geqslant 0}$ такой, что

$$\Delta B_n = rB_{n-1}, \quad n \geqslant 1, \tag{4}$$

где r – процентная ставка, $r \geqslant 0$, $B_0 > 0$.

Поскольку $B_n = B_0(1+r)^n$, то из (3) найдем, что

$$\frac{S_{n-1}}{B_{n-1}} = \mathsf{E}\left(\frac{S_n}{B_n} \,\Big|\, \mathscr{F}_{n-1}\right).$$

А это и означает, что последовательность $\left(\dfrac{S_n}{B_n}\right)_{n\geqslant 1}$ относительно потока $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 1}$ является *мартингалом*.

Сделанное выше допущение $\mathsf{E}(\rho_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) = r$ (P-п.н.) представляется с "экономической точки зрения" весьма естественным – если оно нарушается, скажем, в том смысле, что $\mathsf{E}(\rho_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) > r$ (P-п.н.) или $\mathsf{E}(\rho_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) < r$ (P-п.н.), $n \geqslant 1$, то инвесторы быстро бы обнаружили, что более выгодно только инвестирование в акции в первом случае и только размещение средств на банковском счете во втором случае. По другому можно сказать, что в том случае, когда одна ценная бумага "доминирует" другую, то менее ценная бумага должна быстро исчезнуть с рынка, что и отвечает представлению о "правильно", "эффективно" устроенном рынке.

7. Теперь несколько усложним рассмотренную модель (2) эволюции цен акций.

Если считать, что в момент $n-1$ Вы *покупаете* акцию стоимостью S_{n-1} и в момент n ее *продаете* (по цене S_n), то Ваш (абсолютный) "доход", который может быть как положительным, так и отрицательным, будет равен $\Delta S_n \equiv S_n - S_{n-1}$. Более реалистично "доход" измерять, конечно, не в абсолютных величинах ΔS_n, а (как это уже было сделано) в относительных $\left(\dfrac{\Delta S_n}{S_{n-1}}\right)$, т. е. соизмерять ΔS_n с затратами S_{n-1} на покупку акции.

Если, скажем, $S_{n-1} = 20$, а $S_n = 29$, то $\Delta S_n = 9$ и это по отношению к 20 не так уж и мало. Но если $S_{n-1} = 200$, а $S_n = 209$, то приращение $\Delta S_n = 9$ и по отношению к 200 – это не так уж и много.

Тем самым, в первом случае $\rho_n = 9/20$ (= 45%), а во втором $\rho_n = 9/200$ (= 4.5%).

Для простоты выражений эту величину *относительного дохода* (наряду с уже использованным наименованием "процентная ставка", или "случайная процентная ставка") часто называют *возвратом* (return) или *коэффициентом прироста*. Этой терминологии мы также будем в дальнейшем придерживаться.

В соответствии с данной интерпретацией приращения $\Delta S_n = S_n - S_{n-1}$ как дохода от покупки (в момент $n-1$) и продажи (в момент n) предположим также, что есть *дополнительный источник дохода*, например, дивиденды от обладания акциями, которые в момент n будем считать $\mathscr{F}_n$-измеримыми и равными δ_n.

Тогда суммарный "абсолютный" доход будет равен $\Delta S_n + \delta_n$, а относительная величина дохода равна

$$\rho_n = \frac{\Delta S_n + \delta_n}{S_{n-1}}. \tag{5}$$

Интересно, конечно, было бы получить некоторые представления о том, как могут вести себя цены (S_n) "глобально", если их "локальное" поведение описывается моделью (5). Понятно, что для решения этого вопроса надо сделать определенные допущения относительно величин (ρ_n) и (δ_n).

Имея это в виду, допустим, например, что при всех $n \geqslant 1$

$$\mathsf{E}(\rho_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) \equiv r \geqslant 0.$$

Тогда из (5), предполагая, что $\mathsf{E}|S_n| < \infty$, $\mathsf{E}|\delta_n| < \infty$, и беря условное математическое ожидание $\mathsf{E}(\cdot \,|\, \mathscr{F}_{n-1})$, находим, что

$$S_{n-1} = \frac{1}{1+r}\mathsf{E}(S_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) + \frac{1}{1+r}\mathsf{E}(\delta_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}). \tag{6}$$

Аналогичным образом,

$$S_n = \frac{1}{1+r}\mathsf{E}(S_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n) + \frac{1}{1+r}\mathsf{E}(\delta_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n),$$

что с учетом (6) приводит к равенству

$$\begin{aligned} S_{n-1} = {} & \frac{1}{(1+r)^2}\mathsf{E}(S_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) \\ & + \frac{1}{(1+r)^2}\mathsf{E}(\delta_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) + \frac{1}{1+r}\mathsf{E}(\delta_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}). \end{aligned}$$

Продолжая эту процедуру, находим, что для любого $k \geqslant 1$ и любого $n \geqslant 1$

$$S_n = \frac{1}{(1+r)^k}\mathsf{E}(S_{n+k} \,|\, \mathscr{F}_n) + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(1+r)^i}\mathsf{E}(\delta_{n+i} \,|\, \mathscr{F}_n). \tag{7}$$

Отсюда становится понятным, что всякое *ограниченное* ($|S_n| \leqslant \mathrm{Const}$, $n \geqslant 1$) решение уравнений (6) (для $n \geqslant 1$) имеет (в предположении $|\mathsf{E}(\delta_{n+i} \,|\, \mathscr{F}_n)| \leqslant \mathrm{Const}$, $n \geqslant 0$, $i \geqslant 1$) следующий вид:

$$S_n = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^i}\mathsf{E}(\delta_{n+i} \,|\, \mathscr{F}_n). \tag{8}$$

Это решение в экономической литературе именуют *фундаментальным решением* (market fundamental solution; см., например, [211]). В том частном случае, когда дивиденды не меняются со временем ($\delta_n \equiv \delta = \mathrm{Const}$) и $\mathsf{E}(\rho_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) \equiv r > 0$, из (8) следует, что (ограниченные) цены S_n, $n \geqslant 1$, также не могут меняться со временем:

$$S_n \equiv \frac{\delta}{r}, \qquad n \geqslant 1.$$

8. Класс мартингалов достаточно широк. Он включает, например, и рассмотренное выше "случайное блуждание". Далее, свойство мартингальности

$$\mathsf{E}(X_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n) = X_n$$

говорит о том, что максимум того, что можно сказать о *прогнозе* приращения $\Delta X_n = X_{n+1} - X_n$ на основании "информации" $\mathscr{F}_n$, – это только то, что *в среднем* (относительно $\mathscr{F}_n$) *это приращение равно нулю*. Это обстоятельство отвечает интуитивному представлению о том, что на "справедливом", "честно организованном" рынке не может быть (с положительной вероятностью) выигрыша у одних и проигрыша у других. На таком рынке условный выигрыш $\mathsf{E}(\Delta X_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1})$ должен быть равен нулю. Именно в этой связи Л. Башелье писал (в английском переводе): "The mathematical expectation of the speculator is zero". (Напомним, что в игровой практике система игры, заключающаяся в удвоении ставки при проигрыше и прекращении игры при первом выигрыше, называется *мартингалом* и для нее условный выигрыш $\mathsf{E}(\Delta X_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) = 0$; подробнее см. [439; гл. VII, § 1].)

Наконец, отметим, что эмпирический анализ эволюции цен показывает (см. § 3с, гл. IV), что автокорреляция величин

$$h_n = \ln \frac{S_n}{S_{n-1}}, \quad n \geqslant 1,$$

близка к нулю, что можно рассматривать как подтверждение, хотя и косвенное, гипотезы мартингальности.

9. Гипотеза эффективного рынка дала толчок к появлению новых финансовых инструментов, устраивающих "осторожных" инвесторов, которые являются приверженцами идей диверсификации (см. § 2b).

К числу таких новых финансовых инструментов надо отнести, в первую очередь, одну из разновидностей "Фондов взаимных вложений" ("Mutual Funds") – так называемые "Index Funds".

Специфика этих фондов состоит в том, что они инвестируют средства (своих клиентов) в акции тех компаний, которые указаны в том или ином "Индексе" акций.

Одним из первых таких фондов был (и есть) "The Vanguard Index Trust-500 Portfolio", созданный в 1976 г. Vanguard Group (США) и оперирующий акциями (покупая и продавая их) тех компаний, которые учитываются в индексе Standard & Poor's-500, составленном по ценам акций 500 компаний (400 индустриальных, 20 транспортных, 40 потребительских и 40 финансовых).

Гипотеза эффективного рынка говорит о том, что изменение цен, а значит, и изменение финансовых решений, происходит (и к тому же достаточно быстро) тогда, когда обновляется *информация*. Обычные же "рядовые" инвесторы (будь-то индивидуумы или организации) не располагают достаточной информацией и обычно не могут быстро реагировать на изменение цен. К тому же операционные издержки *индивидуального* трейдинга, как правило, таковы, что они "съедают" возможную прибыль.

В этом смысле инвестирование в "Index Funds" привлекательно именно для тех "недостаточно информированных" инвесторов, которые не рассчитывают на получение "быстрых" и "больших" прибылей, а предпочитают (осторожное) вложение средств в хорошо диверсифицированные ценные бумаги долгосрочного действия.

Другими примерами аналогичных фондов (в том числе и по бонам) в США являются: "The Extended Market Portfolio", "The Vanguard Small Capitalization Stock Fund", "The Vanguard Bond Market Fund", международные фонды – "The European Portfolio", "The Pacific Portfolio", ...

§ 2b. Портфель ценных бумаг. Диверсификация Марковитца

1. Как уже было отмечено в § 2a, работа Г. Марковитца [332] 1952 года сыграла определяющую роль в становлении современной теории и практики финансового менеджмента, финансовой инженерии. В теории Марковитца для инвесторов особенно привлекательной оказалась идея *диверсификации* (diversification) в составлении *портфеля* (portfolio) *ценных бумаг*, поскольку она не только объясняла принципиальную возможность *редуцирования* (несистематического, см. с. 44) *риска* инвестирования, но и давала практические рекомендации того, как это делать.[6)]

Для пояснения основных положений и идей этой теории рассмотрим следующую *одношаговую* задачу инвестирования.

Пусть инвестор имеет возможность свой начальный капитал x разместить по акциям $A_1, \dots, A_N$, стоимость которых в момент $n = 0$ равна соответственно $S_0(A_1), \dots, S_0(A_N)$.

Пусть $X_0(b) = b_1 S_0(A_1) + \dots + b_N S_0(A_N)$, где $b_i \geqslant 0$, $i = 1, \dots, N$. Иначе говоря, пусть

$$b = (b_1, \dots, b_N)$$

есть *портфель ценных бумаг*, где b_i – "число" акций A_i стоимостью $S_0(A_i)$.

Будем предполагать, что эволюция каждой акции A_i определяется тем, что ее цена $S_1(A_i)$ в момент $n = 1$ подчиняется разностному уравнению

$$\Delta S_1(A_i) = \rho(A_i) S_0(A_i),$$

или, равносильно,

$$S_1(A_i) = \bigl(1 + \rho(A_i)\bigr) S_0(A_i),$$

где $\rho(A_i)$ – случайная процентная ставка акции A_i, $\rho(A_i) > -1$.

Если инвестор выбрал портфель $b = (b_1, \dots, b_N)$, то его начальный капитал $X_0(b) = x$ превратится в

$$X_1(b) = b_1 S_1(A_1) + \dots + b_N S_1(A_N),$$

---

6) Толковый словарь по бизнесу [65] дает такие определения:

Диверсификация – включение в портфель инвестиций ценных бумаг широкого круга компаний с целью избежания серьезных потерь в случае спада, охватившего лишь один из секторов экономики.

Портфель ценных бумаг – список ценных бумаг, находящихся в собственности физического или юридического лица.

который желательно сделать "побольше". Это желание, однако, должно рассматриваться с учетом "риска", связанного с получением "большого" дохода.

С этой целью Г. Марковитц рассматривает две характеристики капитала $X_1(b)$:

$$\mathsf{E}X_1(b) \ - \ \textit{математическое ожидание}$$

и

$$\mathsf{D}X_1(b) \ - \ \textit{дисперсию}.$$

Имея эти две характеристики, можно по-разному формулировать оптимизационную задачу выбора наилучшего портфеля в зависимости от критерия оптимальности.

Можно, например, задаться вопросом о том, на каком портфеле b^* достигается максимум некоторой целевой функции $f = f\big(\mathsf{E}X_1(b), \mathsf{D}X_1(b)\big)$ при "бюджетном ограничении" на класс допустимых портфелей:

$$B(x) = \big\{b = (b_1, \ldots, b_N) \colon b_i \geqslant 0,\ X_0(b) = x\big\}, \qquad x > 0.$$

Естественна и следующая *вариационная* постановка: найти

$$\inf \mathsf{D}X_1(b)$$

в предположении, что inf берется по тем портфелям b, для которых выполнены ограничения

$$b \in B(x),$$
$$\mathsf{E}X_1(b) = m,$$

где m – некоторая константа.

Нижеследующий рисунок иллюстрирует типичную картину множества точек $\big(\mathsf{E}X_1(b), \sqrt{\mathsf{D}X_1(b)}\,\big)$, когда $b \in B(x)$ и, возможно, имеются еще дополнительные ограничения на b.

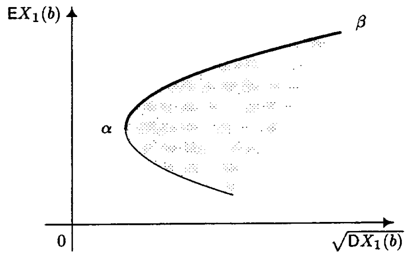


Рис. 8. Иллюстрация к средне-дисперсионному анализу (mean-variance analysis) Марковитца

Из этого рисунка становится понятным, что если Вы интересуетесь *максимальным средним значением* капитала при *минимуме дисперсии*, то следует выбирать те портфели, для которых $\big(\mathsf{E}X_1(b), \sqrt{\mathsf{D}X_1(b)}\,\big)$ расположены на выделенной кривой с "начальной" и "концевой" точками α и β. (Г. Марковитц называет эти портфели *эффективными*, а весь проведенный анализ, оперирующий со средними и дисперсиями, – "mean-variance analysis".)

2. Покажем теперь, что в *одношаговой* задаче оптимизации портфеля ценных бумаг можно вместо величин $\big(S_1(A_1), \ldots, S_1(A_N)\big)$ оперировать непосредственно с процентными ставками $\big(\rho(A_1), \ldots, \rho(A_N)\big)$, подразумевая под этим следующее.

Пусть $b \in B(x)$, т.е. $x = b_1 S_0(A_1) + \cdots + b_N S_0(A_N)$. Введем величины $d = (d_1, \ldots, d_N)$, полагая

$$d_i = \frac{b_i S_0(A_i)}{x}.$$

Поскольку $b \in B(x)$, то $d_i \geqslant 0$ и $\sum_{i=1}^{N} d_i = 1$. Представим капитал $X_1(b)$ в виде

$$X_1(b) = \big(1 + R(b)\big) X_0(b),$$

и пусть

$$\rho(d) = d_1 \rho(A_1) + \cdots + d_N \rho(A_N).$$

Ясно, что

$$R(b) = \frac{X_1(b)}{X_0(b)} - 1 = \frac{X_1(b)}{x} - 1 = \frac{\sum b_i S_1(A_i)}{x} - 1$$
$$= \sum d_i \frac{S_1(A_i)}{S_0(A_i)} - 1 = \sum d_i \left(\frac{S_1(A_i)}{S_0(A_i)} - 1\right)$$
$$= \sum d_i \rho(A_i) = \rho(d).$$

Итак,

$$R(b) = \rho(d),$$

откуда следует, что если $d = (d_1, \dots, d_N)$ и $b = (b_1, \dots, b_N)$ связаны соотношениями $d_i = \dfrac{b_i S_0(A_i)}{x}$, $i = 1, \dots, N$, то для $b \in B(x)$

$$X_1(b) = x\big(1 + \rho(d)\big),$$

и, следовательно, с точки зрения оптимизационных задач для $X_1(b)$ можно оперировать с соответствующими задачами для $\rho(d)$.

3. Обратимся теперь к вопросу о том, как *диверсификацией* можно добиваться сколь угодно малого (несистематического) риска, измеряемого дисперсией или стандартным отклонением величин $X_1(b)$.

С этой целью рассмотрим для начала пару случайных величин ξ_1 и ξ_2 с конечными вторыми моментами. Тогда, если c_1 и c_2 – константы, $\sigma_i = \sqrt{\mathsf{D}\xi_i}$, $i = 1, 2$, то

$$\mathsf{D}(c_1\xi_1 + c_2\xi_2) = (c_1\sigma_1 - c_2\sigma_2)^2 + 2c_1c_2\sigma_1\sigma_2(1 + \sigma_{12}),$$

где $\sigma_{12} = \dfrac{\mathsf{Cov}(\xi_1, \xi_2)}{\sigma_1\,\sigma_2}$, $\mathsf{Cov}(\xi_1, \xi_2) = \mathsf{E}\xi_1\xi_2 - \mathsf{E}\xi_1 \cdot \mathsf{E}\xi_2$. Отсюда ясно, что если $c_1\sigma_1 = c_2\sigma_2$ и $\sigma_{12} = -1$, то $\mathsf{D}(c_1\xi_1 + c_2\xi_2) = 0$.

Таким образом, если величины ξ_1 и ξ_2 *отрицательно* коррелированы с коэффициентом корреляции $\sigma_{12} = -1$, то подбором констант c_1 и c_2 так, чтобы $c_1\sigma_1 = c_2\sigma_2$, получаем комбинацию $c_1\xi_1 + c_2\xi_2$ *с нулевой* дисперсией. Но, конечно, при этом среднее значение $\mathsf{E}(c_1\xi_1 + c_2\xi_2)$ может оказаться достаточно малым. (Случай $c_1 = c_2 = 0$ для задачи оптимизации не интересен в силу условия $b \in B(x)$.)

Из этих элементарных рассуждений ясно, что при заданных ограничениях на (c_1, c_2) и класс величин (ξ_1, ξ_2) при решении задачи о том, чтобы сделать $\mathsf{E}(c_1\xi_1 + c_2\xi_2)$ "побольше", а $\mathsf{D}(c_1\xi_1 + c_2\xi_2)$ "поменьше", надо стремиться к выбору таких пар (ξ_1, ξ_2), для которых их ковариация была бы как можно ближе к минус единице.

Изложенный эффект *отрицательной коррелированности*, называемый также *эффектом Марковитца*, является одной из основных идей диверсификации при инвестировании – *при составлении портфеля ценных бумаг надо стремиться к тому, чтобы вложения делались в бумаги, среди которых, по возможности, много отрицательно коррелированных.*

Другая идея, лежащая в основе диверсификации, основана на следующем соображении.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ – последовательность *некоррелированных* случайных величин с дисперсиями $\mathsf{D}\xi_i \leqslant C$, $i = 1, \dots, N$, где C – некоторая константа. Тогда

$$\mathsf{D}(d_1\xi_1 + \dots + d_N\xi_N) = \sum_{i=1}^N d_i^2\, \mathsf{D}\xi_i \leqslant C \sum_{i=1}^N d_i^2.$$

Поэтому, беря, например, $d_i = 1/N$, находим, что

$$\mathsf{D}(d_1\xi_1 + \dots + d_N\xi_N) \leqslant \frac{C}{N} \to 0, \qquad N \to \infty.$$

Этот *эффект некоррелированности* говорит о том, что если инвестирование производится в некоррелированные ценные бумаги, то для уменьшения риска, т. е. дисперсии $\mathsf{D}(d_1\xi_1 + \dots + d_N\xi_N)$, надо, по возможности, брать их число N *как можно большим.*

Вернемся к вопросу о дисперсии $\mathsf{D}\rho(d)$ величины

$$\rho(d) = d_1\rho(A_1) + \dots + d_N\rho(A_N).$$

Имеем

$$\mathsf{D}\rho(d) = \sum_{i=1}^N d_i^2 \mathsf{D}\rho(A_i) + \sum_{\substack{i,j=1,\\ i\neq j}}^N d_i d_j\, \mathsf{Cov}\big(\rho(A_i), \rho(A_j)\big).$$

Возьмем здесь $d_i = 1/N$. Тогда

$$\sum_{i=1}^N d_i^2 \mathsf{D}\rho(A_i) = \left(\frac{1}{N}\right)^2 \cdot N \cdot \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \mathsf{D}\rho(A_i) = \frac{1}{N}\cdot \overline{\sigma}_N^2,$$

где $\overline{\sigma}_N^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathsf{D}\rho(A_i)$ – средняя дисперсия. Далее,

$$\sum_{\substack{i,j=1,\\ i\neq j}}^{N} d_i d_j \operatorname{Cov}\bigl(\rho(A_i),\rho(A_j)\bigr) = \Bigl(\frac{1}{N}\Bigr)^2 (N^2-N)\cdot\overline{\operatorname{Cov}}_N,$$

где $\overline{\operatorname{Cov}}_N$ есть средняя ковариация:

$$\overline{\operatorname{Cov}}_N = \frac{1}{N^2-N}\sum_{\substack{i,j=1,\\ i\neq j}}^{N} \operatorname{Cov}\bigl(\rho(A_i),\rho(A_j)\bigr).$$

Таким образом,

$$\mathsf{D}\rho(d) = \frac{1}{N}\overline{\sigma}_N^2 + \Bigl(1-\frac{1}{N}\Bigr)\overline{\operatorname{Cov}}_N, \tag{1}$$

и ясно, что если $\overline{\sigma}_N^2 \leqslant C$ и $\overline{\operatorname{Cov}}_N \to \overline{\operatorname{Cov}}$ при $N\to\infty$, то

$$\mathsf{D}\rho(d) \to \overline{\operatorname{Cov}}, \qquad N\to\infty. \tag{2}$$

Из этой формулы мы видим, что если $\overline{\operatorname{Cov}}$ равна нулю, то диверсификацией с достаточно большим N риск инвестирования, т. е. $\mathsf{D}\rho(d)$, может быть сделан сколь угодно малым. К сожалению, если рассматривать, скажем, рынок акций, то на нем, как правило, имеется положительная корреляция в ценах (они движутся довольно-таки согласованно в одном направлении), что приводит к тому, что $\overline{\operatorname{Cov}}_N$ *не* стремится к нулю при $N\to\infty$. Предельное значение $\overline{\operatorname{Cov}}$ и есть тот *систематический*, иначе – *рыночный* – риск, который присущ рассматриваемому рынку и диверсификацией не может быть редуцирован. Первый же член в формуле (1) определяет *несистематический риск*, который может быть редуцирован, как мы видели, выбором большого числа акций. (Подробнее теорию "Mean-variance analysis" см. в [268], [331]–[333].)

§ 2c. Модель ценообразования финансовых активов (*CAPM* – Capital Asset Pricing Model)

1. Средне-дисперсионный анализ ("Mean-variance analysis") для своих расчетов оптимального портфеля требует знания $\mathsf{E}\rho(A_i)$ и $\operatorname{Cov}\bigl(\rho(A_i),\rho(A_j)\bigr)$ и *не дает* объяснения происхождения этих значений. (В реальной практике эти величины оцениваются по прошлым данным обычными *статистическими* средними и ковариациями.)

Теория CAPM (В. Шарп (W. F. Sharpe, [433]), Дж. Линтнер (J. Lintner, [301])) и рассматриваемая далее *теория APT* дают не только ответы на вопросы о значениях величин $\mathsf{E}\rho(A_i)$ и $\operatorname{Cov}\bigl(\rho(A_i),\rho(A_j)\bigr)$, но также и показывают, как величины (случайных) процентных ставок $\rho(A_i)$ отдельных акций A_i зависят от величины процентной ставки ρ "большого" рынка, на котором торгуются A_i. В дополнение к ковариациям $\operatorname{Cov}\bigl(\rho(A_i),\rho(A_j)\bigr)$, играющим ключевую роль в "средне-дисперсионном анализе" Марковитца, теория *CAPM* выявляет важную роль еще одного нового объекта – ковариаций $\operatorname{Cov}\bigl(\rho(A_i),\rho\bigr)$ между процентными ставками акций A рынка и самого рынка.

Теория *CAPM* и ее выводы базируются на концепции *равновесного* рынка, подразумевающего, в частности, что на таком рынке отсутствуют операционные издержки, все его участники (инвесторы) *однородны* в том смысле, что имеют равные возможности оценивания будущего движения цен на основе доступной всем им информации, имеют один и тот же временно́й горизонт, все их решения основываются на средних значениях и ковариациях цен. Предполагается также, что все рассматриваемые активы "безгранично делимы" и что на рынке имеется *безрисковая* ценная бумага (банковский счет, Treasury bills, ...) с процентной ставкой r.

Наличие безрисковой ценной бумаги является ключевым, поскольку именно процентная ставка r входит во все формулы теории *CAPM* в качестве "базовой" переменной, от которой производится отсчет.

В этом смысле полезно отметить, что долгосрочные наблюдения за средними значениями $\mathsf{E}\rho(A_i)$ процентных ставок $\rho(A_i)$ рисковых ценных активов A_i показывают, что $\mathsf{E}\rho(A_i) > r$. Приведенная на следующей странице таблица, составленная по среднегодовым данным, дает сопоставительное представление о номинальных и реальных (с учетом инфляции) средних значениях процентных ставок в США за период 1926–1985 гг.

2. Основные положения теории *CAPM* поясним на примере одноэтапно функционирующего рынка.

Пусть $S_1 = S_0(1+\rho)$ определяет значение (случайной) цены "большого" рынка, скажем, для примера, индекса S&P500 в момент времени $n=1$. Через $S_1(A) = S_0(A)(1+\rho(A))$ обозначаем стоимость актива A в момент $n=1$ с процентной ставкой $\rho(A)$ (A – некоторая акция из S&P500).

Эволюция цены безрискового актива определяется формулой

$$B_1 = B_0(1+r).$$

Таблица

Ценная бумага	Номинальная процентная ставка	Реальное значение процентной ставки с учетом инфляции
Common stocks	12%	8.8%
Corporate bonds	5.1%	2.1%
Government bonds	4.4%	1.4%
Treasury bills	3.5%	0.4%

Теория *CAPM*, опираясь на заложенные в ней концепции *равновесного* рынка, устанавливает (см., например, [268], [433]), что для каждого актива A существует величина $\beta(A)$, называемая *бетой* этого актива[7], такая, что

$$\mathsf{E}[\rho(A) - r] = \beta(A)\mathsf{E}[\rho - r]. \tag{1}$$

При этом

$$\beta(A) = \frac{\mathsf{Cov}(\rho(A), \rho)}{\mathsf{D}\rho}. \tag{2}$$

Иначе говоря, среднее значение "премии" $\rho(A) - r$ (при использовании рискового актива A относительно безрискового актива) *пропорционально* среднему значению *премии* $\rho - r$ (при вложении средств в глобальную характеристику рынка, скажем, в Индекс S&P500).

Формула (2) устанавливает, что значение "беты", т.е. $\beta(A)$, определяется корреляционными свойствами процентных ставок ρ и $\rho(A)$, или, равносильно, ковариационными свойствами соответствующих цен S_1 и $S_1(A)$.

Перепишем соотношение (1) в виде

$$\mathsf{E}\rho(A) = r + \beta(A)\mathsf{E}(\rho - r), \tag{3}$$

и пусть для актива A с бетой $\beta(A) = \beta$ соответствующее значение процентной ставки $\rho(A)$ обозначено ρ_β.

Тогда в случае $\beta = 0$

$$\rho_0 = r,$$

[7]Если уж у актива A есть "бета" $\beta(A)$, то по логике вещей должна быть и "альфа" $\alpha(A)$. Ею ряд авторов (см., например, [267]) называют *среднее* значение $\mathsf{E}\rho(A)$.

а в случае $\beta = 1$

$$\rho_1 = \rho.$$

С учетом этого видим, что (3) есть *уравнение прямой CAPM*:

$$\mathsf{E}\rho_\beta = r + \beta\mathsf{E}(\rho - r), \tag{4}$$

изображенной на рис. 9, и показывающей, как для активов изменяется их средний доход $\mathsf{E}\rho_\beta$ в зависимости от беты β, процентной ставки r и среднего рыночного дохода $\mathsf{E}\rho$.

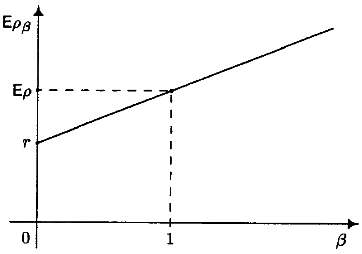


Рис. 9. Прямая *CAPM*

Величина $\beta = \beta(A)$ играет важную роль при составлении портфеля ценных бумаг, являясь "мерой чувствительности", "мерой реакции" актива на изменения на рынке. Для определенности будем считать, что показатель рынка измеряется по индексу S&P500 и что компания A, чью акцию мы сейчас рассматриваем, входит в число пятисот компаний этого индекса. Тогда, если изменение индекса произошло на 1%, а бета акции A равна 1.5, то изменение цены акции A происходит на 1.5% (в среднем).

На практике определение беты активов осуществляется по статистическим данным обычными линейными регрессионными методами, вытекающими из линейности соотношения (3).

3. Образуем для актива A величину

$$\eta(A) = \big(\rho(A) - \mathsf{E}\rho(A)\big) - \frac{\mathsf{Cov}(\rho(A), \rho)}{\mathsf{D}\rho}(\rho - \mathsf{E}\rho).$$

Ясно, что $\mathsf{E}\eta(A) = 0$ и

$$\mathsf{E}\big(\eta(A)(\rho - \mathsf{E}\rho)\big) = 0,$$

т. е. величины $\eta(A)$ и $\rho - \mathsf{E}\rho$, имеющие нулевые средние, являются *некоррелированными*. Следовательно,

$$\rho(A) - \mathsf{E}\rho(A) = \beta(A)(\rho - \mathsf{E}\rho) + \eta(A), \tag{5}$$

что вместе с (3) приводит к следующему соотношению между премиями $\rho(A) - r$ и $\rho - r$:

$$\rho(A) - r = \beta(A)(\rho - r) + \eta(A), \tag{6}$$

показывающему, что премия $(\rho(A) - r)$ актива A слагается из премии рынка $(\rho - r)$, умноженной на бету $\beta(A)$, и величины $\eta(A)$, некоррелированной с $\rho - \mathsf{E}\rho$.

Из (5) мы получаем формулу

$$\mathsf{D}\rho(A) = \beta^2(A)\mathsf{D}\rho + \mathsf{D}\eta(A), \tag{7}$$

говорящую о том, что риск $(\mathsf{D}\rho(A))$ инвестирования в актив A складывается из двух рисков –

систематического риска $\left(\beta^2(A)\mathsf{D}\rho\right)$,

присущего *рынку*, и

несистематического риска $\left(\mathsf{D}\eta(A)\right)$,

присущего непосредственно *активу* A.

Как и в предыдущем параграфе, можно показать, что здесь, в рамках $CAPM$, несистематический риск также редуцируется диверсификацией.

С этой целью предположим, что на "большом" рынке имеется N активов $A_1, \dots, A_N$, для которых соответствующие величины $\eta(A_1), \dots, \eta(A_N)$ некоррелированны: $\mathrm{Cov}(\eta(A_i), \eta(A_j)) = 0$, $i \neq j$.

Пусть $d = (d_1, \dots, d_N)$ – портфель ценных бумаг с $d_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{N} d_i = 1$, и

$$\rho(d) = d_1 \cdot \rho(A_1) + \dots + d_N \cdot \rho(A_N).$$

В силу того, что

$$\rho(A_i) - r = \beta(A_i)\left[\rho - r\right] + \eta(A_i),$$

имеем

$$\rho(d) - r = \sum_{i=1}^{N} d_i \beta(A_i)\left[\rho - r\right] + \sum_{i=1}^{N} d_i \eta(A_i).$$

Поэтому, полагая

$$\beta(d) = \sum_{i=1}^{N} d_i \beta(A_i) \quad \text{и} \quad \eta(d) = \sum_{i=1}^{N} d_i \eta(A_i),$$

находим (ср. с (6)), что

$$\rho(d) - r = \beta(d)(\rho - r) + \eta(d).$$

Значит, как и в предыдущем параграфе

$$\mathsf{D}\rho(d) = \beta^2(d)\mathsf{D}\rho + \mathsf{D}\eta(d),$$

где $\mathsf{D}\eta(d) = \sum_{i=1}^{N} d_i^2 \mathsf{D}\eta(A_i) \leqslant \dfrac{C}{N} \to 0$, $N \to \infty$, если $\mathsf{D}\eta(A_i) \leqslant C$ и $d_i = \dfrac{1}{N}$.

§ 2d. Арбитражная теория расчетов (APT – Arbitrage Pricing Theory)

1. В теории $CAPM$ главный акцент сделан на то, ка́к на рынке, находящемся в определенном *равновесии*, индивидуальный доход актива зависит от дохода "большого" рынка, на котором действует этот актив (см. (1) в § 2c), и каков риск его получения. При этом (см. в предыдущем параграфе формулу (6)) *доход* (процентная ставка, возврат) $\rho(A)$ актива A определяется формулой

$$\rho(A) = r + \beta(A)(\rho - r) + \eta(A). \tag{1}$$

Более современная теория "риска и возврата" – *Теория* APT (Arbitrage Pricing Theory; С. Росс (S. A. Ross, [412]), Р. Ролл и С. Росс (R. Roll and S. A. Ross, [410])) исходит из *многофакторной* модели, считая, что величина $\rho(A)$ актива A зависит от некоторого количества случайных факторов $f_1, \dots, f_q$ (их значения могут быть самыми разными – цена на нефть, процентная ставка, ...) и "шумового" члена $\zeta(A)$:

$$\rho(A) = a_0(A) + a_1(A) f_1 + \dots + a_q(A) f_q + \zeta(A). \tag{2}$$

При этом $\mathsf{E} f_i = 0$, $\mathsf{D} f_i = 1$, $\mathrm{Cov}(f_i, f_j) = 0$, $i \neq j$; "шумовой" член $\zeta(A)$ имеет $\mathsf{E}\zeta(A) = 0$ и некоррелирован с факторами $f_1, \dots, f_q$ и с "шумовыми" членами других активов.

Из сопоставления (1) и (2) видим, что (1) является частным случаем однофакторной модели с фактором $f_1 = \rho$. В этом смысле APT является обобщением $CAPM$, хотя с точки зрения практических расчетов методология $CAPM$ продолжает оставаться одним из излюбленных приемов при расчетах ценных бумаг, что объясняется ее наглядностью, простотой и традицией оперирования с *бетой* – мерой чувствительности активов к изменениям на рынке.

Один из центральных результатов теории $CAPM$, опирающейся на *концепцию равновесного рынка*, – это формула (1) из предыдущего параграфа для среднего значения "премии" $\mathsf{E}(\rho(A)-r)$, выражаемого через среднее значение премии $\mathsf{E}(\rho - r)$.

Аналогичным образом, центральный результат теории APT, опирающейся на концепцию *отсутствия на рынке асимптотического арбитража*, – это приводимая далее (асимптотическая) формула для среднего значения $\mathsf{E}\rho(A)$ в предположении, что поведение $\rho(A)$ актива A описывается *многофакторной* моделью (2).

Напомним, что $\rho(A)$ – это (случайная) процентная ставка актива A в (рассмотренной выше) *одношаговой* модели $S_1(A) = S_0(A)(1+\rho(A))$.

2. Будем предполагать, что имеется "N-рынок", состоящий из N активов $A_1, \dots, A_N$ и q факторов, причем

$$\rho(A_i) = a_0(A_i) + a_1(A_i) f_1 + \dots + a_q(A_i) f_q + \zeta(A_i),$$

где $\mathsf{E} f_k = 0$, $\mathsf{E}\zeta(A_i) = 0$, ковариация $\mathrm{Cov}(f_k, f_l) = 0$ при $k \neq l$, $\mathsf{D} f_k = 1$, $\mathrm{Cov}(f_k, \zeta(A_i)) = 0$, $\mathrm{Cov}(\zeta(A_i), \zeta(A_j)) = \sigma_{ij}$, $k, l = 1, \dots, q$ и $i, j = 1, \dots, N$.

Рассмотрим некоторый портфель $d = (d_1, \dots, d_N)$. Тогда отвечающий ему "доход"

$$\begin{aligned} \rho(d) &= d_1 \rho(A_i) + \dots + d_N \rho(A_N) \\ &= \sum_{i=1}^N d_i a_{i0} + \Bigl(\sum_{i=1}^N d_i a_{i1}\Bigr) f_1 + \dots \\ &\quad \dots + \Bigl(\sum_{i=1}^N d_i a_{iq}\Bigr) f_q + \sum_{i=1}^N d_i \zeta(A_i), \end{aligned} \tag{3}$$

где $a_{ik} = a_k(A_i)$.

Ниже будет показано, что при некоторых предположениях на коэффициенты a_{ik} многофакторной модели (2) можно найти такой нетривиальный портфель $d = (d_1, \dots, d_N)$, что

$$d_1 + \dots + d_N = 0, \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^N d_i a_{ik} = 0, \qquad k = 1, \dots, q, \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^N d_i a_{i0} = \sum_{i=1}^N d_i^2. \tag{6}$$

Тогда для портфеля $\theta d = (\theta d_1, \dots, \theta d_N)$, где θ – константа,

$$\rho(\theta d) = \theta \rho(d)$$

и, в силу (2)–(6),

$$\rho(\theta d) = \theta \sum_{i=1}^N d_i^2 + \theta \sum_{i=1}^N d_i \zeta(A_i). \tag{7}$$

Поэтому

$$\mu(\theta d) = \mathsf{E}\rho(\theta d) = \theta \sum_{i=1}^N d_i^2,$$

$$\sigma^2(\theta d) = \mathsf{D}\rho(\theta d) = \theta^2 \sum_{i,j=1}^N d_i d_j \sigma_{ij}.$$

Положим

$$\theta = \Bigl(\sum_{i=1}^N d_i^2\Bigr)^{-2/3} \qquad \Bigl(= \|d\|^{-4/3}, \text{ где } \|d\| = \Bigl(\sum_{i=1}^N d_i^2\Bigr)^{1/2}\Bigr). \tag{8}$$

Тогда

$$\mu(\theta d) = \Bigl(\sum_{i=1}^N d_i^2\Bigr)^{1/3}, \tag{9}$$

$$\sigma^2(\theta d) = \frac{\sum_{i,j=1}^N d_i d_j \sigma_{ij}}{\bigl(\sum_{i=1}^N d_i^2\bigr)^{4/3}}. \tag{10}$$

Если предположить (для простоты анализа; по поводу общего случая см., например, [240], [268]), что $\sigma_{ij} = 0$, $i \neq j$, $\sigma_{ii} = 1$, то найдем, что

$$\sigma^2(\theta d) = \left(\sum_{i=1}^{N} d_i^2\right)^{-1/3}. \tag{11}$$

Формулы (9) и (11) являются ключевыми для последующего асимптотического анализа. Из них видно, что если $\sum\limits_{i=1}^{N} d_i^2 \to \infty$ при $N \to \infty$, то $\mu(\theta d) \to \infty$ и $\sigma^2(\theta d) \to 0$. Если к тому же положить $S_0(A_1) = \dots = S_0(A_N) = 1$, то из условия $d_1 + \dots + d_N = 0$ найдем, что *начальный* капитал портфеля θd

$$X_0(\theta d) = \theta(d_1 + \dots + d_N) = 0,$$

а капитал в момент времени $n = 1$

$$X_1(\theta d) = d_1 S_1(A_1) + \dots + d_N S_1(A_N) = \theta\rho(d) = \rho(\theta d).$$

Далее, если $\mathsf{E}X_1(\theta d) = \mu(\theta d) \to \infty$, а $\mathsf{D}X_1(\theta d) \to 0$, $N \to \infty$, то для достаточно большого N с большой вероятностью $X_1(\theta d) \geqslant 0$, причем с положительной вероятностью $X_1(\theta d) > 0$. Иначе говоря, имея *нулевой* начальный капитал и оперируя на "N-рынках" с активами $A_1, \dots, A_N$, $N \geqslant 1$, путем составления соответствующего портфеля можно ("асимптотически") извлечь *положительную прибыль*, что в теории APT, [412], и интерпретируется как *наличие асимптотического арбитража* (ср. также с соответствующими, более поздними, определениями в § 3a, b, c, гл. VI).

Таким образом, считая, что "N-рынки" *асимптотически* (при $N \to \infty$) являются безарбитражными, приходим к заключению, что возможность $\sum\limits_{i=1}^{N} d_i^2 \to \infty$, приводящая к арбитражу, *должна быть исключена*. Это, естественно, накладывает определенные ограничения на коэффициенты многофакторной модели (2), поскольку описываемое далее конструирование портфеля $d = (d_1, \dots, d_N)$ со свойствами (4)–(6) производится по коэффициентам этой модели.

Образуем матрицу

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} 1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ 1 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{Nq} \end{pmatrix} \tag{12}$$

и по ней построим матрицу

$$\mathscr{B} = \mathscr{A}(\mathscr{A}^*\mathscr{A})^{-1}\mathscr{A}^*, \tag{13}$$

считая, что она определена ("$*$" означает транспонирование).

Пусть

$$\begin{aligned} d &= (I - \mathscr{B})a_0, \\ e &= \mathscr{B}a_0, \end{aligned} \tag{14}$$

где I – единичная матрица, a_0 – вектор-столбец, состоящий из $a_{10}, \dots, a_{N0}$. Тогда для a_0 имеет место ортогональное разложение

$$a_0 = d + e \tag{15}$$

и

$$d^*\mathbf{1} = 0, \qquad d^*a_k = 0, \tag{16}$$

где a_k – вектор-столбец из $a_{1k}, \dots, a_{Nk}$ и $\mathbf{1}$ – вектор-столбец, составленный из единиц.

Формулы (16) – это и есть в точности формулы (4) и (5), о которых шла речь выше.

Из (14) и (15) имеем также

$$d^*a_0 = d^*d + d^*e = d^*d$$

– требуемая формула (6).

Заметим теперь, что, согласно (14), вектор-столбец e может быть представлен в виде

$$e = \lambda_0\mathbf{1} + \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_q a_q,$$

где числа $\lambda_0, \dots, \lambda_q$ таковы, что

$$(\lambda_0, \dots, \lambda_q)^* = (\mathscr{A}^*\mathscr{A})^{-1}\mathscr{A}^* a_0.$$

Следовательно, вектор-столбец

$$d = a_0 - \lambda_0\mathbf{1} - \sum_{k=1}^{q} \lambda_k a_k$$

и

$$\sum_{i=1}^{N} d_i^2 = \sum_{i=1}^{N}\left(a_{i0} - \lambda_0 - \sum_{k=1}^{q} \lambda_k a_{ik}\right)^2. \tag{17}$$

Для "N-рынка" все входящие в правую часть этой формулы коэффициенты $a_{i0}, \dots, a_{ik}, \lambda_0, \dots, \lambda_k$, разумеется, зависят от N.

Предположение *отсутствия* асимптотического арбитража исключает возможность ($d_i = d_i(N)$)

$$\lim_N \sum_{i=1}^{N} d_i^2(N) = \infty,$$

и, значит, в силу (17), коэффициенты "N-рынков" должны быть такими, чтобы

$$\lim_N \sum_{i=1}^{N} \left[a_{i0}(N) - \lambda_0(N) - \sum_{k=1}^{q} \lambda_k(N) a_{ik}(N) \right]^2 < \infty. \tag{18}$$

Это соотношение (как следствие предположения отсутствия асимптотического арбитража) в теории APT интерпретируют следующим образом: *при достаточно большом числе N активов, привлекаемых к созданию портфеля ценных бумаг, "большинство" их должно быть таково, чтобы между коэффициентами $a_0(A_i), a_1(A_i), \dots, a_q(A_i)$ было выполнено "почти линейное" соотношение*

$$a_0(A_i) \approx \lambda_0 + \sum_{k=1}^{q} \lambda_k a_k(A_i), \tag{19}$$

где все рассматриваемые величины зависят от N и

$$a_0(A_i) = \mathsf{E}\rho(A_i).$$

При этом существует портфель $d = (d_1, \dots, d_N)$, для которого *дисперсия дохода* $\rho(d)$ является (в силу (11)) достаточно малой, что говорит о том, что в рассматриваемой многофакторной модели влияние "шумовых" членов $\zeta(A_i)$ и отдельных факторов *может быть* (*в предположении отсутствия асимптотического арбитража*) *редуцировано диверсификацией*. Но надо помнить, что все это справедливо лишь при *большом* N, т.е. для "больших" рынков, а для малых рынков расчет (pricing) математического ожидания дохода $\mathsf{E}\rho(A_i)$ с помощью выражения в правой части формулы (19) может приводить к весьма грубым ошибкам. (По поводу соответствующих утверждений см. [231], [240], [412]; *строгую* математическую теорию *асимптотического арбитража*, основанную на понятии *контигуальности* ([250]) см. в [260], [261], [273] и далее раздел 3 в гл. VI.)

§ 2e. Анализ, интерпретация и пересмотр классической концепции эффективно функционирующего рынка. I

1. Основной концепцией, на которой зиждется понятие *эффективного рынка*, является предположение о том, что цены мгновенно ассимилируют новую информацию и устанавливаются таким образом, что не дают возможности "где-то что-то купить подешевле и в другом месте немедленно продать подороже", т.е. не создают, как принято говорить, *арбитражных возможностей*.

Как мы видели выше, эта концепция *рационально устроенного*, *честно функционирующего* рынка была воплощена в то, что (нормированные) цены на таком рынке описываются *мартингалами* (относительно некоторой меры, эквивалентной исходной вероятностной мере).

Напомним, что если $X = (X_n)_{n \geqslant 0}$ – мартингал относительно фильтрации $(\mathscr{F}_n)_{n \geqslant 0}$, то $\mathsf{E}(X_{n+m} \mid \mathscr{F}_n) = X_n$. Поэтому оптимальная в среднеквадратическом смысле оценка $\widehat{X}_{n+m;n}$ величины X_{n+m}, основанная на "информации" $\mathscr{F}_n$, есть просто значение X_n, поскольку $\widehat{X}_{n+m;n}$ совпадает с $\mathsf{E}(X_{n+m} \mid \mathscr{F}_n)$.

Можно тем самым сказать, что предположение мартингальности цен (X_n) соответствует тому экономически понятному допущению, что на "хорошо организованном" рынке наилучший (по крайней мере в среднеквадратическом смысле) прогноз значения цены на "завтра", "послезавтра", ... по данным на "сегодняшний" день есть значение цены "сегодня".

Иначе говоря, прогноз носит тривиальный характер, вроде бы исключая возможность какого-либо предсказания "будущего движения наблюдаемых цен". (Л. Башелье, в сущности, при своей конструкции броуновского движения как модели эволюции цен, отправлялся именно от этой идеи невозможности более хорошего прогноза цен на "завтра", нежели как значение цены "сегодня".)

В то же самое время общеизвестно, что участники рынка (включая и таких экспертов, как "фундаменталисты", "техники", "количественные аналитики" – "fundamentalists", "technicians", "quants") *не оставляют попыток предсказания* "будущего движения цен", не оставляют попыток "догадки" относительно направления движения и величин будущих значений цен, относительно того, акции каких компаний и когда покупать или продавать, ...).

Замечание. "Фундаменталисты" исходят в своих решениях из "глобального" состояния экономики в целом, состояния тех или иных ее секторов; для них особенно важна информация относительно *перспектив* развития; они исходят из *рациональности* действия участников рынка. Представители же "технического" анализа руководствуются в своих решениях "локальным" поведением рынка; для них особенно важно "поведение толпы" как фактора, существенно влияющего на их решения.

Как отмечается в [385; с. 15–16], в 20–40 годах "фундаменталисты" и "техники" образовывали две основные группы "аналитиков" финансового рынка. В 50-х годах к ним добавилась третья группа "quants" – группа "количественных аналитиков", являющихся последователями Л. Башелье. Эта группа более тяготеет к "фундаменталистам", нежели к представителям "технического" подхода, для которых, как сказано, более важно *эмоциональное* состояние рынка, а не *рациональные* причины, определяющие поведение инвесторов на рынке.

2. Вернемся к вопросу о том, как объяснить, на чем же, собственно говоря, могут быть основаны надежды и попытки предсказания "будущего движения цен". Начинать, конечно, нужно с *анализа эмпирических данных*, с объяснения ряда нетривиальных феноменов (типа кластерности, например) относительно характера движения цен, с выяснения вероятностно-статистической структуры цен как случайных процессов.

Пусть $H_n = \ln \dfrac{S_n}{S_0}$ – логарифмы (нормированных) цен. Представим H_n в виде $H_n = h_1 + \dots + h_n$.

Если последовательность (H_n) является мартингалом относительно фильтрации $(\mathscr{F}_n)$, то величины (h_n) образуют *мартингал-разность* $(\mathsf{E}(h_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) = 0)$, и, как следствие этого, величины (h_n) оказываются (в предположении интегрируемости их квадратов) *некоррелированными*: $\mathsf{E} h_{n+m} h_n = 0, m \geqslant 1, n \geqslant 1$.

Однако некоррелированность, как известно, еще *не* означает независимости, и совершенно не исключено, что, скажем, h_{n+m}^2 и h_n^2 или $|h_{n+m}|$ и $|h_n|$ окажутся положительно *коррелированными*. Экспериментальный анализ многих финансовых данных показывает (не противореча гипотезе мартингальности цен на *эффективном* рынке!), что так оно и есть на самом деле. И весьма замечательно также то, что этот феномен положительной коррелированности, приводящий к эффекту кластерности (скученности) величин $(h_n)_{n\geqslant 1}$ по группам с большими или малыми их значениями, "ухватывается", объясняется рядом довольно-таки простых моделей (таких, как, например, *ARCH*, *GARCH*, моделями стохастической волатильности, ...), о которых речь будет идти ниже в гл. II. Появляется некоторая возможность (или, по крайней мере, надежда) уже более нетривиального (и, вообще говоря, нелинейного) прогноза, скажем, *абсолютных* значений $|h_{n+m}|$. Появляется также возможность получения более детальной информации о совместных распределениях последовательности $(h_n)_{n\geqslant 1}$.

Простейшее предположение о вероятностном характере величин (h_n) состоит в том, что

$$h_n = \sigma_n \varepsilon_n,$$

где (ε_n) – независимые стандартные нормально распределенные величины, $\varepsilon_n \sim \mathscr{N}(0,1)$, и σ_n – некоторые константы, являющиеся стандартными отклонениями величин h_n, т.е. $\sigma_n = +\sqrt{\mathsf{D} h_n}$.

Однако эта классическая модель гауссовского случайного блуждания давно *признана неадекватно отражающей реальные данные*, статистический анализ которых "на нормальность" показывает, прежде всего, что эмпирические плотности распределений величин h_n более *вытянуты*, более *пикообразны* в окрестности среднего значения, нежели в нормальном случае. Этот анализ показывает также, что *хвосты* распределений величин h_n более *тяжелые*, чем для нормального распределения. (Подробнее см. гл. IV.)

В финансовой литературе величины σ_n, входящие в представление $h_n = \sigma_n \varepsilon_n$, принято называть *волатильностью* (изменчивостью), и принципиально важным является тот факт, что *волатильность сама по себе является волатильной*. Иначе говоря, $\sigma = (\sigma_n)$ является не только функцией от времени (в простейшем случае константой), но и *случайна*. (Подробнее о волатильности см. далее § 3а в гл. IV.)

С математической точки зрения подобное предположение весьма привлекательно, поскольку существенно расширяет традиционный класс (*линейных*) гауссовских моделей, включая в рассмотрение (*нелинейные*) *условно-гауссовские* модели с

$$h_n = \sigma_n \varepsilon_n,$$

где, по-прежнему, (ε_n) – независимые стандартные нормально распределенные величины, $\varepsilon_n \sim \mathscr{N}(0,1)$, но зато $\sigma_n = \sigma_n(\omega)$ являются $\mathscr{F}_{n-1}$-измеримыми неотрицательными *случайными* величинами. По-другому это можно выразить так: условное распределение h_n относительно $\mathscr{F}_{n-1}$

$$\mathrm{Law}(h_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) = \mathscr{N}(0, \sigma_n^2),$$

откуда следует, что Law(h_n)-распределение h_n есть *взвесь* (*смесь*) нормальных распределений с усреднением по распределению волатильности ("случайной дисперсии") σ_n^2.

Полезно отметить, что в математической статистике хорошо известно, что смеси распределений с быстро убывающими хвостами могут приводить к распределениям с тяжелыми хвостами. Так что, если экспериментально это наблюдается (а это и действительно так для многих финансовых показателей), то условно-гауссовские схемы могут рассматриваться как подходящие вероятностные модели.

Естественно, что при обращении к моделям со стохастической волатильностью, именно, к моделям типа "$h_n = \sigma_n \varepsilon_n$", определяющим фактором успеха их применения является "правильное" описание эволюции волатильности (σ_n).

Уже первая модель $ARCH$ (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity – авторегрессионная условная неоднородность), введенная в 1980 г. Р. Энглем (R. F. Engle) и предполагающая, что

$$\sigma_n^2 = \alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2 + \cdots + \alpha_q h_{n-q}^2,$$

дала возможность "ухватить" упомянутый выше *эффект кластерности* (скученности, сгруппированности) реально наблюдаемых данных при статистическом анализе финансовых временны́х рядов.

Суть этого эмпирического феномена состоит в том, что большие (малые) значения h_n влекут за собой большие (малые) последующие значения, но, вообще говоря, непредсказуемого знака.

Это, конечно, становится понятным из сделанного в модели $ARCH$ предположения о структуре σ_n^2 как функции предшествующих значений $h_{n-1}^2, \ldots, h_{n-q}^2$. Таким образом, согласно этой модели и в соответствии с реальными наблюдениями, вслед за большим значением $|h_n|$ следует ожидать большое значение $|h_{n+1}|$. Однако, подчеркнем, эта модель *не дает* объяснения того, в "какую сторону двинутся цены", т.е. не дает информации о знаке h_{n+1}. (Отсюда, между прочим, вытекает следующая рекомендация к практической деятельности на стохастическом рынке по продаже и покупке – если имеете дело с покупкой, например, опциона, то надо приобретать одновременно и опцион-колл, и опцион-пут; ср. с § 4e, гл. VI.)

Неудивительно, что $ARCH$-модель породила огромное число сходных моделей, создаваемых для того, чтобы суметь "ухватить" (помимо "кластерности") и другие обнаруживаемые эффекты. Наиболее известна среди них $GARCH$-модель (Generalized $ARCH$), введенная Т. Боллерслевом (T. Bollerslev, [48], 1987), в которой

$$\sigma_n^2 = \alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2 + \cdots + \alpha_q h_{n-q}^2 + \beta_1 \sigma_{n-1}^2 + \cdots + \beta_p \sigma_{n-p}^2.$$

(О разнообразии моделей, обобщающих $ARCH$, можно судить уже по одному только перечислению их наименований – $HARCH$, $EGARCH$, $AGARCH$, $NARCH$, $MARCH$, ...)

Одно из "технических" преимуществ $GARCH$-моделей сравнительно с $ARCH$ состоит в том, что, в то время как для "подгонки" *$ARCH$-моделей* к реальным данным приходится брать большие значения q, модель $GARCH$ позволяет ограничиваться небольшими значениями q и p.

Отметив, что модели $ARCH$ и $GARCH$ объясняют эффект кластерности, нельзя не упомянуть, что в действительности имеются и другие эмпирические феномены, показывающие, что связь цен и волатильности является на самом деле более тонкой. Так, практики хорошо знают, что когда волатильность "мала", то цены стремятся к тому, чтобы их рост или падение длились как можно дольше. Аналогичным образом, если волатильность "велика", то цены ведут себя таким образом, что они как бы замедляют свой рост или падение, стремясь повернуть движение в противоположном направлении.

Все это говорит о том, что внутренняя (довольно сложная) структура финансового рынка, видимо, дает некоторую надежду на возможность предсказания если уж и не *самого* движения цен, то, по крайней мере, на возможность конструкции достаточно надежных *границ* их будущего движения. (Эту мысль "оптимисты" часто предваряют словами о том, что рыночные цены "помнят прошлое", хотя этот субъективный тезис далеко не бесспорен.)

Довольно подробное рассмотрение ряда вероятностно-статистических моделей, описывающих эволюцию финансовых временны́х рядов, будет дано в дальнейшем (см. гл. II, III). Сейчас же мы остановимся на некоторой критике и пересмотре предположений о функционировании трейдеров на "эффективно" организованном рынке.

3. В § 2a говорилось о том, что в концепции *эффективного рынка* заложено то, что все его участники *однородны* с точки зрения своих целевых установок, усвоения новой информации, их решения носят *рациональный* характер. Однако эти положения вызывают определенную критику, состоящую в том, что участники рынка, даже если они и получают всю доступную информацию, все же реагируют на нее, интерпретируют ее далеко *не однозначным, не однородным образом*; целевые установки участников рынка могут быть крайне различны; временны́е интервалы финансовой активности трейдеров различными – от коротких интервалов для "speculators" и "technicians" до длинных периодов для центральных банков; отношение участников рынка к размерам риска может быть весьма субъективным.

Достаточно хорошо известно, что люди в своих решениях "*нелинейны*": они менее рискованны, когда ожидают прибыль, и более рискованны, когда находятся перед возможностью потерь. Наглядной иллюстрацией этого утверждения является следующая дилемма, сформулированная А. Тверски (A. Tversky, [465]):

а) "Что Вы предпочтете: заведомо иметь 85 000 $ или попытаться получить бо́льший капитал в 100 000 $ в игре, где выигрыш имеет вероятность 0.85?"

б) "Что Вы предпочтете: заведомо потерять 85 000 $ или же вступить в игру, где с вероятностью 0.85 Вы потеряете уже 100 000 $, но с вероятностью 0.15 потери сведутся к нулевым?"

Большинство людей в случае а) предпочтут иметь 85 000 $, не стремясь получить 100 000 $. Во втором же случае б) большинство людей предпочтет вступить в игру, которая дает шанс (в 15%) свести потери до нуля.

При принятии инвесторами решений чрезвычайно важным фактором является *время*. Если Вам предоставляется возможность получения 5 000 $ сегодня или 5.150 $ через месяц, то Вы, скорее всего, предпочтете получить "сегодня". Однако, если первая возможность представляется через год, а вторая – через 13 месяцев, то большинство предпочтет "13 месяцев". Иначе говоря, "временны́е" горизонты инвесторов на рынке могут быть различными в зависимости от их индивидуальных установок, что, вообще говоря, не согласуется с моделями "рациональных инвесторов", предполагающими (явно или неявно) тождественность их "временны́х горизонтов".

В § 2a (п. 3) отмечалось, что в понятие эффективного рынка входит и то, что участники рынка *мгновенно корректируют* свои решения в зависимости от поступившей информации. Однако, все хорошо знают, что так на самом деле не бывает – людям нужно некоторое время (и разное для разных людей) для осознания поступившей информации и принятия затем того или иного решения.

4. В книге Дж. Сороса [451] приводится много аргументов в защиту необходимости понимания того, что помимо состояний "равновесия" или "почти равновесия" рынок может находиться и в состояниях "далеких от равновесия", что участники рынка неадекватно воспринимают и интерпретируют информацию, что их взгляды "по самой своей природе являются предвзятыми", [451; с. 14]. В состояниях, близким к равновесным, действуют определенные корректирующие механизмы, предотвращающие "слишком разительное расхождение восприятий и реальности", а в состояниях, далеких от равновесных, "действует рефлексивный механизм двойной обратной связи и тенденция к сближению восприятий и реальности не возникает, если не происходит значительных изменений в существующих условиях ..." [451, с. 13].

С этими словами созвучны высказывания Р. Олсена (R. B. Olsen, [2]) – основателя Research Institute for Applied Economics ("Olsen & Associates", Zürich): "На рынке имеется широкий спектр агентов с разными временны́ми горизонтами. Эти горизонты меняются от одной минуты для 'краткосрочных' трейдеров до нескольких лет для центральных банков и корпораций. Реакция агентов на внешние события зависит от их временны́х горизонтов. Поскольку эти горизонты различны и разнятся в миллионы раз, экономические агенты могут принимать существенно разные решения. Все это приводит к 'эффекту ряби' (ripple effect), когда разнородные реакции порождают новые события, вызывающие в свою очередь вторичные реакции участников рынка".

В настоящее время, видимо, рано еще говорить о какой-то стройной экономико-математической теории финансового рынка как "большой сложной системы", функционирующей не в "классических" условиях равновесия, а в тех, которые реально наблюдаемы на рынке. Современное состояние можно определить как период "накопления фактов", "уточнения моделей". И в этом смысле первостепенная роль принадлежит новым методам сбора и хранения статистических данных, их обработки и анализа с применением, естественно, современной вычислительной техники (о чем и пойдет речь ниже, см. гл. IV), что дает эмпирический материал для анализа различных концепций относительно функционирования рынка ценных бумаг и коррекции различных положений, заложенных, скажем, в понятие *эффективного* рынка, гипотез относительно характера распределений цен, динамики их поведения и т. п.