

ВВЕДЕНИЕ В ЭКОНОФИЗИКУ
Корреляции и сложность в финансах

AN INTRODUCTION TO
ECONOPHYSICS
Correlations and Complexity in Finance

ROSARIO N. MANTEGNA

Dipartimento di Energetica ed Applicazioni di Fisica, Palermo University

H. EUGENE STANLEY

Center for Polymer Studies and Department of Physics, Boston University

 CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

Р. Мантеня, Х. Стенли

ВВЕДЕНИЕ В ЭКОНОФИЗИКУ
Корреляции и сложность в финансах

Перевод с английского

В. И. Гусева, С. В. Малахова, А. И. Митуса

под редакцией В. Я. Габескирия

УДК 519.86
ББК 16.22.9
М81

Переводчики: В. И. Гусев, С. В. Малахов, А. И. Митус

Мантенья Р. Н., Стенли Х. Ю.

М81 Введение в эконофизику. Корреляции и сложность в финансах. Перевод с английского В. И. Гусева, С. В. Малахова, А. И. Митуса под редакцией В. Я. Габескирия — М.: , 2007. — 188 с., ил.

ISBN

Книга посвящена использованию концепций статистической физики для описания финансовых систем. Авторы иллюстрируют понятие скейлинга, применяемое в теории вероятностей, теории критических явлений и теории турбулентности. Эти подходы применяются к финансовым временным рядам, с тем чтобы пролить новый свет на поведение финансовых рынков. Авторы представляют также новую стохастическую модель, которая учитывает различные статистические свойства, наблюдаемые в эмпирических данных.

Книга предназначена для студентов и исследователей, изучающих экономическую теорию более углубленно, а также для финансистов-профессионалов.

УДК 519.86
ББК 16.22.9

ISBN (русск.)
ISBN 0-521-62008-2 (англ.)

Оглавление

Предисловие к русскому переводу	8
Предисловие английского издателя	10
Предисловие.	12
Глава 1 Введение.	14
1.1. Мотивация	14
1.2. Передовые подходы	15
1.3. Подход теории хаоса	18
1.4. Направления исследований	19
Глава 2 Гипотеза эффективного рынка.	23
2.1. Концепции, парадигмы и переменные величины.	23
2.2. Арбитраж.	23
2.3. Гипотеза эффективного рынка	24
2.4. Алгоритмическая теория сложности	26
2.5. Количество информации в финансовом временном ряде.	28
2.6. Идеализированные системы в физике и финансах	28
Глава 3 Случайное блуждание.	30
3.1. Одномерный дискретный случай	30
3.2. Предельный переход	31
3.3. Центральная предельная теорема.	33
3.4. Скорость сходимости	36
3.4.1. Первая теорема Берри—Эссена.	37
3.4.2. Вторая теорема Берри—Эссена	38
3.5. Область притяжения	38
Глава 4 Стохастические процессы Леви и предельные теоремы	40
4.1. Устойчивые распределения.	40
4.2. Скейлинг и самоподобие	44
4.3. Предельная теорема для устойчивых распределений.	45
4.4. Распределение по степенному закону.	47
4.4.1. Санкт-Петербургский парадокс	47
4.4.2. Степенные законы в конечных системах.	48
4.5. Статистика ценовых изменений	49
4.6. Бесконечно делимые случайные процессы.	50
4.6.1. Устойчивые процессы	50

4.6.2. Пуассоновский процесс	51
4.6.3. Гамма-распределенные случайные величины	51
4.6.4. Равномерно распределённые случайные величины	52
4.7. Выводы.	52
Глава 5 Меры (единицы измерения) в финансовых данных	54
5.1. Единицы измерения цен на финансовых рынках.	56
5.2. Временные шкалы и финансовые рынки.	60
5.3. Выводы.	64
Глава 6 Стационарность и временная корреляция.	65
6.1. Стационарные стохастические процессы	66
6.2. Корреляция	67
6.3. Краткодиапазонно коррелированные случайные процессы	70
6.4. Длиннодиапазонно коррелированные случайные процессы.	72
6.5. Сравнение краткодиапазонно и длиннодиапазонно коррелированных шумов	74
Глава 7 Корреляции в финансовых временных рядах	75
7.1. Автокорреляционная функция и спектральная плотность.	75
7.2. Корреляции высших порядков: волатильность.	79
7.3. Стационарность ценовых изменений	82
7.4. Выводы.	83
Глава 8 Стохастические модели ценовой динамики	84
8.1. Устойчивая негауссовская модель Леви	86
8.2. Т-распределение Стьюдента	87
8.3. Смесь гауссовских распределений	88
8.4. «Усеченный полет Леви».	89
Глава 9 Скейлинг и его разрушение	94
9.1. Эмпирический анализ индекса S&P 500	94
9.2. Сравнение с TLF-распределением.	98
9.3. Статистические свойства редких событий	100
Глава 10 ARCH- и GARCH-процессы	103
10.1. ARCH-процесс.	104
10.2. GARCH-процессы	107
10.3. Статистические свойства ARCH / GARCH-процессов	109
10.4. GARCH(1,1) и эмпирические наблюдения	113
10.5. Выводы.	116
Глава 11 Финансовые рынки и турбулентность	117
11.1. Турбулентность.	118
11.2. Параллельный анализ ценовой динамики и скорости жидкости	119
11.3. Скейлинг в турбулентности и на финансовых рынках.	124
11.4. Обсуждение	127

Глава 12 Корреляция и антикорреляция между акциями	128
12.1. Одновременная динамика цен пары акций	128
12.1.1. Портфель акций индекса DJIA	129
12.1.2. Портфель акций индекса S&P 500.	132
12.2. Статистические свойства корреляционной матрицы	132
12.3. Обсуждение	134
Глава 13 Таксономия портфеля акций	135
13.1. Расстояние между акциями	135
13.2. Многомерные пространства	136
13.3. Субдоминантное многомерное пространство портфеля акций.	141
13.4. Выводы	143
Глава 14 Опционы на идеализированных рынках	144
14.1. Форвардные контракты.	144
14.2. Фьючерсы	145
14.3. Опционы.	145
14.4. Спекуляция и хеджирование	147
14.4.1. Спекуляция: пример.	147
14.4.2. Хеджирование: форма страхования	147
14.4.3. Хеджирование: концепция безрискового портфеля.	148
14.5. Оценка опционов на идеализированных рынках	149
14.6. Формула Блэка—Шоулса.	152
14.7. Сложная структура финансовых рынков	153
14.8. Другие подходы к оценке опционов.	154
14.9. Обсуждение.	155
Глава 15 Опционы на реальных рынках	156
15.1. Прерывистые прибыли акций.	156
15.2. Волатильность на реальных рынках.	157
15.2.1. Историческая волатильность	158
15.2.2. Подразумеваемая волатильность	158
15.3. Хеджирование на реальных рынках.	160
15.4. Расширение модели Блэка—Шоулса	161
15.5. Выводы	162
Приложение А. Принятые обозначения	164
Приложение Б. Мартингалы	170
Список литературы	171
Работы из списка литературы, имеющиеся на русском языке	179
Список дополнительной литературы на русском языке	180
Алфавитный указатель	182

Предисловие к русскому переводу

Поистине драматическая ситуация, сложилась в современной экономической науке. Нелинейная динамика (синергетика), детерминированный хаос, фракталы, генетические алгоритмы, нечёткие множества и другие новейшие научные понятия проникают в экономическую теорию, обещая новые открытия, но в то же время самим своим появлением побуждая к пересмотру достигнутого ранее. Рождаются новые исследовательские программы, которые ставят своей целью более достоверное объяснение сложных явлений. К их числу относится совсем недавно сложившаяся дисциплина, получившая название «эконофизика».

Представляемая книга Р. Н. Мантеньи и Х. Ю. Стенли «Введение в эконофизику. Корреляции и сложность в финансах» посвящена проблеме, которая игнорируется традиционными исследованиями в экономике и финансах: а именно тому обстоятельству, что нет никаких доказательств в пользу существования саморегуляции рынков. Она доказывает неустойчивость финансовых рынков. Она демонстрирует понимание того, что рынки ведут себя не так, как они гипотетически «должны» вести себя в соответствии с традиционными нереалистичными моделями. На основе анализа финансовых рыночных данных в представленном труде разрабатывается новая модель динамики рыночных цен с нетривиальной изменчивостью.

Традиционная экономическая теория не имеет эмпирического основания для своих аксиом, она зиждется на идее относительного равновесия, тогда как теория финансов имеет дело с эмпирическими данными и моделями неравновесной стохастической динамики. Но и математики преподают стандартную теорию финансов так, будто это просто подмножество абстрактной теории стохастических процессов.

Авторы не следуют за теоретиками финансов и не начинают с математических теорем. Они используют воочию наблюдаемое

рыночное движение цен, чтобы вывести новые динамические закономерности. Они спрашивают, как ведут себя рынки в реальности, не следуя чьим-либо пожеланиям, выраженным как математически удобные предположения. Другими словами, авторы представляют подход физиков к экономике и финансам, который совершенно не окрашен верой в идеологию неоклассической экономической теории или милovidными математическими теоремами о мартингалах. Мощь такого опытного подхода состоит в том, что выставляет неоклассические математические ожидания стабильности фальсифицированными, и, следовательно, ложными основаниями для рассуждений о финансовых материях.

Для будущих поколений российских экономистов «Введение в экономфизику» может послужить отправной точкой становления отечественной экономической теории, которая в хаосе реальной экономики неизбежно должна быть нелинейной.

Остается добавить, что книга написана легко и доступно, она не перегружена математическими выкладками и, по существу, представляет собой увлекательный рассказ о новейших методах математической экономики, не лишенный полемического задора. Это своего рода повествование о приключениях в рыночных джунглях двадцатого века.

Для русского издания составлен список дополнительной литературы, отражающей различные аспекты теории и практики анализа нелинейных динамических систем.

В целом, «Введение в экономфизику» может стать хорошим учебным пособием для студентов, настольной книгой аспирантов и стимулом к профессиональному росту преподавателей и научных работников.

Доктор физико-математических наук,
профессор всероссийского заочного
финансово-экономического института
В. Я. Габескирия

Кандидат технических наук,
доцент Московского института экономики,
менеджмента и права
В. И. Гусев

Предисловие английского издателя

Эта книга посвящена использованию концепций статистической физики для описания финансовых систем. В частности, авторы иллюстрируют концепцию скейлинга, применяемую в теории вероятностей, теории критических явлений и теории турбулентности. Эти концепции применяются к финансовым временным рядам, с тем чтобы пролить новый свет на поведение финансовых рынков. Авторы представляют также новую стохастическую модель, которая учитывает различные статистические свойства, наблюдаемые в эмпирических данных.

Обычно при изучении экономических систем имеется возможность исследовать систему в различных масштабах. Однако часто невозможно записать «микроскопическое» уравнение для всех экономических субъектов, взаимодействующих внутри данной системы. Концепции статистической физики, такие как стохастическая динамика, кратковременные и долговременные корреляции, самоподобие и скейлинг дают понимание глобального поведения экономических систем без того, чтобы сначала осуществить микроскопическое описание такой системы. Эта книга будет интересна как физикам, так и экономистам. Физики найдут применение концепций статистической физики к экономическим системам интересным и перспективным, так как экономические системы принадлежат к наиболее увлекательным и сложным системам среди тех, которые могут быть исследованы. Экономисты и те, кто работают в области финансов, найдут полезным изложение методов эмпирического анализа и хорошо сформулированных теоретических инструментов, могущее помочь в описании систем, состоящих из огромного числа взаимодействующих подсистем.

Эта книга предназначена для студентов и исследователей, изучающих экономическую теорию или физику более углублённо, а также для финансистов-профессионалов. Аспиранты, в неко-

торой степени знакомые с теорией вероятностей или статистической физикой, смогут многое почерпнуть для себя.

Доктор Росарио Н. Мантенья работает в области эмпирического и теоретического моделирования сложных систем. Начиная с 1989 г. его исследования сосредоточены на изучении финансовых систем с использованием методов статистической физики. В частности, он является создателем так называемого «усечённого полёта Леви»; им установлено, что этот процесс описывает различные статистические свойства индекса S&P500. Он также применил концепции многомерных пространств и корреляционных матриц к моделированию финансовых рынков. Д-р Мантенья является профессором физики университета Палермо.

Доктор Х. Юджин Стенли в течение 30 лет работает на физических факультетах Массачусетского технологического института (МТИ) и Бостонского университета. Он является автором монографии под названием «Введение в фазовые переходы и критические явления» (Oxford University Press, 1971). Его книга донесла до широкой аудитории ключевые идеи масштабной инвариантности, которые, как теперь доказано, весьма полезны в самых разнообразных прикладных областях. В последнее время д-р Стенли и его сотрудники исследовали вопрос о том, в какой степени скейлинговые концепции проливают новый свет на проблемы экономической теории, а также на проблемы, характерные для биологии и медицины.

Предисловие

Физики привносят в моделирование сложных систем инструменты и методологию, развитые в статистической механике и теоретической физике. Финансовые рынки представляют собой «хорошо определённые» сложные системы, которые подвергаются непрерывному мониторингу в масштабах времени до одной секунды. Более того, фактически каждая экономическая транзакция записывается, и всё возрастающая часть общего количества записанных экономических данных становится доступной для исследований. Это делает финансовые рынки чрезвычайно привлекательными для исследователей, заинтересованных в более глубоком понимании подходов к моделированию сложных систем.

Экономисты и математики являются обладателями давних традиций в исследовании финансовых систем. Физики, напротив, обращались к экономическим проблемам от случая к случаю. Однако с недавних пор в анализ экономических систем стало вовлекаться всё больше физиков. Множество статей, относящихся к экономической теории, теперь публикуется в физических журналах. Созданы новые междисциплинарные журналы, учреждены специальные разделы в существующих изданиях, организуются международные конференции.

В дополнение к фундаментальным исследованиям существует практическая сторона дела, которая может служить объяснением возросшего интереса физиков к финансам. Например, управление рисками, играющее ключевую роль для финансовых институтов, является такого рода сложной задачей, решению которой может способствовать междисциплинарный подход.

Часто случается, что физические подходы дополняют традиционные дисциплины, поэтому включение физиков в междисциплинарную команду по управлению рисками может придать остроту исследованиям и продвинуть их к успеху по более эффективному пути в существующем конкурентном окружении.

Эта книга задумана как введение в междисциплинарную область *эконофизики*. Данный неологизм призван обрисовать область деятельности физиков, которые работают над экономическими проблемами, проверяя концептуальные подходы, заимствованные из физических наук. Книга достаточно кратка и не преследует цели обозреть все недавние работы, выполненные в этой быстро развивающейся области. Она, скорее, являет собой введение, которое достаточно для того, чтобы дать возможность читать подобного рода текущую литературу. Так как эта последняя охватывает дисциплины от финансовой математики и теории вероятностей до физики и экономической теории, то в целях исключения путаницы в конце книги приведен систематический список принятых обозначений (приложение А).

Мы хотим поблагодарить многих коллег за их помощь в подготовке книги. Различные наброски были любезно просмотрены Андреасом Башлейтнером, Джованни Бонано, Парамешвараном Гопикришнаном, Фабрицио Лилло, Дженис Войт, Дитрихом Стауфером, Анджело Вульпани и Дитрихом Уолфом.

Джерри Д. Морроу продемонстрировал своё искусство владения TEXом, выполнив бесчисленное количество исправлений. Неустанные обследования библиотек Робертом Томпски неизмеримо расширило библиографию. Мы особенно благодарны персоналу издательства CUP — и больше всего Саймону Цапелину (заведующему редакцией физических наук), Зу Таку (управляющему производством) и Линдсею Найтингейлу (редактору), а также группе технических приложений за их продуктивность и ободрения на протяжении всего проекта.

Поставив точку на последней странице, мы с трудом не поддались искушению переписать отдельные темы, которые теперь мы могли бы раскрыть более ясно и точно. Мы надеемся, что читатели, которые заметят отдельные несовершенства, сообщат нам о них.

**Росарио Н. Мантенья,
Х. Юджин Стенли**

Глава 1

Введение

1.1. Мотивация

Начиная с 1970-х годов в мире финансов произошли заметные изменения. Одним из таких поворотных моментов был год 1973-й, когда началась торговля валютой на финансовых рынках, и котировки валют стали определяться международным валютным рынком (Forex), работающим 24 часа в сутки во всём мире. В те годы Блэк и Шоулс опубликовали первую статью, в которой привели расчетную формулу цены опциона¹.

Начиная с того времени объемы торгов на международном валютном рынке росли с внушительной скоростью. Объем транзакций в 1995 г. был в 80 раз больше, чем в 1973 г. И еще более впечатляющий рост наблюдался в области производных ценных бумаг. Общий объем рыночных контрактов по производным ценным бумагам в 1996 г. составил 35 триллионов американских долларов. Общую сумму приблизительно в 25 триллионов американских долларов составили контракты, заключённые на внебиржевом рынке ценных бумаг (т. е. непосредственно между фирмами или финансовыми институтами) и ещё примерно на 10 триллионов долларов — на специализированных биржах, которые оперируют только с производными контрактами. Сегодня финансовые рынки способствуют торговле огромными количествами денег, активов и товаров в конкурентном глобальном окружении.

Вторая революция в этой области началась в 1980-х годах, когда электронная система торгов, уже введённая в действие на основных биржах, была адаптирована к международному валютному рынку. Накопление исторических данных по котировкам — или ценам, по которым трейдеры желают купить (цены покупки — «bid») или продать (цены продажи — «ask») финансовый актив —

¹ Их вклад был оценен Нобелевской премией за 1974 г. — *Примеч. пер.*

было начато примерно в то же время, когда электронные торги стали повсеместными. Бурное развитие финансовых рынков привело к необходимости привлечения больших финансовых и человеческих ресурсов к разработке методов минимизации рисков вовлеченных в эту сферу деятельности финансовых институтов.

1.2. Передовые подходы

В этой книге мы обсуждаем применение к финансовым рынкам таких концепций как степенные законы распределения, корреляции, скейлинг, непредсказуемые временные ряды и случайные процессы. В течение последних 30 лет физики достигли важных результатов в области фазовых переходов, статистической механики, нелинейной динамики и неупорядоченных систем. В этих областях степенные законы, скейлинг и непредсказуемые (стохастические или детерминистические) временные ряды являются теми концепциями, которые часто позволяют интерпретировать лежащую в их основе физическую реальность.

С учетом этих предпосылок будет сюрпризом для тех, кто понасторел в школьных естественных науках, узнать, что первое использование степенного распределения — и первая математическая формализация случайного блуждания — были реализованы в социальных науках. Почти сто лет назад итальянский социальный экономист Парето исследовал статистический характер индивидуальных доходов в устойчивой экономике посредством их моделирования с помощью распределения

$$y \sim x^{-\nu}, \quad (1.1)$$

где y — количество людей, имеющих доход x или больше чем x , а ν — показатель, который Парето оценил величиной, равной 1.5 [132]. Парето заметил, что его результат имеет общий характер и одинаково применим ко всем странам «будь то Англия, Ирландия, Германия или даже Перу».

Было бы справедливым сказать, что понятие степенного распределения противоречит интуиции, потому что оно не имеет характеристического масштаба. Это свойство препятствовало использованию таких распределений в естественных науках — до тех пор пока не появилась новая парадигма: 1) в теории вероятностей — благодаря работам Леви [92], а также благодаря тому что Мандельброт [103] последовательно применил степенные распределения к целому ряду различных проблем; 2) в изучении фазо-

вых переходов, где были введены концепции скейлинга для термодинамических и корреляционных функций [147].

Другой распространённой концепцией естественных наук является случайное блуждание. Первое теоретическое описание случайного блуждания в естественных науках было выполнено в 1905 г. Эйнштейном [48] в его знаменитой статье, посвящённой определению числа Авогадро. В последующие годы более строгое математическое описание случайного блуждания было сделано Винером [158], и теперь концепция случайного блуждания проникла почти во все области естественно-научных исследований.

Первая формализация случайного блуждания была опубликована не Эйнштейном, а в докторской диссертации Башелье [8], французского математика, представившего свои тезисы в отделение наук Парижской Академии 29 марта 1900 г. для получения степени доктора математики. Его учителем был Пуанкаре, один из величайших математиков своего времени. Положения диссертации Башелье, написанной на тему «Теория спекуляций», были во многих отношениях удивительными. Они относились к ценам опционов на спекулятивных рынках, к деятельности, столь важной теперь для финансовых рынков, где производные ценные бумаги, стоимость которых зависит от цен других, базовых активов, имеют регулярное хождение на многих биржах. Башелье определил вероятность ценовых изменений, записав уравнение, которое теперь называется уравнением Чепмена—Колмогорова и описывает явление, называемое винеровским процессом, удовлетворяющим уравнению диффузии (это положение было переоткрыто Эйнштейном в его статье 1905 г. о броуновском движении). При ретроспективном анализе становится ясным, что выводам Башелье не хватает строгости в некоторых математических и экономических аспектах. В частности, утверждение о гауссовском распределении для ценовых изменений было — говоря математическим языком — недостаточно обоснованным. С экономической стороны, Башелье исследовал изменения цен, в то время как экономисты в основном имеют дело с изменениями логарифмов цен. Однако эти ограничения не уменьшают ценности пионерской работы Башелье.

Имея в поле зрения работу Башелье, почти три четверти века спустя, в 1973 г. Блэк и Шоулс опубликовали модель оценки опциона, которая стала вехой в развитии этой теории. Однако и теории, и практики сознают, что модель Блэка—Шоулса нуждается в коррекции и что вопрос о том, какого рода стохастический про-

цесс описывает изменения логарифмов цен на финансовом рынке, остаётся открытым.

Проблема распределения ценовых изменений рассматривалась различными авторами, начиная с 1950 г., когда математики начали проявлять интерес к моделированию цен на фондовых рынках. Исходное предложение Башелье о гауссовском распределении ценовых изменений было скоро заменено моделью, в которой цены акций имели логнормальное распределение, т. е. следовали геометрическому броуновскому движению. В геометрическом броуновском движении разности логарифмов цен имеют гауссовское распределение. Эта модель, как известно, даёт только первое приближение к тому, что наблюдается в реальных данных. По этой причине был предложен ряд альтернативных моделей с целью объяснения.

(1) эмпирических данных о том, что хвосты измеренных распределений толще, чем ожидаемые, в соответствии с геометрическим броуновским движением, и

(2) временных флуктуаций второго момента ценовых изменений.

Среди предложенных альтернативных моделей «наиболее революционным развитием теории спекулятивных цен со времени основополагающей работы Башелье» [38] является гипотеза Мандельброта о том, что ценовые изменения следуют устойчивому распределению Леви [102]. Устойчивые процессы Леви являются стохастическими процессами, удовлетворяющими обобщённой центральной предельной теореме. Подчиняясь обобщённой форме центральной предельной теоремы, они имеют ряд интересных свойств. Они устойчивы (также как более общие гауссовские процессы), т. е. сумма двух независимых стохастических процессов x_1 и x_2 , характеризующихся одинаковым распределением Леви с индексом α , есть стохастический процесс, характеризующийся распределением Леви с тем же индексом. Форма этого распределения устанавливается (устойчиво) суммированием независимых идентично распределённых, устойчивых по Леви случайных чисел.

Как мы увидим, устойчивый процесс Леви определяет собой область притяжения в функциональном пространстве функций плотности вероятности. Сумма независимых идентично распределённых стохастических процессов $S(x) \equiv \sum_{i=1}^n x_i$, характеризующихся функцией плотности вероятности с хвостами, определяемыми степенным законом

$$P(x) \sim x^{-(1+\alpha)} \quad (1.2)$$

будет сходиться по вероятности к устойчивому стохастическому процессу Леви с индексом α , когда n стремится к бесконечности [66].

Это свойство говорит о том, что распределение устойчивого процесса Леви есть степенное распределение для больших количеств стохастических переменных x . Тот факт, что степенные распределения могут не иметь типичного масштаба, отражён в устойчивом процессе Леви тем свойством, что его дисперсия бесконечна для $\alpha < 2$. Стохастический процесс с бесконечной дисперсией, хотя и хорошо определён математически, чрезвычайно труден в использовании, более того, порождает фундаментальные вопросы по поводу применения его к реальным системам. Например, в физических системах второй момент часто относится к температуре, так что бесконечная дисперсия подразумевает бесконечную (или неопределённую) температуру. В финансовых системах бесконечная дисперсия осложняет важную задачу оценки риска.

1.3. Подход теории хаоса

В теории финансов бытует вера, что временные ряды цен активов непредсказуемы. Эта вера лежит в основе описания ценовой динамики как стохастического процесса. Начиная с 1980-х годов в физических науках было признано, что непредсказуемый временной ряд и стохастический процесс не являются синонимами. В частности, теория хаоса показала, что непредсказуемые временные ряды могут возникать в детерминированных нелинейных системах. Результаты, полученные при изучении физических и биологических систем, подстегнули интерес к экономическим системам. Теоретические и эмпирические исследования были направлены на то, чтобы выяснить, действительно ли временная эволюция цен активов на финансовых рынках является следствием лежащей в её основе нелинейной детерминированной динамики (ограниченного числа) переменных.

Одной из целей исследователей, изучающих финансовые рынки методами нелинейной динамики, было восстановить (гипотетический) странный аттрактор, имеющий место в хаотической временной эволюции, и определить его размерность d . Восстановление скрытого аттрактора и определение его размерности является нелёгкой задачей. Наиболее достоверной оценкой для d служит неравенство $d > 6$. Для хаотических систем с $d > 3$ достаточ-

но трудно отличить хаотическую временную эволюцию от случайного процесса, особенно если лежащая в основе детерминистическая динамика неизвестна. Следовательно, с эмпирической точки зрения выглядит маловероятным, что можно провести различие между случайной и хаотической гипотезами.

Хотя полностью нельзя исключить того, что финансовые рынки следуют хаотической динамике, мы предпочитаем парадигму, согласно которой ценовая динамика активов является стохастическим процессом. Наш выбор мотивирован наблюдением, состоящим в том, что временная эволюция цены актива зависит от всей информации, воздействующей (или могущей воздействовать) на исследуемый актив, и нам кажется маловероятным, что вся эта информация может быть адекватно описана небольшим количеством нелинейных детерминистических уравнений.

1.4. Направления исследований

Финансовые рынки демонстрируют ряд свойств, которые характеризуют сложные системы. Это открытые системы, в которых множества подсистем взаимодействуют нелинейно при наличии обратных связей. Правила, регулирующие действие финансовых рынков, достаточно устойчивы, и временная эволюция этих систем подвергается непрерывному мониторингу. Теперь стало возможным развить модели и протестировать их точность и предсказательную мощь, ввиду того что существуют большие (к тому же высокочастотные) базы данных.

Одна из активно развивающихся областей теории финансов — это оценивание производных инструментов. В простейшем случае актив описывается стохастическим процессом, а производная ценная бумага оценивается с учетом цены и статистических свойств актива, лежащего в ее основе. Эта проблема может быть представлена по меньшей мере двумя различными аспектами: (1) «фундаментальными» аспектами, которые имеют отношение к природе случайного процесса, которому следует этот актив, и (2) «прикладными» или «техническими» аспектами, которые имеют отношение к решению проблемы цены опциона в предположении, что лежащий в основе актив следует именно этому случайному процессу.

В последнее время всё большее число физиков пытается анализировать и моделировать финансовые рынки и — шире — экономические системы. Интерес этого сообщества к финансовым и эко-

номическим системам уходит корнями к 1936 г., когда Майоран написал свою пионерскую статью о существенной аналогии между статистическими законами в физике и социальных науках [110]. Эта неортодоксальная точка зрения рассматривалась до недавнего времени всего лишь как следствие побочного интереса. И действительно, вплоть до 1990-х годов очень мало профессиональных физиков занимались исследованиями социальных или экономических систем. Исключение составляли Каданов [76], Монтролл [125] и группа учёных-физиков в Институте Санта-Фе [5].

Начиная с 1990 г. активность физических исследований в этой области стала менее эпизодической, а круг исследователей расширился. Стали издаваться новые междисциплинарные журналы, организовываться конференции, и, на первый взгляд, обнаружилось множество научных проблем, легко поддающихся решению. Исследования этой группы физиков дополняют традиционные подходы в теории финансов и финансовой математике. Характерное отличие состоит в том, что физики кладут в основу эмпирический анализ экономических данных. Другим привнесённым физиками основанием являются теория и методы, развитые в области статистической физики за последние 30 лет. Концепции скейлинга, универсальности, неупорядоченности, возмущённых и самоорганизующихся систем могут оказаться полезными в анализе и моделировании систем финансовых и экономических. Спор, который иногда возникает вокруг этой точки зрения, состоит в том, что эмпирический анализ, выполненный с финансовыми или экономическими данными, не эквивалентен обычному экспериментальному исследованию, которое имеет место в физических науках. Другими словами, невозможно выполнить крупномасштабный эксперимент в экономической теории и финансах, который мог бы опровергнуть некую данную теорию.

Заметим, что это ограничение не специфично для экономических и финансовых систем, оно также имеет место в таких хорошо развитых областях физики, как астрофизика, физика атмосферы и геофизика. По аналогии с деятельностью в этих более определённых областях мы полагаем, что способны проверить и опровергнуть какую-либо теорию, связанную с постоянно доступными множествами финансовых или экономических данных, которые существуют в виде записанных файлов с результатами финансовой и экономической деятельности.

Одно из важных направлений физических исследований, имеющих дело с финансовыми и экономическими реалиями,

сосредоточено на всестороннем описании стохастических процессов изменения цен финансовых активов. Выполнен ряд исследований по различным аспектам анализа стохастических процессов, в том числе относительно формы распределения ценовых изменений [22, 64, 67, 105, 111, 135], временной памяти [35, 93, 95, 112] и статистических свойств высоких порядков [6, 31, 126]. Эта область продолжает активно разрабатываться с целью создать наиболее удовлетворительную стохастическую модель, описывающую все черты, обнаруженные в эмпирическом анализе. Важным достижением в этой области является почти полное согласие относительно конечности второго момента ценовых изменений. Это давняя проблема в финансах, и её решение стало следствием возродившегося интереса к эмпирическому изучению финансовых систем.

Вторым направлением исследований является развитие теоретической модели, которая способна заключить в себе все существенные черты реальных финансовых рынков. Предложены различные модели [10, 11, 23, 29, 90, 104, 117, 142, 146, 149—152], в которых отражены основные черты стохастической динамики цен акций, например, наличие положительного эксцесса, «толстохвостость» негауссовской формы распределения ценовых разностей. Одновременно были предприняты попытки такого моделирования со стороны экономистов [98—100].

Еще одна интенсивно разрабатываемая область исследований относится к рациональному оцениванию производных ценных бумаг, когда некоторые из основополагающих предположений модели Блэка и Шоулса ослаблены [7, 21, 22], а также к аспектам выбора портфеля и его динамической оптимизации [14, 62, 63, 116, 145]. Кроме того, отдельной областью исследований может рассматриваться изучение сходства и различия между финансовым рынком и таким физическим процессом как турбулентность [64, 112, 113] или экологические системы [55, 135].

Одной общей темой в этих исследовательских областях является временная корреляция в финансовых рядах. Обнаружение высокопорядковых корреляций в ценовых изменениях побуждает к пересмотру некоторых положений «технического анализа» [155].

В дополнение к этим исследованиям, связанным с анализом и моделированием финансовых систем, имеются исследования распределения доходов фирм и статистических свойств скорости их роста [2, 3, 48, 155]. Исследуются также статистические

свойства экономической активности сложных организаций, таких как университеты или целые страны [89].

Настоящее краткое представление некоторых направлений и работ в этой формирующейся дисциплине иллюстрирует только цели и не может быть исчерпывающим. Более полную информацию можно почерпнуть, например, в трудах тематических конференций [78, 88, 109].

Глава 2

Гипотеза эффективного рынка

2.1. Концепции, парадигмы и переменные величины

Финансовые рынки являются системами, в которых большое количество трейдеров взаимодействуют друг с другом и реагируют на внешнюю информацию, чтобы определить для себя наилучшую цену. Товары могут быть разными — скот, руда, ценные бумаги, валюта, облигации или производные этих основных финансовых инструментов. Некоторые рынки локализованы в определенных городах (Нью-Йорк, Токио, Лондон), в то время как другие (например международный валютный рынок) разбросаны по всему миру.

Рассмотрение временного ряда изменения цен, величин и количеств транзакций финансового инструмента может привести к выводу о непредсказуемости их временной эволюции. При первом взгляде обнаруживается удивительный парадокс: динамические характеристики временного ряда, например отражающего цену финансового инструмента, в сущности, неотличимы от характеристик стохастического процесса. Существуют глубокие причины для такого рода поведения ряда, и в этой главе мы рассмотрим некоторые из них.

2.2. Арбитраж

Ключевую роль в понимании механизма ценообразования на финансовых рынках играет концепция арбитража — покупка и продажа одного и того же или эквивалентного актива с целью получения прибыли за счет разницы цен на различных рынках. Вот два простых примера, иллюстрирующих эту концепцию. В одно и то же время 1 кг апельсинов стоит 0,60 евро в Неаполе и 0,50 доллара в Майами. Если стоимость транспортировки и хранения 1 кг апельсинов из Майами в Неаполь составляет 0,1 евро, то, покупая

100 000 кг апельсинов в Майами и немедленно продавая их в Неаполе, возможно получить без риска прибыль

$$100000 [0,60 - (0,80 \times 0,50) - 0,10] = 10000 \text{ евро.} \quad (2.1)$$

Здесь предполагается, что обменный курс между долларом и евро есть 0,80 на время транзакции.

Такой арбитраж возможен и на финансовых рынках. Рассмотрим следующую ситуацию. Акция торгуется на двух различных биржах в двух странах с использованием разных валют, например в Милане и Нью-Йорке. Текущая цена акции 9 долларов в Нью-Йорке и 8 евро в Милане, и обменный курс равен 0.80. Покупая тысячу акций в Нью-Йорке и продавая их в Милане, арбитраж принесет прибыль (отвлекаясь от комиссии за сделку)

$$1000 \left(\frac{8}{0,8} - 9 \right) = 1000 \text{ долларов.} \quad (2.2)$$

Наличие трейдеров, ищущих возможности проведения арбитражных сделок, приводит к способности рынка устанавливать рациональные цены. Чтобы понять этот механизм, предположим, что трейдер обнаружил возможности проведения арбитражной сделки. Проведя успешную сделку, трейдер будет повторять это действие. В приведенном выше примере апельсины покупаются в Майами и продаются в Неаполе. Если эту операцию повторять систематически, спрос на апельсины возрастет в Майами и уменьшится в Неаполе. В результате цены на апельсины будут возрастать в Майами и уменьшаться в Неаполе. Спустя некоторое время цены в обоих регионах станут «рациональными», и тогда нельзя будет дальше обеспечивать арбитраж.

Вывод: (1) новые арбитражные возможности непрерывно появляются и обнаруживаются трейдерами на рынках; (2) так как арбитражные возможности начинают использоваться, цены начинают выравниваться, и арбитражные возможности исчезают.

2.3. Гипотеза эффективного рынка

Рынки являются сложными системами, которые содержат информацию о данном активе в виде временных рядов его цен. Наиболее распространенной парадигмой среди специалистов является та, что рынки в высшей степени эффективны в определении наиболее рациональных цен торгуемых активов. Гипотеза эффек-

тивного рынка была первоначально сформулирована в 60-х годах [53]. Рынок был определен как эффективный в том смысле, что вся доступная информация мгновенно обрабатывается и отражается на ценах торгуемых активов.

Теоретической основой для гипотезы эффективного рынка является пионерская работа Башелье [8], который в начале XX в. предположил, что динамику цены актива на спекулятивном рынке можно рассматривать как стохастический процесс. Эта работа осталась почти неизвестной до 50-х годов, когда эмпирические результаты [38] относительно наличия корреляции в рядах доходности активов показали, что корреляции на коротких временных отрезках незначительны и что приблизительное поведение временного ряда прибылей подобно некоррелированному случайному блужданию.

Гипотеза эффективного рынка была сформулирована явно в 1965 г. Самуэльсоном [141], который показал математически, что ожидаемые цены изменяются случайным образом. Используя гипотезу рационального поведения трейдеров и рыночную эффективность, он смог продемонстрировать что Y_{t+1} , ожидаемая величина цены актива в момент $t+1$, связана с предшествующими величинами цен Y_0, Y_1, \dots, Y_t посредством соотношения

$$E\{Y_{t+1} \mid Y_0, Y_1, \dots, Y_t\} = Y_t. \quad (2.3)$$

Стохастические процессы, подчиняющиеся вероятностному условию (2.3), называется мартингалами (см. Приложение В — формальное определение мартингала). Понятие мартингала есть интуитивно-вероятностная модель «справедливой игры». В понятии игрока игра является справедливой, когда выигрыши и проигрыши взаимно компенсируются, и ожидаемое накопление игрока равно его текущим активам. Теория «справедливой игры» относительно ценовых изменений, наблюдаемых на финансовом рынке, утверждает, что не существует способа получения прибыли на актив посредством использования истории ценовых флуктуаций. Вывод этой «слабой формулы» гипотезы эффективного рынка состоит в том, что ценовые изменения невозможно предсказать по историческому временному ряду изменений этих цен за прошлые периоды времени.

В 60-х годах было выполнено большое количество эмпирических исследований для проверки гипотезы эффективного рынка [54]. Подавляющее большинство этих исследований показало, что корреляция между изменениями цен очень мала, — это подтверж-

дало гипотезу эффективного рынка. Однако в 80-х годах было показано, что, используя информацию, представленную во временных рядах, таких как отношение прибыль/цена или дивиденды, можно делать предсказания прибыли данного актива на длительное время, — гораздо большее месяца. Эмпирические наблюдения побудили применить более жесткие требования к доказательству гипотезы эффективного рынка.

Таким образом, эмпирические наблюдения и теоретические исследования показывают, что ценовые изменения трудно предсказать, если исходить из временного ряда ценовых изменений. В дословном понимании эффективный рынок является идеализированной системой. В действующих рынках всегда имеют место неэффективности. Поиск и использование арбитражных возможностей является одним из методов снятия рыночных неэффективностей.

2.4. Алгоритмическая теория сложности

Описание справедливой игры в терминах мартингала достаточно формально. В этом разделе мы даем объяснение — в терминах теории информации и алгоритмической теории сложности — почему временной ряд прибылей является случайным.

Алгоритмическая теория сложности была разработана независимо Колмогоровым [85] и Чейтином [28] в середине 60-х годов — в то же время, когда разрабатывалась теория мартингалов в экономике.

В алгоритмической теории сложности сложность данного объекта кодируемого n -значной двоичной последовательностью, задается кратчайшей компьютерной программой длиной $K^{(n)}$ битов, которая может напечатать данную символическую последовательность. Колмогоров показал, что такой алгоритм существует и назвал его оптимальным асимптотическим алгоритмом.

Для иллюстрации этой концепции предположим, что исследуя космическое пространство, мы хотим передать информацию о научных и социальных достижениях человечества за пределы солнечной системы. В число передаваемых информационных блоков мы включили величину π , выраженную как 125 000-значное десятичное число, а также временной ряд дневных котировок индекса Доу-Джонса за период с 1898 г. до года, когда начались исследования космоса (тоже приблизительно 125 000 знаков). Чтобы минимизировать объем передаваемой информации и время передачи,

необходимое для этих двух массивов информации, мы напишем две числовые последовательности, используя для каждого ряда алгоритм, который отражает закономерности в этих двух последовательностях цифр. Наилучший алгоритм, найденный для последовательности цифр в величине π , чрезвычайно короток. В противоположность этому алгоритм, такой же по эффективности, не найден для временного ряда индекса Доу-Джонса. Временной ряд индекса Доу-Джонса является несжимаемым.

В алгоритмической теории сложности ряд символов считается непредсказуемым, если информация, содержащаяся в нем, не может быть сжата или сведена к более компактной форме. Это утверждение может быть сделано более формально с помощью высказывания, что наиболее эффективный алгоритм, представляющий исходный ряд символов, имеет ту же длину, что и исходный ряд символов.

Алгоритмическая теория сложности помогает нам понять поведение финансовых временных рядов. В частности:

- (1) Алгоритмическая теория сложности дает явную связь между гипотезой эффективного рынка и непредсказуемым характером прибылей. Такая связь теперь подтверждается тем свойством, что временной ряд, который имеет большое количество несжимаемой экономической информации (как этого требует гипотеза эффективного рынка для временного ряда прибылей), демонстрирует статистические свойства, неотличимые от наблюдаемых в случайном временном ряде.
- (2) Измерения отклонений от случайностей дают методику для оценки пределов применимости гипотезы эффективного рынка.
- (3) С точки зрения алгоритмической теории сложности, невозможно различить торговые сделки, инициированные шумом, от сделок, являющихся результатом появления новой информации (под информацией здесь понимаются новости о фундаментальных факторах, касающихся торгуемого на рынке финансового инструмента). Алгоритмическая теория сложности не проводит различия между временным рядом, несущим большое количество несжимаемой информации, и подлинным случайным процессом.

2.5. Количество информации в финансовом временном ряде

Финансовый временной ряд выглядит непредсказуемым, и, в сущности, его будущие величины невозможно предсказать. Это свойство финансового временного ряда не означает того, что временной ряд цен финансового актива не реагирует на значимые финансовые новости. В действительности все наоборот. Временной ряд цен на финансовом рынке несет большое количество несжимаемой информации. Ввиду того что количество этой информации чрезвычайно велико, трудно выделить воздействие на цены фундаментальных экономических факторов. Сложность предсказания связана, таким образом, с большим количеством информации о финансовых данных, а отнюдь не с ее недостатком. Когда конкретная информация влияет на рыночную цену, рынок не вполне эффективен. Это позволяет нам выявить во временном ряде цен влияние такой информации. В подобных случаях может быть выработана определенная арбитражная стратегия, и она будет оставаться прибыльной до тех пор, пока рынок не станет вполне эффективным в результате использования трейдерами всей новой информации в процессе формирования цены.

2.6. Идеализированные системы в физике и финансах

Эффективный рынок — это идеализированная система. Реальные рынки только приближенно эффективны. Этот факт, вероятно, не будет звучать слишком непривычно для физиков, потому что они хорошо знакомы с изучением идеализированных систем. В действительности использование идеализированных систем в исследованиях является методом развития физики как науки. Что было бы, если бы физика не использовала идеализацию, например движение без трения, обратимые процессы в термодинамике и бесконечные системы в критических состояниях? Физики используют эти абстракции для развития теории и планирования экспериментов. В то же время физики всегда помнят, что идеализированные системы только приближаются к реальным системам и что поведение реальных систем всегда будет отличаться от систем идеализированных. Подобный подход может быть использован при изучении финансовых систем. Мы можем предполагать «идеальные» условия, т. е. существование совершенно эффектив-

ного рынка, и внутри этой идеальной модели развивать теории и проводить эмпирическую проверку. Достоверность результатов будет зависеть от обоснованности сделанных предположений.

Концепция эффективного рынка полезна нам для моделирования финансовых рынков. После принятия этой парадигмы важным шагом является изучение статистических свойств случайных процессов, наблюдаемых на финансовых рынках. В следующих главах мы увидим, что эта задача не решается стандартными методами и что необходимы разработки новых разделов теории вероятностей для достижения удовлетворительного описания статистических свойств имеющихся баз данных финансовых рынков.

Глава 3

Случайное блуждание

В этой главе мы обсудим некоторые статистические свойства случайного блуждания. В частности, (1) центральную предельную теорему, (2) скейлинговые свойства плотности вероятности приращений блуждания и (3) представим концепцию асимптотической сходимости к аттрактору в функциональном пространстве плотностей вероятности.

3.1. Одномерный дискретный случай

Рассмотрим сумму n независимых идентично распределённых (н.и.р.) случайных величин x_i :

$$S_n \equiv x_1 + x_2 + \dots + x_n. \quad (3.1)$$

Здесь $S_n \equiv x(n\Delta t)$ можно рассматривать как сумму n случайных величин или как положение блуждающей частицы в момент времени $t = n\Delta t$, где n равно количеству сделанных единичных шагов, а Δt — временной интервал между соседними шагами. Идентично распределённые случайные величины $\{x_i\}$ характеризуются моментами $E\{x_i^n\}$, которые не зависят от i .

Простейшим примером является блуждание, осуществляемое посредством случайных шагов размером s , так что $\{x_i\}$ случайно принимает значения $+s$ или $-s$. Первый и второй моменты для такого процесса таковы:

$$E\{x_i\} = 0 \text{ и } E\{x_i^2\} = s^2. \quad (3.2)$$

Для такого случайного блуждания

$$E\{x_i x_j\} = \delta_{ij} s^2. \quad (3.3)$$

Из (3.1)—(3.3) следует, что

$$E\{x(n\Delta t)\} = \sum_{i=1}^n E\{x_i\} = 0 \quad (3.4)$$

и

$$E\{x^2(n\Delta t)\} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E\{x_i x_j\} = \sum_{i=1}^n E\{x_i^2\} = ns^2. \quad (3.5)$$

Для случайного блуждания дисперсия процесса растёт линейно с увеличением количества шагов. Исходя из дискретного случайного блуждания можно рассмотреть предельный переход, как это описано в следующем разделе.

3.2. Предельный переход

Предельный переход случайного блуждания может быть получен путём устремления $n \rightarrow \infty$ и $\Delta t \rightarrow 0$, так что $t \equiv n\Delta t$ остаётся конечным. Тогда

$$E\{x^2(t)\} = ns^2 = \frac{s^2}{\Delta t} t. \quad (3.6)$$

Чтобы иметь сходимость при $n \rightarrow \infty$ и $\Delta t \rightarrow 0$ при $s^2 = D\Delta t$ следует записать

$$E\{x^2(t)\} = Dt \quad (3.7)$$

Такая линейная зависимость дисперсии $x^2(t)$ от t является характерной для диффузионного процесса; здесь D называется константой диффузии.

Такой стохастический процесс называется винеровским процессом. Обычно предполагается, что для $n \rightarrow \infty$ и $\Delta t \rightarrow 0$ стохастический процесс $x(t)$ является гауссовским. Эквивалентность

«случайное блуждание» = «гауссовское блуждание»

сохраняется только тогда, когда $n \rightarrow \infty$, и в общем не справедливо для дискретного случая, когда n конечно, так как S_n характеризуется функцией плотности вероятности (ФПВ), которая в общем случае не является гауссианом, и это предполагает, что гауссовская форма лишь асимптотически достигается с ростом n . Функция плотности вероятности процесса $P[x(n\Delta t)]$, или, эквивалентно,

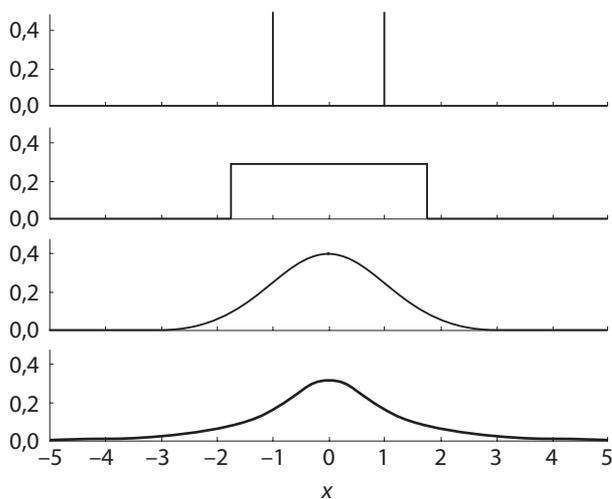


Рис. 3.1. Примеры различных функций плотности вероятности (ФПВ).
Сверху вниз показаны: (1) $P(x) = \delta(x + 1)/2 + \delta(x - 1)/2$; (2) однородная ФПВ с нулевым средним значением и единичным стандартным отклонением; (3) гуссова ФПВ с нулевым математическим ожиданием и единичным стандартным отклонением; (4) Лоренца ФПВ с единичным масштабным фактором

$P(S_n)$ есть функция n , а $P(x_i)$ в общем случае зависит от статистических характеристик случайной величины x_i .

Как же изменяется форма $P[x(n\Delta t)]$ со временем? В предположении независимости x_1 и x_2 имеем

$$P[x(2\Delta t)] = P(x_1) \otimes P(x_2), \quad (3.8)$$

где \otimes означает свёртку. На рис. 3.1 показаны четыре различные функции плотности вероятности (ФПВ) $P(x)$: (i) дельта-распределение, (ii) равномерное распределение, (iii) гауссовское распределение и (iv) лоренциан или распределение Коши. Когда одно из этих распределений характеризует случайную величину x_i , функция плотности вероятности изменится с ростом n (рис. 3.2).

Притом что все эти распределения изменяются как функции от n , наблюдается различие между первыми двумя, с одной стороны, и гауссианом и лоренцианом с другой. Функции $P(S_n)$ для дискретного (дельта) и равномерного распределений (случаи 1 и 2 на рис. 3.1) изменяются при увеличении n и масштабно, и по форме, в то время как гауссиан и лоренциан не изменяются по форме,

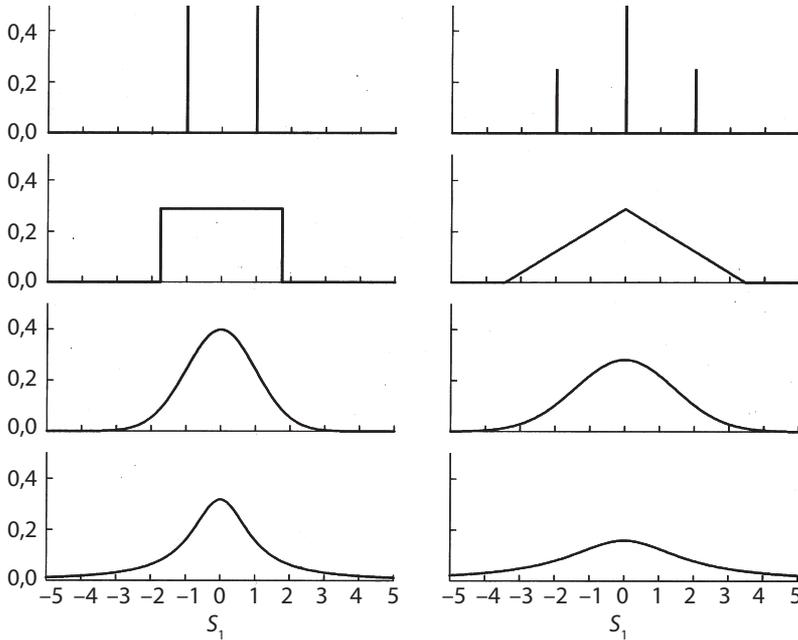


Рис. 3.2. Поведение $P(S_n)$ для независимых идентично распределённых случайных величин с $n = 1, 2$ для ФПВ распределений, изображенных на рис. 3.1

а только в масштабах (они становятся шире при возрастании n). Если функциональная форма $P(S_n)$ совпадает с формой $P(x_i)$, то такой процесс называется *устойчивым*. Таким образом, гауссовский и лоренцев процессы являются устойчивыми, но в общем случае стохастические процессы таковыми не являются.

3.3. Центральная предельная теорема

Предположим, что случайная величина S_n состоит из множества частей x_i , т. е. $S_n = \sum_{i=1}^n x_i$, так что каждое x_i независимо и имеет конечную дисперсию $E\{x_i\} = 0$, $E\{x_i^2\} = s^2$ и

$$\sigma_n^2 = E\{S_n^2\} = \sum_{i=1}^n s_i^2. \quad (3.9)$$

Предположим далее, что когда $\sigma_n \rightarrow \infty$, соблюдается условие Линдберга [94]

$$\frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=1}^n E\{U_i^2\} \rightarrow 1, \quad (3.10)$$

где для каждого $\varepsilon > 0$ величина U_i есть усечённая случайная величина, которая равна x_i , когда $|x_i| \leq \varepsilon \sigma_n$, и нулю в других случаях. Тогда центральная предельная теорема утверждает, что

$$\tilde{S}_n \equiv \frac{S_n}{\sigma_n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{\sigma \sqrt{n}} \quad (3.11)$$

характеризуется гауссовской функцией плотности вероятности с единичной дисперсией

$$P_G(\tilde{S}_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\tilde{S}_n^2}{2}\right). \quad (3.12)$$

Формальное доказательство этого утверждения можно найти в учебниках по теории вероятностей, например у Феллера [56].

Используя два конкретных примера, мы «иллюстрируем» основное утверждение теоремы — постепенную сходимость $P(S_n)$ к гауссовской форме при увеличении n . В наших примерах мы моделируем стохастический процесс S_n , предполагая, что x_i характеризуется (1) двойной треугольной $P(x_i)$ (рис.3.3) или (2) равномерной $P(x_i)$ плотностью вероятности. Как и ожидалось, распределение $P(S_n)$ расширяется при возрастании n .

Мы акцентируем сходимость к гауссовскому асимптотическому распределению посредством построения функции плотности вероятностей с использованием масштабированных единиц, определяемых как

$$\tilde{x} \equiv \frac{x}{n^{1/2}} \quad (3.13)$$

и

$$\tilde{P}(\tilde{x}) \equiv P(\tilde{x})n^{1/2}. \quad (3.14)$$

При анализе масштабированных функций плотности вероятности $\tilde{P}(\tilde{x})$ для больших величин n на рис. 3.3 и рис. 3.4 можно заметить, что распределения быстро сходятся к гауссовской форме с единичной дисперсией (показано в виде гладкой кривой при больших n).

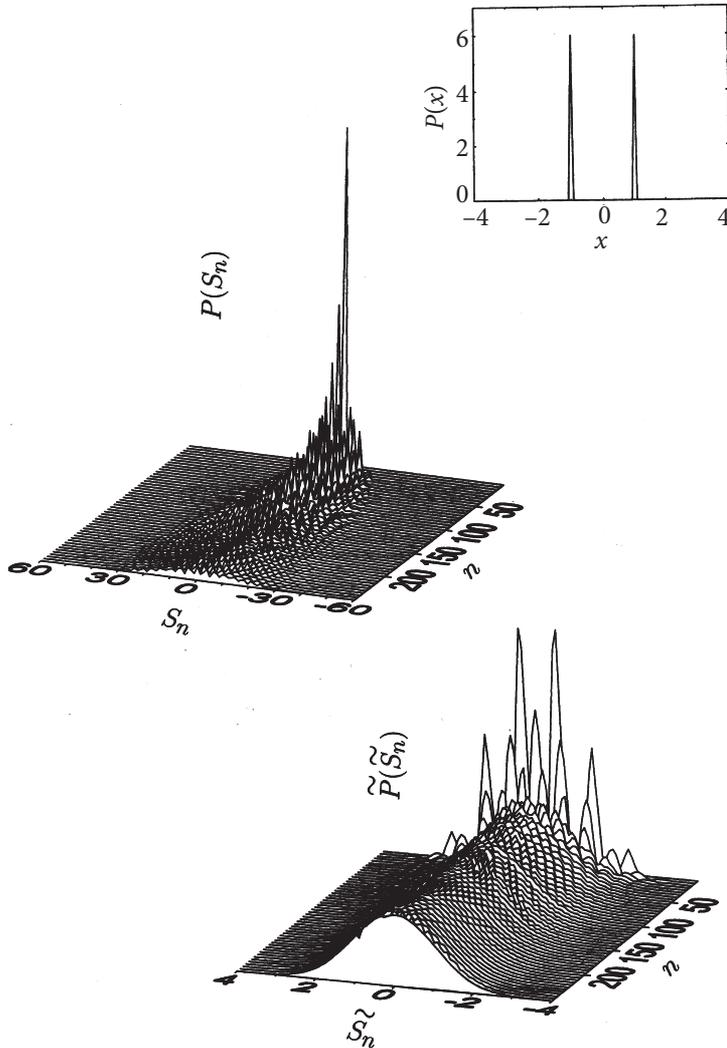


Рис. 3.3. Вверху: моделирование $P(S_n)$ для n в диапазоне от $n = 1$ до $n = 250$ для случая, когда $P(x)$ представляет собой двойную треугольную функцию (врезка). Внизу: то же распределение с использованием масштабных коэффициентов.

Мы подчеркнем фундаментальную гипотезу центральной предельной теоремы: это одновременное требование независимости и конечной дисперсии случайных величин x_i . Когда эти условия

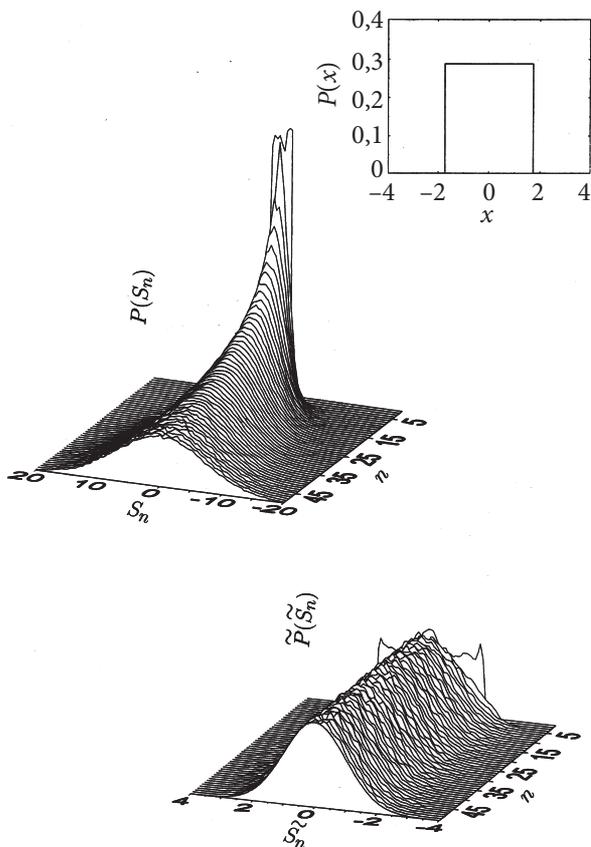


Рис.3.4. Вверху: моделирование $P(S_n)$ для n в диапазоне от $n=1$ до $n=250$ для случая, когда $P(x)$ является равномерным распределением. Внизу: то же распределение с использованием масштабных коэффициентов

не удовлетворяются, должны рассматриваться другие предельные теоремы (см. гл. 4).

3.4. Скорость сходимости

Для независимых случайных величин с конечной дисперсией центральная предельная теорема устанавливает, что S_n будет сходиться к стохастическому процессу с функцией плотности вероятности

$$P_G(S_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n}} \exp\left(-\frac{S_n^2}{2\sigma_n^2}\right). \quad (3.15)$$

Насколько быстро эта сходимость достигается? Чебышев рассмотрел эту проблему суммы S_n независимых идентично распределённых случайных величин x_i . Он доказал [30], что масштабированная функция распределения, заданная как

$$F_n(S) \equiv \int_{-\infty}^S \tilde{P}(\tilde{S}_n) d\tilde{S}_n, \quad (3.16)$$

отличается от асимптотической масштабированной функции нормального распределения $\Phi(S)$ на величину

$$F_n(S) - \Phi(S) \sim \frac{e^{-S^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{Q_1(S)}{n^{1/2}} + \frac{Q_2(S)}{n} + \dots + \frac{Q_j(S)}{n^{j/2}} + \dots \right), \quad (3.17)$$

где $Q_j(S)$ является полиномом по S , коэффициенты которого зависят от первых $j+2$ моментов для случайных величин $\{x_i\}$. Явная форма этого полинома может быть найдена в монографии Гнеденко и Колмогорова о предельных распределениях [66].

Более простое решение было найдено Берри [17] и Эссеном [51]. Их результаты сегодня носят название теорем Берри—Эссена [57]. Эти теоремы дают простой способ определения абсолютного значения разности между масштабированной функцией распределения процесса и асимптотической масштабированной функцией нормального распределения. Однако это различие, даваемое теоремами Берри—Эссена, является менее строгим, чем полученное в решении Чебышева (3.17).

3.4.1. Первая теорема Берри—Эссена

Возьмём независимые величин x_i с общей для них функцией распределения F , так что

$$E\{x_i\} = 0, \quad (3.18)$$

$$E\{x_i^2\} = \sigma^2 > 0, \quad (3.19)$$

$$E\{|x_i|^3\} = \rho < \infty, \quad (3.20)$$

Тогда для всех S и n имеем

$$|F_n(S) - \Phi(S)| \leq \frac{3\rho}{\sigma^3 \sqrt{n}}. \quad (3.21)$$

Неравенство (3.21) говорит о том, что скорость сходимости функции распределения \tilde{S}_n к его асимптотической гауссовской форме, по существу, определяется отношением третьего момента абсолютной величины x_i к кубу его стандартного отклонения.

3.4.2. Вторая теорема Берри—Эссена

Вторая теорема является обобщением, рассматривающим случайные величины, которые могут не быть одинаково распределёнными. Положим x_i независимыми величинами, так что

$$E\{x_i\} = 0, \quad (3.22)$$

$$E\{x_i^2\} = \sigma_i^2, \quad (3.23)$$

$$E\{|x_i|^3\} = r_i, \quad (3.24)$$

и определим

$$s_n^2 \equiv \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2 \quad (3.25)$$

и

$$\rho_n \equiv r_1 + r_2 + \dots + r_n. \quad (3.26)$$

Тогда [57] для всех S и n получим

$$|F_n(S) - \Phi(S)| \leq 6 \frac{\rho_n}{S_n^3}. \quad (3.27)$$

3.5. Область притяжения

Изучение предельных теорем использует концепцию области притяжения вероятностного распределения. Для того чтобы ввести эту концепцию, мы сосредоточим наше внимание на изменениях функциональной формы $P(S_n)$ при изменении n . Ограничим обсуждение идентично распределёнными случайными величинами x_i . Тогда $P(S_1)$ совпадает с $P(x_i)$ и характеризуется выбором случайных величин x_i . Когда n возрастает, $P(S_n)$ изменяет свою функциональную форму и если гипотеза центральной предельной теоремы

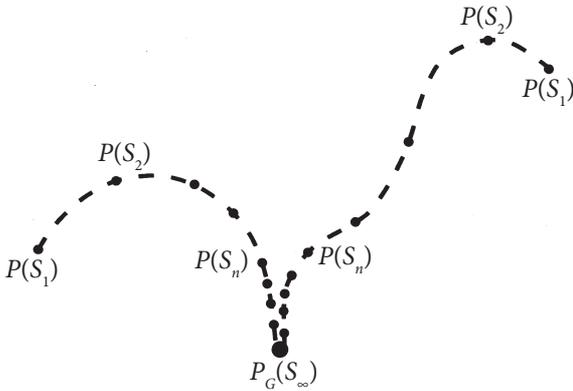


Рис. 3.5. Графическое представление сходимости к гауссовой ФПВ функции $P_G(S_\infty)$ для суммы независимых идентично распределённых случайных величин с конечной дисперсией. Область 1 — равномерная ФПВ. Область 2 — экспоненциальная ФПВ

справедлива, принимает гауссовскую форму функции плотности вероятностей для асимптотически больших величин n . Гауссовская функция плотности вероятности является аттрактором (или фиксированным местом) в функциональном пространстве функций плотности вероятности для всех функций плотности, которые удовлетворяют требованиям центральной предельной теоремы. Множество таких функций плотности составляет область притяжения гауссовской функции плотности вероятности. На рис. 3.5 показано графическое представление движения одновременно равномерного и экспоненциального $P(S_n)$ в функциональном пространстве ФПВ и схема сходимости к гауссовскому аттрактору двух стохастических процессов S_n . Оба стохастических процесса получены суммированием n независимых идентично распределённых случайных величин x_i и y_i . Эти два процесса отличаются своими функциями плотности вероятности, что показано на рис. 3.5 их различными начальными точками движения в функциональном пространстве. Когда n возрастает, обе функции плотности $P(S_n)$ приближаются к гауссовскому аттрактору $P_G(S_\infty)$. Количество шагов, требуемое для достижения сходимости $P(S_n)$ к $P_G(S_\infty)$, определяет скорость сходимости двух типов процессов. Хотя гауссовский аттрактор является наиболее важным аттрактором в функциональном пространстве ФПВ, существуют также другие аттракторы, которые мы рассмотрим в следующей главе.

Глава 4

Стохастические процессы Леви и предельные теоремы

В гл. 3 мы дали краткое введение в концепцию устойчивого распределения, а именно особый тип распределения, образованного суммой n независимых идентично распределённых случайных величин, которое имеет свойство не изменять своей функциональной формы при различных значениях n . В данной главе мы рассмотрим полный класс устойчивых распределений и обсудим их принципиальные свойства.

4.1. Устойчивые распределения

В разд. 3.2 мы установили, что лоренциан и гауссиан являются устойчивыми распределениями. Здесь мы дадим формальное доказательство данного утверждения.

Для лоренцевых случайных величин функция плотности вероятности записывается следующим образом:

$$P(x) = \frac{\gamma}{\pi} \frac{1}{\gamma^2 + x^2}. \quad (4.1)$$

Преобразование Фурье этой функции

$$\varphi(q) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)e^{iqx} dx \quad (4.2)$$

называется характеристической функцией стохастического процесса. Для лоренцева распределения этот интеграл является простым. Подставляя (4.1) в (4.2), получим

$$\varphi(q) = e^{-\gamma|q|}. \quad (4.3)$$

Теорема о свёртке утверждает, что Фурье-преобразование свёртки двух функций есть произведение Фурье-преобразований этих двух функций,

$$\mathcal{F}[f(x) \otimes g(x)] = \mathcal{F}[f(x)]\mathcal{F}[g(x)] = F(q)G(q). \quad (4.4)$$

Для независимых идентично распределённых случайных величин

$$S_2 = x_1 + x_2. \quad (4.5)$$

Функция плотности вероятности $P_2(S_2)$ суммы двух независимых идентично распределённых случайных величин дана свёрткой этих двух функций плотности вероятности

$$P_2(S_2) = P(x_1) \otimes P(x_2). \quad (4.6)$$

В теореме о свёртке предполагается, что характеристическая функция $\varphi_2(q)$ для S_2 задаётся равенством

$$\varphi_2(q) = [\varphi(q)]^2. \quad (4.7)$$

В общем случае

$$P_n(S_n) = P(x_1) \otimes P(x_2) \otimes \dots \otimes P(x_n), \quad (4.8)$$

где S_n задана выражением (3.1). Следовательно,

$$\varphi_n(q) = [\varphi(q)]^n. \quad (4.9)$$

Полезность подхода с позиций характеристической функции может быть проиллюстрирована получением функции плотности вероятности суммы S_2 двух независимых идентично распределённых случайных величин, каждая из которых удовлетворяет (4.1). Применение соотношения (4.6) было бы громоздким, в то время как подход с характеристической функцией является прямым, так как для лоренциана

$$\varphi_2(q) = e^{-2|q|^\gamma}. \quad (4.10)$$

Выполняя обратное преобразование Фурье

$$P(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(q) e^{-iqx} dq, \quad (4.11)$$

получим функцию плотности вероятности

$$P_2(S_2) = \frac{2\gamma}{\pi} \frac{1}{4\gamma^2 + x^2}. \quad (4.12)$$

Функциональная форма $P_2(S_2)$ и в более общих случаях $P_n(S_n)$ есть лоренциан.

Следовательно, лоренцево распределение является устойчивым распределением.

Для гауссовских случайных величин аналогичным выражению (4.1) является функция плотности вероятности

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-x^2/2\sigma^2}. \quad (4.13)$$

Характеристическая функция есть

$$\varphi(q) = e^{-(\sigma^2/2)q^2} = e^{-\gamma q^2} \quad (4.14)$$

где $\gamma \equiv \sigma^2/2$.

Из (4.7) следует

$$\varphi_2(q) = e^{-2\gamma q^2}. \quad (4.15)$$

Применяя обратное преобразование Фурье, получим

$$P_2(S_2) = \frac{1}{\sqrt{8\pi\gamma}} e^{-x^2/8\gamma}. \quad (4.16)$$

Таким образом, гауссовское распределение также является устойчивым. Записывая (4.16) в форме

$$P_2(S_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sqrt{2}\sigma)} e^{-x^2/2(\sqrt{2}\sigma)^2}, \quad (4.17)$$

находим

$$\sigma_2 = \sqrt{2}\sigma. \quad (4.18)$$

Мы убедились, что существуют два устойчивых стохастических процесса: лоренциан и гауссиан. Характеристические функции обоих процессов имеют одинаковую функциональную форму:

$$\varphi(q) = e^{-\gamma|q|^\alpha}, \quad (4.19)$$

где $\alpha = 1$ для лоренциана получается из выражения (4.3) и $\alpha = 2$ для гауссиана из (4.15).

Леви [92] и Хинчин [80] решили общую проблему определения полного класса устойчивых распределений. Они нашли, что наиболее общей формой характеристической функции устойчивого процесса является

$$\ln \varphi(q) = \begin{cases} i\mu q - \gamma|q|^\alpha \left[1 - i\beta \frac{q}{|q|} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} \alpha \right) \right], [\alpha \neq 1] \\ i\mu q - \gamma|q| \left[1 + i\beta \frac{q}{|q|} \frac{2}{\pi} \ln |q| \right], [\alpha = 1] \end{cases}, \quad (4.20)$$

где $0 < \alpha \leq 2$, γ — положительный масштабный фактор, μ — некоторое действительное число и β — параметр асимметрии, лежащий в диапазоне от -1 до $+1$.

Аналитическая форма устойчивого распределения Леви известна только для немногих величин α и β :

- $\alpha = 1/2$, $\beta = 1$ (распределение Леви—Смирнова),
- $\alpha = 1$, $\beta = 0$ (лоренциан),
- $\alpha = 2$ (гауссиан).

Впредь мы рассматриваем только симметричное устойчивое распределение ($\beta = 0$) с нулевым средним ($\mu = 0$). При этих предположениях характеристическая функция представляется в форме уравнения (4.19). Симметричное устойчивое распределение с индексом α и масштабным фактором γ получается из (4.20) и (4.11):

$$P_L(x) \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\gamma|q|^\alpha} \cos(qx) dq. \quad (4.21)$$

Для $\gamma = 0$ и больших значений аргументов ($|x| \gg 0$) справедливо [16]

$$P_L(|x|) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{|x|^{\alpha k + 1}} \sin \left[\frac{k\pi\alpha}{2} \right] + R(|x|), \quad (4.22)$$

где $\Gamma(x)$ — эйлеровская гамма-функция и

$$R(|x|) = o(|x|^{-\alpha(n+1)-1}). \quad (4.23)$$

Из (4.22) мы находим асимптотическое приближение устойчивого распределения с индексом α , справедливое для больших величин $|x|$,

$$P_L(|x|) \sim \frac{\Gamma(1+\alpha)\sin(\pi\alpha/2)}{\pi|x|^{1+\alpha}} \sim |x|^{-(1+\alpha)}. \quad (4.24)$$

Асимптотически при больших x мы получаем степенной закон распределения. Это свойство имеет далеко идущие последствия при определении моментов распределения. Заметим, что $E\{|x|^n\}$ расходится при $n \gg \alpha$, когда $\alpha < 2$. В частности, все устойчивые процессы Леви с $\alpha < 2$ имеют бесконечную дисперсию. Таким образом, негауссовские устойчивые стохастические процессы не имеют характеристического масштаба — их дисперсия бесконечна!

4.2. Скейлинг и самоподобие

Итак, мы пришли к выводу, что распределение Леви является устойчивым. В этом разделе мы докажем, что это устойчивое распределение является самоподобным. Каким образом можно перемасштабировать негауссовское устойчивое распределение, чтобы обнаружить его самоподобие? Один путь состоит в том, чтобы рассмотреть «вероятность возврата к началу» (т. е. плотность вероятности в нулевой точке для суммы n случайных величин), $P(S_n = 0)$, которую мы получаем, стартуя с характеристической функции

$$\varphi_n(q) = e^{-n\gamma|q|^\alpha}. \quad (4.25)$$

Из (4.11) имеем

$$P(S_n) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-n\gamma|q|^\alpha} \cos(qS_n) dq. \quad (4.26)$$

Следовательно,

$$P(S_n = 0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-n\gamma|q|^\alpha} dq = \frac{\Gamma(1/\alpha)}{\pi\alpha(\gamma n)^{1/\alpha}}. \quad (4.27)$$

Распределение $P(S_n)$ нужным образом перемасштабируется посредством определения

$$\tilde{P}(\tilde{S}_n) \equiv P(S_n)n^{1/\alpha}. \quad (4.28)$$

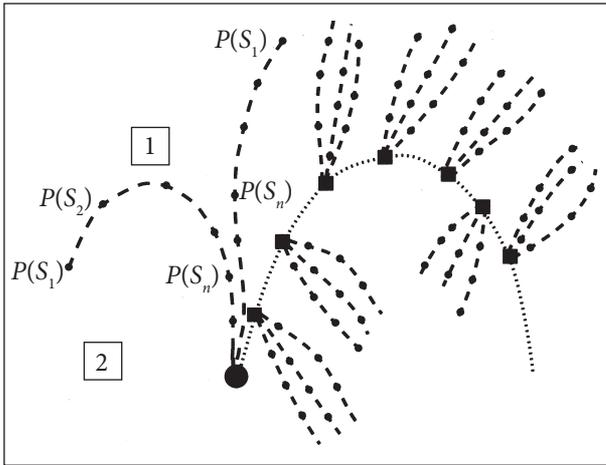


Рис. 4.1. Графическое представление процесса сходимости (по вероятности) к устойчивым аттракторам суммы независимых идентично распределенных случайных величин. Чёрный кружок — гауссовский аттрактор, чёрные квадраты — устойчивые по Леви негауссовские аттракторы, характеризующиеся различными величинами индекса α . Область 1 — экспоненциальная ФПВ. Область 2 — равномерная ФПВ

Нормализзация

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{P}(\tilde{S}_n) d\tilde{S}_n = 1 \quad (4.29)$$

предполагается, если

$$\tilde{S}_n \equiv \frac{S_n}{n^{1/\alpha}}. \quad (4.30)$$

Когда $\alpha = 2$, эти скейлинговые отношения совпадают с теми, которые мы использовали для гауссовского процесса в гл. 3, а именно в уравнениях (3.13) и (3.14).

4.3. Предельная теорема для устойчивых распределений

В предыдущей главе мы обсудили центральную предельную теорему и отметили, что гауссовское распределение является аттрактором в функциональном пространстве вероятностных

распределений. Гауссовское распределение является особенным устойчивым распределением; это единственное устойчивое распределение, все моменты которого конечны. Тогда естественно спросить: не являются ли также негауссовские устойчивые распределения аттракторами в функциональном пространстве вероятностных распределений? Ответ утвердительный. Существует предельная теорема [65, 66], утверждающая, что плотность распределения вероятности (ФПВ) суммы независимых идентично распределённых (н.и.р.) случайных величин x_i сходится по вероятности к устойчивому распределению при определённых требованиях к ФПВ. случайных величин x_i . Рассмотрим стохастический процесс $S_n = \sum_{i=1}^n x_i$ где x_i — н.и.р. случайные величины. Предположим

$$P(x_i) \sim \begin{cases} C_- |x_i|^{-(1+\alpha)} & \text{при } x \rightarrow -\infty \\ C_+ |x_i|^{-(1+\alpha)} & \text{при } x \rightarrow +\infty \end{cases}, \quad (4.31)$$

и

$$\beta \equiv \frac{C_+ - C_-}{C_+ + C_-}. \quad (4.32)$$

Тогда $\tilde{P}(\tilde{S}_n)$ приближается к устойчивому негауссовскому распределению $P_L(x)$ с индексом α и параметром асимметрии β ; $P(S_n)$ принадлежит к области притяжения $P_L(x)$.

Так как α есть непрерывный параметр в диапазоне $0 < \alpha \leq 2$, бесконечное количество аттракторов имеет место в функциональном пространстве вероятностных распределений. Они включают в себя множество всех устойчивых распределений. Рис. 4.1 показывает схематически эти различные аттракторы, а также сходимость определённого числа стохастических процессов к асимптотически притягивающему вероятностному распределению. Важное различие наблюдается между гауссовским аттрактором и устойчивыми негауссовскими аттракторами: в гауссовской области аттракторов мы имеем дело со случайными величинами с конечной дисперсией, в то время как случайные величины с бесконечной дисперсией наблюдаются в областях негауссовских аттракторов. Мы увидели, что стохастические процессы с бесконечной дисперсией характеризуются распределениями с хвостами по степенному закону. Следовательно, такие распределения с хвостами, изменяющимися по степенному закону, существуют в устойчивых негауссовских областях притяжения.

4.4. Распределение по степенному закону

Имеют ли степенные законы распределения глубокий смысл или они бессмысленны? Математически они имеют смысл несмотря на расходящиеся моменты. Физически они бессмысленны для конечных («изолированных») систем. Например, бесконечный второй момент в теории равновесной статистической механики приводил бы к бесконечной температуре.

Но как насчёт открытых («не изолированных») систем? Действительно, Бернулли рассмотрел случайные величины с бесконечными математическими ожиданиями в описании справедливой игры «Санкт-Петербургский парадокс», в то время как Парето нашёл степенной закон распределения эмпирически при описании доходов. Мандельброт использовал степенной закон распределения в описании экономических и физических систем.

Степенные законы распределения противоречат интуиции, потому что они не имеют характеристического масштаба. Обычно примеры случайных величин с бесконечными математическими ожиданиями рассматривались как парадоксы — до работ Леви. Выдающимся примером является «Санкт-Петербургский парадокс». Н. Бернулли ввёл эту игру в начале 1700-х годов и написал о ней в «Комментариях Санкт-Петербургской Академии» [56].

4.4.1. Санкт-Петербургский парадокс

Банкомёт бросает монету $n + 1$ раз. Игрок выигрывает 2^{n-1} монет, если n «орлов» выпадает перед первой «решкой». Результаты будут ясны из следующей таблицы:

Количество бросаний, n	Количество иыгрышей подряд	Вероятность	Ожидаемый выигрыш
1	1	1/2	1*1/2
2	2	1/4	2*1/4
3	4	1/8	4*1/8
...
n	2^{n-1}	$1/2^n$	1/2
...

Накопленный ожидаемый выигрыш будет: $1/2 + 1/2 + \dots = \infty$. Каким количеством монет должен рискнуть игрок? По определению справедливой игры каждый участник должен решить: как долго

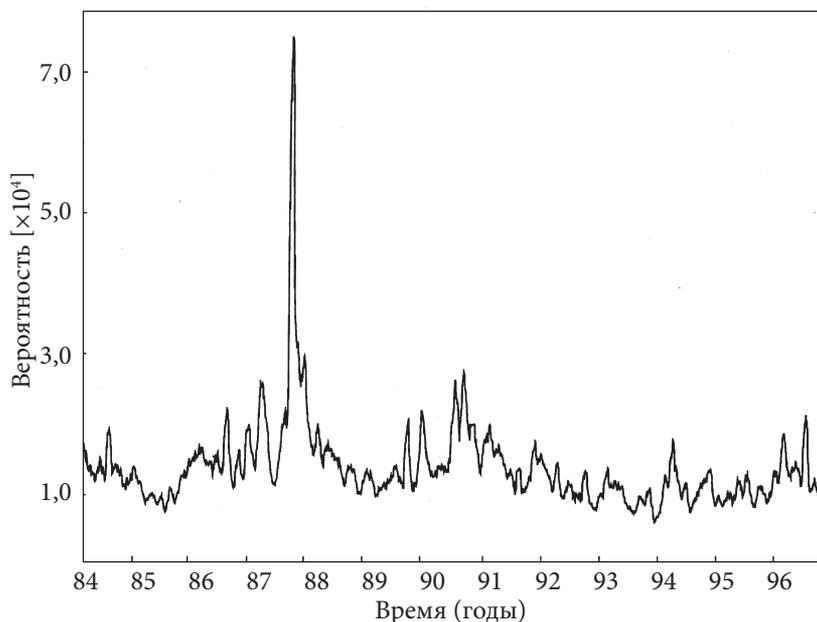


Рис. 4.2 Ежемесячная волатильность индекса S&P 500, рассчитанная для 13-летнего периода, с января 1984 г. по декабрь 1996 г. (с любезного разрешения П. Гопикришнана)

он готов играть. В частности, банкомёт осведомляется о его (участника) ожидаемой потере — ведь это может быть бесконечное количество монет. Игрок не соглашается, потому что он предполагает, что он не выиграет бесконечное количество монет с вероятностью единица (две монеты или меньше с вероятностью $\frac{3}{4}$, четыре монеты или меньше с вероятностью $\frac{7}{8}$ и т. д.). Два участника не могут прийти к соглашению. Почему? «Современный» ответ состоит в том, что они пытаются определить характеристический масштаб для проблемы, которая такового не имеет!

4.4.2. Степенные законы в конечных системах

В настоящее время распределения по степенному закону используются в описании открытых систем. Однако наблюдаемый скейлинг часто ограничен эффектом конечного размера или другим ограничением внутри системы. Хорошим примером плодотворности использования степенных законов и трудности их

использования являются критические явления [147]. Корреляционные функции степенных законов наблюдаются в критическом состоянии бесконечной системы, но если система конечна, ее конечность ограничивает диапазон, внутри которого наблюдается поведение по степенному закону. Несмотря на это ограничение, введение и использование концепции скейлинга — которая относится к природе корреляции по степенному закону — является решающей для понимания критического явления даже тогда, когда рассматривается конечная система [59].

4.5. Статистика ценовых изменений

В этой книге мы рассматриваем предельные теоремы теории вероятностей, чтобы получить теоретическую модель, которая сообщает нам, какого рода распределение мы должны ожидать для ценовых изменений на финансовых рынках. Устойчивые негауссовские распределения представляют интерес потому, что они подчиняются предельным теоремам. Однако не следует ожидать наблюдения распределений ценовых изменений, которые устойчивы. Причина заключается в гипотезах, подразумеваемых в предельной теореме, а именно: случайные величины $\{x_i\}$ 1) никоим образом не зависят друг от друга и 2) одинаково распределены. Гипотеза (1) хорошо проверяема на временных горизонтах от нескольких минут до нескольких лет. Однако гипотеза (2) вообще не проверяема эмпирическим наблюдением, потому что, например, стандартное отклонение ценовых изменений сильно зависит от времени. Это явление известно в финансах как волатильность [143] (пример показан на рис. 4.2).

Более подходящая предельная теорема основана только на предположении независимости случайных величин x_i , она не требует идентичности распределений. Предельная теорема, применимая для суммы S_n независимых случайных величин $\{x_i\}$ была впервые представлена Баули и Хинчиным [66, 81], которые рассмотрели класс предельных законов для суммы S_n n независимых бесконечно малых случайных величин. «Бесконечно малая величина» использована здесь как технический термин, означающий, что сумма S_n не содержит единственной стохастической переменной x_i , которая доминирует в этой сумме. Тогда теорема Хинчина утверждает, что необходимо и достаточно, чтобы $F_n(S)$ — функция предельного распределения — была бесконечно делимой.

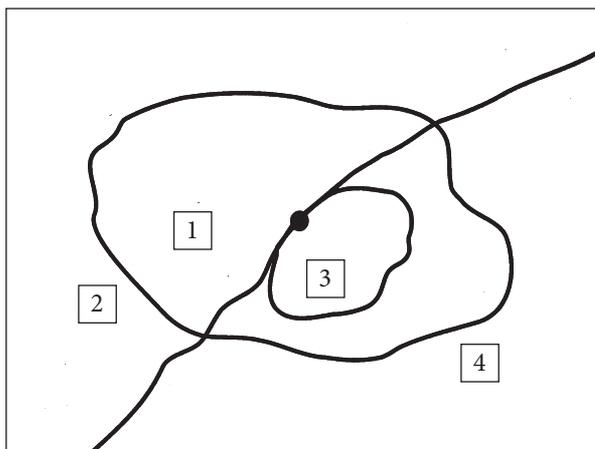


Рис 4.3. Иллюстративная схема классификации случайных процессов, обсуждаемых в этой главе. Сплошной чёрный кружок обозначает место устойчивого гауссовского процесса. Область 1 — бесконечно делимые случайные процессы. Область 2 — конечные моменты. Область 3 — устойчивые процессы. Область 4 — бесконечные моменты

4.6. Бесконечно делимые случайные процессы

Случайный процесс y является бесконечно делимым, если для любого натурального числа k он может быть задан как сумма k независимых идентично распределенных случайных величин $\{x_i\}$. Функция распределения $F(y)$ является бесконечно делимой, тогда и только тогда, когда характеристическая функция $\varphi(q)$ является (для каждого натурального числа k) k -й степенью некоторой характеристической функции $\varphi_k(q)$. В формальных терминах

$$\varphi(q) = [\varphi_k(q)]^k \quad (4.33)$$

с требованиями: 1) $\varphi_k(0) = 1$ и 2) $\varphi_k(q)$ непрерывна.

4.6.1. Устойчивые процессы

Нормально распределённая случайная величина $\{y\}$ является бесконечно делимой, потому что из (4.14) имеем

$$\varphi_k(q) = \exp\left[i\mu q - \frac{\sigma^2}{2} q^2\right]. \quad (4.34)$$

Отсюда следует, что решением функционального уравнения (4.33) является

$$\varphi_k(q) = \exp\left[\frac{i\mu q}{k} - \frac{\sigma^2}{2} q^2\right]. \quad (4.35)$$

Симметричная устойчивая случайная величина бесконечно делима. Действительно, из (4.20) при $\beta = 0$ имеем

$$\varphi(q) = \exp[i\mu q - \gamma|q|^\alpha]. \quad (4.36)$$

Так что

$$\varphi_k(q) = \exp\left[\frac{i\mu q}{k} - \frac{\gamma}{k}|q|^\alpha\right]. \quad (4.37)$$

4.6.2. Пуассоновский процесс

Пуассоновский процесс $P(m; \lambda) = e^{-\lambda}(\lambda^m/m!)$ при $m = 0, 1, \dots, n$ имеет характеристическую функцию

$$\varphi_k(q) = \exp[\lambda(e^{iq} - 1)], \quad (4.38)$$

поэтому из (4.33) имеем

$$\varphi_k(q) = \exp\left[\frac{\lambda}{k}(e^{iq} - 1)\right]. \quad (4.39)$$

4.6.3. Гамма-распределенные случайные величины

Гамма-распределение имеет функцию плотности вероятности

$$P(x) = \frac{e^{-x} x^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}. \quad (4.40)$$

Для $x \geq 0$ и $0 < \nu, \infty$ характеристической функцией будет

$$\varphi(q) = (1 - iq)^{-\nu}, \quad (4.41)$$

поэтому из (4.33) получим

$$\varphi_k(q) = (1 - iq)^{-\nu/k}. \quad (4.42)$$

4.6.4. Равномерно распределённые случайные величины

Класс бесконечно делимых случайных процессов достаточно широк, но существуют различные стохастические процессы, которые не бесконечно делимы. Примером является случайный процесс с равномерным распределением

$$P(x) = \begin{cases} 0 & x < -l \\ 1/2l & -l \leq x \leq l. \\ 0 & x > l \end{cases} \quad (4.43)$$

В этом случае имеет место следующая характеристическая функция:

$$\varphi(q) = \frac{\sin(ql)}{ql}, \quad (4.44)$$

и этот процесс не бесконечно делим, потому что k -й корень не существует.

4.7. Выводы

На рис. 4.3 дана схематическая иллюстрация некоторых важных классов стохастических процессов, обсуждаемых в этой главе.

Класс бесконечно делимых случайных процессов — это большой класс, который включает в себя класс устойчивых случайных процессов. Бесконечно делимые случайные процессы могут иметь конечную или бесконечную дисперсию. Устойчивые негауссовские случайные процессы имеют бесконечную дисперсию, в то время как гауссовский процесс является единственным устойчивым процессом с конечной дисперсией.

Эмпирические наблюдения в совокупности с предельными теоремами теории вероятностей позволяют сделать заключение, что функция плотности вероятности (ФПВ) ценовых изменений должна сходиться к бесконечно делимой ФПВ для длинных временных горизонтов. Следовательно, предельная теорема Хинчина утверждает, что для больших величин n распределение ценовых изменений является хорошо определенным, несмотря на тот факт, что стохастический процесс ценовых изменений $Z(t)$ в момент времени t может быть охарактеризован посредством параметров и функциональных форм, которые t -зависимы. Более того, тео-

рема Хинчина утверждает, что распределение $P(Z)$ близко к бесконечно делимой ФПВ и степень сходимости увеличивается при возрастании n . Следовательно, ФПВ ценовых изменений на длинных временных горизонтах может рассматриваться в терминах суммы независимых идентично распределенных случайных величин. Даже в присутствии флуктуаций волатильности возможно моделировать ценовые изменения в терминах по-новому определенных независимых идентично распределенных случайных величин. Эти случайные величины определены уравнением (4.33). Однако следует помнить, что информация, полученная из такого случайного процесса, применима к ФПВ для длинных временных горизонтов, но не к локальным временным масштабам.

Глава 5

Меры (единицы измерения) в финансовых данных

Поистине гигантские количества финансовых данных записываются и сохраняются в компьютерах. Действительно, теперь каждая транзакция на каждом финансовом рынке во всем мире тем или иным способом записывается. Природа и формат этих данных зависят от рассматриваемого финансового актива и особенностей организации, собирающей эти данные. Данные записываются:

- как дневные — с XIX в. (рис. 5.1 приведен для примера),
- как минутные данные — или меньше — с 1984 г. (рис. 5.2),
- как тиковые (в моменты транзакций) с 1993 г. (рис. 5.3).

Статистический анализ финансовых данных выполняется с тех пор как начали вести записи этих данных. Начиная с 50-х годов, когда стала возможной компьютерная обработка данных,

	890821	16.62	16.75	16.12	16.19	19800	0	
Дата ←	890822	16.19	16.31	16.12	16.31	17884	0	
	890823	16.31	16.56	16.31	16.56	23044	0	→ Информация
	890824	16.56	17.00	16.62	17.00	29916	0	
	890825	17.00	17.00	16.75	16.75	14964	0	
	890828	16.75	16.88	16.62	16.88	13160	0	
	890829	16.88	17.00	16.75	16.81	13516	0	
	890830	16.81	16.88	16.56	16.62	17532	0	
	890831	16.62	16.62	16.44	16.62	14544	0	→ Объем
Y _{открытия} ←	890901	16.62	16.88	16.50	16.81	14328	0	
	890905	16.81	16.62	16.38	16.38	20272	0	
	890906	16.38	16.44	16.06	16.19	29308	0	
	890907	16.19	16.25	16.12	16.19	17512	0	
	890908	16.19	16.12	15.81	15.94	21868	0	
	890911	15.94	15.88	15.62	15.75	28104	0	
	890912	15.75	15.94	15.69	15.88	15752	0	→ Y _{закрытия}
	890913	15.88	15.94	15.56	15.56	26232	0	
Y _{максимальная} ←	890914	15.56	16.00	15.50	15.88	18672	0	
	890915	15.88	16.06	15.69	15.75	55072	0	
	890918	15.75	15.75	15.62	15.69	17392	0	
	890919	15.69	15.81	15.62	15.62	17440	0	
	890920	15.62	15.69	15.56	15.62	16448	0	→ Y _{минимальная}
	890921	15.62	15.62	15.31	15.31	19504	0	

Рис. 5.1. Ежедневные данные о ценах акций компании Кока-Кола (Coca Cola Co.). Записи показывают дату, цену открытия, максимальную и минимальную цену за день, цену закрытия, объем торгов за день, а также дополнительную информацию

871019 in x89x	89 in 87110835480028179	0
871019 in x89x	89 in 87110835530028171	0
871019 in x89x	89 in 87110836080028167	0
871019 in x89x	89 in 87110836240028162	0
871019 in x89x	89 in 87110837380028113	0
871019 in x89x	89 in 87110838080028084	0
871019 in x89x	89 in 87110838330028081	0
871019 in x89x	89 in 87110838500028076	0
871019 in x89x	89 in 87110838570028074	0
871019 in x89x	89 in 87110839530028063	0
871019 in x89x	89 in 87110840210028061	0
Дата ← 871019 in x89x	89 in 87110840300028041	0
871019 in x89x	89 in 87110840530028036	0
871019 in x89x	89 in 87110840530028043	0
871019 in x89x	89 in 87110841530028016	0
871019 in x89x	89 in 87110841560028020	→ S&P 500
871019 in x89x	89 in 87110841580028016	0
Код товара ← 871019 in x89x	89 in 87110842070028011	0
871019 in x89x	89 in 87110842230028005	0
871019 in x89x	89 in 87110842450028003	0
871019 in x89x	89 in 87110843080027994	0
871019 in x89x	89 in 87110843530027985	0
871019 in x89x	89 in 87110844080027983	→ Время _{чмс}
871019 in x89x	89 in 87110844390027972	0
871019 in x89x	89 in 87110844440027965	0
871019 in x89x	89 in 87110845080027972	0
871019 in x89x	89 in 87110845170027952	0
871019 in x89x	89 in 87110845430027948	0
871019 in x89x	89 in 87110845530027945	0
871019 in x89x	89 in 87110846230027940	0
871019 in x89x	89 in 87110846230027939	0
871019 in x89x	89 in 87110846460027935	0

Рис. 5.2. Высокочастотные данные значений индекса S&P 500. Записи содержат информацию о значении индекса для каждого момента времени, на который он был рассчитан

в финансовый анализ вовлекалось все больше и больше финансовых записей. Например, изученные Мандельбротом цены на хлопок за 1963 г. [102] содержали $\approx 2 \times 10^3$ записей, анализ котировок 1995 г. S&P 500 содержал $\approx 5 \times 10^5$, а недавнее изучение тиковых данных [67] использовало 4×10^7 относительных ценовых изменений акций 1000 крупнейших компаний, торгуемых на NYSE.

Статистический анализ рыночных данных является важным, как для понимания рыночной динамики цен, так и с прикладной точки зрения — для оценивания опционов и управления портфелем акций. В этой главе мы рассмотрим некоторые особенности финансовых данных, меры и единицы их измерения. В действительности роль мер и единиц измерения в финансах и физике достаточно различна. Это различие мы обсудим в деталях.

Filtering: O&A standard filter for historical tests

date	time	price	country	filter
city Good (1) or Bad (0)				
CCYY-MM-DD (GMT)	bid	ask	bank	
1992-10-01	00:01:02	84.90 84.95	702 01	0041 1
1992-10-01	00:05:18	84.93 84.96	036 02	0032 1
1992-10-01	00:07:10	84.92 84.97	344 01	0136 1
1992-10-01	00:11:32	84.95 85.00	344 01	0089 1
1992-10-01	00:16:34	84.96 85.01	344 01	0136 1
1992-10-01	00:16:50	84.98 85.03	344 01	0136 1
1992-10-01	00:17:26	85.00 85.05	344 01	0136 1
1992-10-01	00:18:16	84.95 85.00	392 01	0033 1
1992-10-01	00:20:00	84.96 85.01	344 01	0136 1
1992-10-01	00:20:18	84.95 85.00	344 01	0437 1
1992-10-01	00:21:06	84.95 85.00	702 01	0055 1
1992-10-01	00:23:00	85.00 85.05	344 01	0136 1
1992-10-01	00:23:18	85.02 85.07	344 01	0136 1
1992-10-01	00:23:36	85.00 85.05	702 01	0055 1
1992-10-01	00:23:56	84.96 85.01	344 01	0136 1

Рис. 5.3. Высокочастотные котировки на рынке иностранных валют, собранные компанией Olsen & Associates Corporation. Записи включают в себя время (по Гринвичу, GMT), цену спроса и цену предложения на сделки по Японской Йене/Немецкой Дойчмарке, а также информацию о стране, городе и финансовом учреждении, выставившем котировку

5.1. Единицы измерения цен на финансовых рынках

В физике проблема единиц измерения является одной из основных в теоретических и экспериментальных работах. Непрерывно предпринимаются усилия найти оптимальное соотношение единиц и улучшить точность их определения [33, 40]. Раздел физики — метрология — изучает исключительно только эту проблему: большое количество специализированных институтов метрологии существует во всем мире. В финансах же почти обратный случай. Используемые единицы измерения цен финансовых инструментов задаются в денежных единицах (валютах разных стран), которые сами флуктуируют во времени, и транзакции происходят в случайные моменты времени и со случайной интенсивностью. По этой причине большое внимание должно быть уделено тому, чтобы выбрать для изучения динамики цен наиболее подходящие величины, принимая в расчет все плюсы и минусы, связанные с каждым возможным их выбором.

Здесь мы впервые рассматриваем проблему ценовых мер. В следующем разделе мы рассмотрим проблему временных шкал.

Единицы измерения цен финансовых инструментов обычно выражают в валюте страны, в которой расположен исследуемый

финансовый рынок. Котировка валюты не постоянна во времени. Валютный курс может изменяться во времени по следующим причинам:

- инфляция,
- экономический рост или экономический спад,
- флуктуации на международном валютном рынке.

Примеры некоторых макроэкономических записей даны на рис. 5.4 и рис. 5.5. На рис. 5.4 показана таблица годовых изменений (в %) внутреннего валового продукта в различных индустриальных странах, выраженного в ценах 1980 г. Экономический рост в стране сам по себе случайная величина. На рис. 5.5 показаны месячные данные американского индекса потребительских цен за период с 1972 г. по 1986 г. Для этого экономического индикатора периоды высоких уровней инфляции сменялись периодами низких уровней. Для экономических индикаторов разработано много статистических показателей, характеризующих эти индикаторы.

Определим через $Y(t)$ цену финансового актива в момент времени t . Какая стохастическая величина подходит для нашего исследования? Здесь возможен выбор, и каждый вариант имеет свои преимущества и недостатки.

1. Можно исследовать ценовые изменения

$$Z(t) \equiv Y(t + \Delta t) - Y(t). \quad (5.1)$$

										GDP at Constant Prices	
1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	99 bp x	
4.1	3.7	2.2	1.7	1.2	2.1	4.1	2.9	World	001
4.0	3.2	1.4	1.5	1.1	2.6	4.5	3.1	3.0	3.0	Industrial Countries	110
5.2	2.1	-2	2.0	-2.5	3.7	6.6	3.0	3.8	3.1	United States.....	111
4.2	3.7	1.5	3.0	-3.4	3.7	6.1	4.3	3.0	Canada*	156
.8	3.4	3.4	2.0	3.1	.4	6.7	5.5	1.8	4.4	Australia.....	193
5.2	5.3	4.3	3.7	3.1	3.2	5.1	4.7	2.5	4.4	Japan*	158
—	2.7	.7	1.4	3.1	.1	6.6	1.5	New Zealand	196
.5	4.7	3.0	-.1	1.1	2.2	1.4	2.8	1.7	1.3	Austria.....	122
2.9	2.2	4.1	-1.3	1.5	.1	2.0	1.4	2.4	1.7	Belgium.....	124
1.5	3.5	-.4	-.9	3.0	2.5	4.4	4.2	3.3	-1.0	Denmark	128
2.2	7.3	5.4	1.6	3.6	3.0	3.3	3.5	2.4	Finland	172
3.3	3.2	1.6	1.2	2.5	.7	1.3	1.7	2.1	2.2	France	132
3.0	4.1	1.7	.2	11.7	1.5	2.8	2.1	2.6	1.8	Germany	134
5.9	5.0	-4.2	1.6	-1.5	-5.5	2.7	10.1	6.3	5.5	Iceland*	176
7.2	3.1	3.1	3.3	2.3	-1.1	3.8	1.1	-.3	Ireland	178
2.7	4.9	3.9	1.1	-.2	1.0	3.2	2.8	2.9	3.1	Italy.....	136
4.7	4.0	-.9	.5	1.5	2.4	5.7	3.9	3.4	Luxembourg	137
2.5	2.4	.9	-.7	-1.4	1.4	3.2	2.3	2.4	2.2	Netherlands	138
4.5	5.1	14.2	.9	.3	4.6	15.7	5.3	14.2	1.3	Norway	142
1.8	.2	1.5	-.2	1.2	1.8	1.9	2.1	3.6	Spain	184
1.8	3.8	1.7	-.3	.8	2.4	3.9	2.1	1.2	2.8	Sweden.....	144
.4	2.5	4.6	1.5	-1.1	.7	2.1	3.7	2.8	Switzerland	146
3.9	2.1	-2.1	-.9	1.1	3.5	2.1	3.9	2.9	3.6	United Kingdom	112

Рис. 5.4. Ежегодные процентные изменения валового продукта (ВВП) нескольких стран за 10-летний период; данные получены из Международной Финансовой Статистики (Международный Валютный Фонд, 1988), стр. 165

	Jan	Feb	Mar	Apr	May	June	July	Aug	Sept	Oct	Nov	Dec
1972	49.9	50.2	50.2	50.4	50.5	50.6	50.9	50.9	51.1	51.3	51.4	51.6
1973	51.7	52.1	52.6	53.0	53.3	53.6	53.8	54.7	54.9	55.3	55.8	56.1
1974	56.6	57.3	58.0	58.3	59.0	59.5	60.0	60.7	61.5	62.0	62.5	63.0
1975	63.2	63.7	63.9	64.3	64.5	65.1	65.8	66.0	66.3	66.7	67.1	67.4
1976	67.5	67.7	67.9	68.2	68.6	68.9	69.3	69.7	69.9	70.2	70.4	70.6
1977	71.0	71.8	72.2	72.8	73.2	73.7	74.0	74.3	74.6	74.8	75.1	75.4
1978	75.9	76.3	76.9	77.6	78.3	79.1	79.7	80.1	80.8	81.4	81.8	82.2
1979	82.9	83.9	84.7	85.7	86.8	87.8	88.7	89.6	90.5	91.3	92.2	93.2
1980	94.5	95.8	97.2	98.3	99.2	100.3	100.4	101.1	102.0	102.9	103.8	104.7
1981	105.6	106.6	107.4	108.1	109.0	109.9	111.2	112.0	113.2	113.4	113.7	114.1
1982	114.5	114.8	114.7	115.2	116.3	117.7	118.4	118.6	118.8	119.2	119.0	118.5
1983	118.8	118.8	118.9	119.7	120.4	120.8	121.3	121.7	122.3	122.6	122.8	123.0
1984	123.7	124.2	124.5	125.1	125.5	125.9	126.3	126.8	127.4	127.8	127.8	127.8
1985	128.1	128.6	129.2	129.7	130.2	130.6	130.8	131.1	131.5	131.9	132.3	132.7
1986	133.1	132.7	132.1	131.8	132.2	132.9	132.9	133.1	133.8	133.9	134.0	134.2

Рис. 5.5. Ежемесячный индекс потребительских цен в США за 15-летний период с 1972 г. по 1986 г., нормированный к значению 100 USD для 1980 г. Данные из Международной Финансовой Статистики. Приложение к Статистике Цен (Международный Валютный Фонд, 1986) стр. 70

Достоинство этого подхода состоит в том, что нелинейные или стохастические преобразования не требуются. Однако в этом случае на величину $Z(t)$ влияет нестабильность меры измерения.

2. Альтернативно можно анализировать ценовые изменения, приведенные к определенному моменту времени с помощью дисконтирования или с учетом дефлятора

$$Z_D(t) \equiv [Y(t + \Delta t) - Y(t)]D(t), \quad (5.2)$$

где $D(t)$ может быть дефляционным или дисконтным множителем. Преимущества этого подхода: а) нелинейные преобразования не являются необходимыми и б) цены задаются в терминах «постоянных» денег — доходы, возможные с безрисковыми инвестициями, вычисляются через дисконтный множитель $D(t)$. Проблема в том, что дефляционные и дисконтные множители непредсказуемы на длительный период, и нет единого метода выбора для $D(t)$.

3. Можно анализировать доходность, определенную как

$$R(t) \equiv \frac{Y(t + \Delta t) - Y(t)}{Y(t)} = \frac{Z(t)}{Y(t)}. \quad (5.3)$$

Достоинство этого подхода состоит в том, что величина $R(t)$ дает значение относительной прибыли или потери за данный временной период. Здесь проблема заключается в том, что данная величина чувствительна к изменению масштаба цен на длинных временных горизонтах.

4. Можно изучать последовательные разности натуральных логарифмов цен

$$S(t) \equiv \ln Y(t + \Delta t) - \ln Y(t). \quad (5.4)$$

Преимущество этого подхода состоит в том, что средняя коррекция, учитывающая нестабильность меры, единицы измерения осуществляется без применения дефляционных или дисконтных множителей. Однако проблемы в следующем: а) учет нестабильности меры был бы корректным только в том случае, если скорость роста экономики оставалась постоянной, но эта скорость тоже флуктуирует, а эти флуктуации не включаются в определение (5.4); б) здесь используется нелинейное преобразование, и нелинейности сильно влияют на статистические свойства стохастического процесса. Заметим, что информация, даваемая выражением $S(t)$, смешивает черты динамики финансового актива вместе с аспектами, включающими флуктуации макроэкономических индикаторов.

Сейчас широко распространен анализ высокочастотных данных в исследовании финансовых институтов. Полезно рассмотреть, как приведенные выше определения интерпретируются в высокочастотном режиме.

Из (5.4) и (5.1) имеем

$$S(t) = \ln \frac{Y(t + \Delta t)}{Y(t)} = \ln \left[1 + \frac{Z(t)}{Y(t)} \right]. \quad (5.5)$$

Для высокочастотных данных Δt мало, и $|Z(t)| \ll Y(t)$. Следовательно,

$$S(t) = \ln \left[1 + \frac{Z(t)}{Y(t)} \right] \approx \frac{Z(t)}{Y(t)} = R(t), \quad (5.6)$$

а так как $Z(t)$ является быстрой переменной, в то время как $Y(t)$ — малоизменяющаяся за время Δt переменная, то

$$\sigma(t) \sim t^\nu, \quad (5.7)$$

где временная зависимость C_1 исчезающе мала. Более того, если общий исследуемый период не очень длинен, то $D(t) \approx 1$, так что

$$Z(t) \approx Z_D(t). \quad (5.8)$$

Суммируя, можно сказать, что для исследований, ограниченных короткими временными периодами, все четыре обобщения, использующие индикаторы, приблизительно равны:

$$S(t) \approx R(t) \approx C_1 Z(t) \approx Z_D(t). \quad (5.9)$$

Однако, для исследований длинных временных периодов должен быть сделан выбор. Наиболее широко используются функции $S(t)$ и $R(t)$.

5.2. Временные шкалы и финансовые рынки

Далее мы рассмотрим проблему выбора подходящей временной шкалы для анализа рыночных данных. Возможными кандидатами для «корректной» временной шкалы могут быть:

- физическое время,
- торговое (или рыночное) время,
- количество транзакций.

Бесспорного выбора тут нет. Так же как и в случае единицы измерения цен, все определения имеют достоинства и недостатки. Когда исследуются ценовые изменения при совершении транзакций, важно заметить, что каждая транзакция, происходящая в случайные моменты времени (см. рис. 5.6), включает случайную величину — объем торгуемого финансового актива.

Физическое время хорошо определено, но фондовые рынки закрываются на ночь, на выходные дни, на каникулы. Подобное ограничение существует также на международных рынках, таких как валютный рынок. Хотя этот рынок активен 24 часа в сутки, социальная организация бизнеса и существующие биологические ритмы налагают на рыночную активность ограничения по времени в каждом финансовом регионе мира. При выборе физического времени мы не знаем, как моделировать стохастическую динамику цен и поступление финансовой информации в продолжение часов, когда рынок закрыт.

Торговое время на бирже хорошо определено — это время ее работы. На рынке Форекс оно совпадает с физическим временем. Исследователи пытались эмпирически определить дисперсию разности логарифмов цен закрытия финансовых рынков. Результаты показали, что эта дисперсия для последовательных рабочих дней примерно на 20% ниже, чем дисперсия, определенная при рассмотрении величин закрытия в конце рабочей

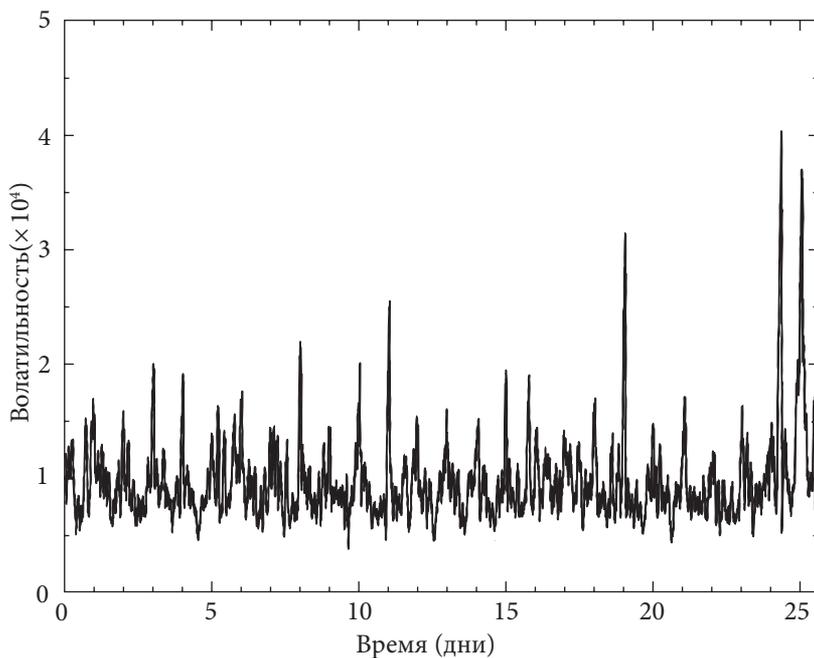


Рис. 5.7. Волатильность (будет обсуждаться в гл. 7) высокочастотных данных индекса S&P 500. Явно прослеживается дневной цикл с периодом 6,5 торговых часов

Это последнее предположение не подтверждается на практике. Торговая активность не одинакова в продолжение торговых часов, как по объемам, так и по количествам контрактов. В рыночной активности наблюдаются дневные циклы: волатильность выше в часы открытия и закрытия, и обычно ниже в середине дня. Как пример, на рис. 5.7 показана внутридневная минутная волатильность индекса S&P 500, определенная в каждый торговый час. Ясно виден дневной цикл с периодом 6,5 торговых часов.

Аналогично, почти периодическое поведение наблюдается в средней активности на валютном рынке (рис. 5.8). В этом случае наблюдается три пика в дневном цикле волатильности котировок, отображающие дневные всплески активности в трех различных регионах мира — Азии, Европе и Америке.

Можно исследовать зависимость поведения рынка от других факторов с целью устранения влияния непостоянства активности во времени. В качестве такого фактора может служить количество

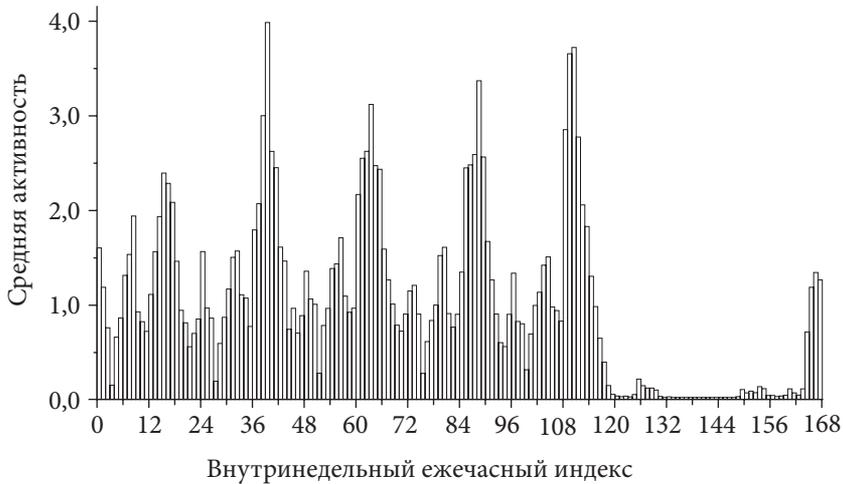


Рис. 5.8. Часовые графики объемов сделок на международном валютном рынке. Наблюдаются внутриденные циклы. Три пика активности в течение каждого торгового дня соответствуют максимумам деловой активности в трех географических регионах — Америке, Азии и Европе. Заимствовано из [41]

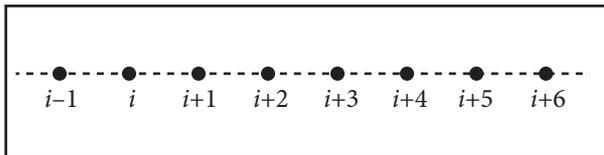


Рис. 5.9. Схематичное изображение процесса появления успешных сделок среди участников сделок

эффективных сделок, совершенных с исследуемым финансовым инструментом. Использование такого фактора также затруднено, так как для статистического анализа необходимы «тиковые» данные по каждой сделке. Тем не менее, такой анализ сегодня можно проводить, потому что «тиковые» данные доступны для некоторых финансовых рынков.

Если «время» определено в терминах количества транзакций (рис. 5.9), то один из источников случайностей, наблюдаемых на финансовых рынках, исключается, а именно промежуток времени между транзакциями. Однако второй источник случайностей — объемы транзакций — остается.

5.3. Выводы

Выбор единицы измерения цен и масштаба времени для анализа и моделирования стохастической динамики цен не является однозначным. Возможны различные варианты выбора, каждый из которых основан на явных фактах или предположениях, которые могут или не могут быть проверены для актива на данный период времени. Эмпирические анализы часто выполняются с небольшими отличиями: (1) в определениях исследуемых переменных, например прибыли и разности логарифмов цен; (2) периодах времени, для которого проводится анализ; (3) в частоте записи данных.

Результаты чувствительны к такому выбору, так что особое внимание должно уделяться сравнению результатов, полученных разными исследователями для различных финансовых инструментов при различных временных условиях. Возможно, это одна из причин того, что характеристика свойств ценовых изменений до сих пор остается неполной несмотря на большое количество эмпирических исследований.

Глава 6

Стационарность и временная корреляция

В этой главе мы рассматриваем степень стационарности, наблюдаемой во временном ряду ценовых изменений на финансовом рынке. Мы обсуждаем различные определения стационарности и рассматриваем те из них, которые наилучшим образом подходят к финансовым данным. Мы принимаем подобный подход, при анализе временной корреляции, а именно вначале обсуждаем классы корреляции краткосрочных и долгосрочных коррелированных стохастических процессов, и затем представляем и обсуждаем некоторые эмпирические исследования финансовых данных. Когда стохастические переменные независимы, стационарность подразумевает, что стохастический процесс $x(t)$ является независимым идентично распределенным.

Статистические наблюдения, характеризующие стохастический процесс, могут быть записаны в терминах статистических свойств n -го порядка. Случай $n = 1$ достаточен для определения среднего значения

$$E\{x(t)\} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} xf(x,t)dx, \quad (6.1)$$

где $f(x, t)$ — плотность вероятности наблюдаемой случайной величины x в момент времени t . Случай $n = 2$ используется для определения автокорреляционной функции

$$E\{x(t_1)x(t_2)\} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1x_2f(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2, \quad (6.2)$$

где $f(x_1, x_2; t_1, t_2)$ — совместная плотность вероятности того, что x_1 наблюдается в момент t_1 и x_2 наблюдается в момент t_2 . Для исчерпывающей характеристики статистических свойств стохастического процесса требуется знание функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$ для

всех x_i , t_i и n . Большинство ситуаций ограничены рассмотрением «двухточечных» функций $f(x_1, x_2; t_1, t_2)$.

6.1. Стационарные стохастические процессы

Стохастический процесс $x(t)$ является стационарным, если функция плотности вероятности (ФПВ) $P[x(t)]$ инвариантна при временном сдвиге. Это определение иногда рассматривалось как самое строгое определение стационарного стохастического процесса, и оно именуется физиками стационарностью в буквальном, строгом смысле слова. Фактически существуют менее строгие определения стационарного стохастического процесса [131]. Примеры этого следующие:

(а) Стационарный стохастический процесс в широком смысле определяется следующими условиями:

$$E\{x(t)\} \equiv \mu, \quad (6.3)$$

$$E\{x(t_1)x(t_2)\} \equiv R(t_1, t_2), \quad (6.4)$$

где $R(t_1, t_2) = R(\tau)$ есть функция $\tau \equiv t_1 - t_2$ и

$$E\{x^2(t)\} = R(0). \quad (6.5)$$

Таким образом, дисперсия процесса $R(0) - \mu^2$ независима от времени.

(б) Асимптотический стационарный стохастический процесс наблюдается тогда, когда статистики случайных величин $x(t_1 + c), \dots, x(t_n + c)$ не зависят от c , если c велико.

(в) Стационарный стохастический процесс n -го порядка имеет место, когда совместная плотность вероятности

$$f(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = f(x_1, \dots, x_n; t_1 + c, \dots, t_n + c) \quad (6.6)$$

имеет место не для каждого n , а только для $n \leq N$.

(г) Стационарный стохастический процесс в интервале имеет место, когда (6.6) справедливо для всех t_i и $t_i + c$ в рассматриваемом интервале.

В конце этой главы, после дискуссии относительно свойств временной корреляции ценовых изменений, мы обсудим, какое определение стационарности больше подходит для ценовых изменений на финансовых рынках.

6.2. Корреляция

Автокорреляционная функция $R(t_1, t_2)$ чувствительна к средней величине стохастического процесса. Для стохастических процессов со средней величиной, отличной от нуля, полезно рассматривать автоковариацию

$$C(t_1, t_2) \equiv R(t_1, t_2) - \mu(t_1)\mu(t_2). \quad (6.7)$$

Для стационарного процесса автоковариация равна

$$C(\tau) = R(\tau) - \mu^2. \quad (6.8)$$

Типичный вид графика $C(\tau)$ для положительно коррелированных стохастических величин есть убывающая функция, которая начинается от $C(0) = \sigma^2$ и оканчивается на $C(\tau) \sim 0$ для больших величин τ (рис. 6.1). Для упрощения и без потери общности мы рассматриваем стохастические процессы с нулевым средним

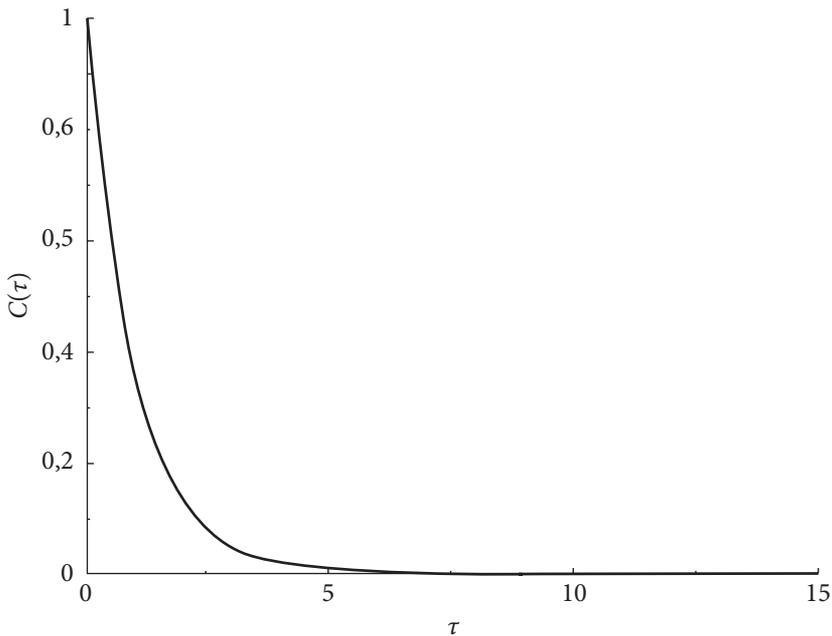


Рис. 6.1. Типичная автокорреляционная функция стохастического процесса с конечной памятью

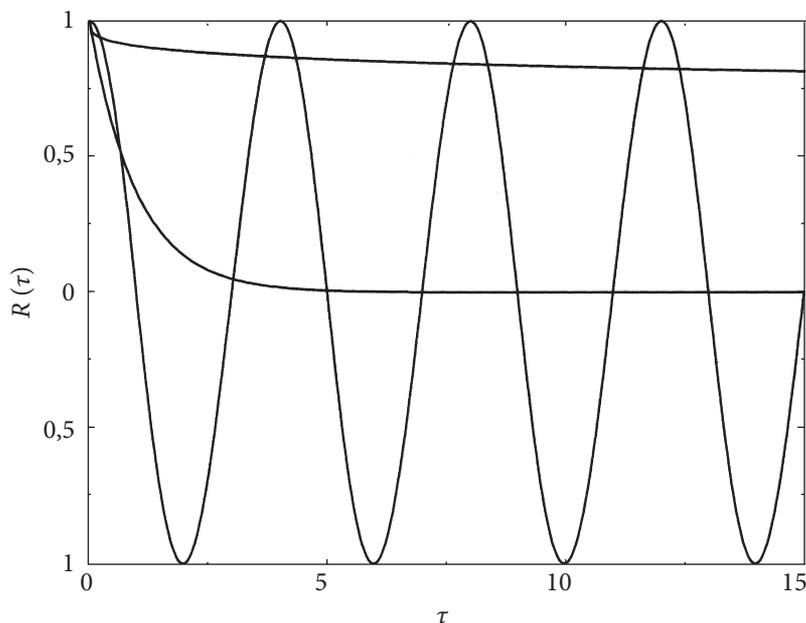


Рис. 6.2. Автокорреляционные функции с типичной шкалой времени и без нее

и единичной дисперсией, $\mu = 0$ и $\sigma^2 = R(0) = 1$. При таком выборе автокорреляция и автоковариационная функция одинаковы.

Теперь мы сосредоточимся на том типе временной памяти, которая может наблюдаться в стохастических процессах. Важным вопросом является характерный масштаб (временная память) автокорреляционной функции. Для стационарных процессов ответ на этот важный вопрос дает рассмотрение интеграла $R(\tau)$. Площадь, расположенная под кривой $R(\tau)$, может принимать три возможных значения (рис. 6.2):

$$\int_0^{\infty} R(\tau) d\tau = \begin{cases} \text{конечное} \\ \text{бесконечное} \\ \text{неопределенное} \end{cases} . \quad (6.9)$$

Когда значение $\int_0^{\infty} R(\tau) d\tau$ конечно, существует типичное время памяти τ_c , называемое корреляционным временем процесса.

Рассмотрим следующие примеры:

Случай (а):

$$R(\tau) = \exp[-\tau/\tau_c]: \int_0^{\infty} \exp\left[\frac{-\tau}{\tau_c}\right] d\tau = \tau_c. \quad (6.10)$$

Случай (в):

$$R(\tau) = \exp[-\tau^v/\tau_0]: \int_0^{\infty} \exp\left[\frac{-\tau^v}{\tau_0}\right] d\tau = \frac{\tau_0^{1/v}}{v} \Gamma\left(\frac{1}{v}\right). \quad (6.11)$$

Случай (с):

$R(\tau) \sim \tau^{\eta-1}$, где, если $0 < \eta \leq 1$, то

$$\int_0^{\infty} \tau^{\eta-1} d\tau = \infty. \quad (6.12)$$

Конечное значение площади под автокорреляционной функцией дает информацию о характерном временном масштабе памяти процесса. Возможно моделировать систему в нулевом приближении, полагая, что корреляция наблюдается до τ^* и отсутствует для $\tau > \tau^*$, где τ^* есть площадь под автокорреляционной функцией. Однако не все интегралы монотонно убывающих функций конечны!

В случае (с) невозможно выбрать временной масштаб, который может отделить режим временной корреляции от режима парной независимости. Случайные переменные, характеризуемые автокорреляционной функцией, как в случае (с), называются длиннодиапазонно коррелированными.

Проведенная выше эвристическая дискуссия может быть формализована [27] для стационарных процессов рассмотрением общего поведения дисперсии суммы S_n n стохастических величин x_i . Из определения (3.1) следует, что

$$E\{S_n^2\} = nE\{x_i^2\} + 2\sum_{k=1}^n (n-k)E\{x_i x_{i+k}\}, \quad (6.13)$$

где k принимает значения от 1 до n и $E\{x_i x_{i+k}\}$ есть коэффициент автокорреляции между величинами x_i и x_{i+k} . Ограничивая нашу дискуссию положительно коррелированными случайными величинами, мы имеем $E\{x_i x_{i+k}\} \geq 0$. Для больших величин n , $E\{S_n^2\}$ удовлетворяет соотношению

$$E\{S_n^2\} \approx n \left(E\{x_i^2\} + 2\sum_{k=1}^n E\{x_i x_{i+k}\} \right). \quad (6.14)$$

В зависимости от поведения второго члена этого соотношения мы имеем два случая:

1. Сумма коэффициентов корреляции конечна для больших величин n , а именно

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n E\{x_i + x_{i+k}\} = \text{const.} \quad (6.15)$$

В этом случае говорят, что случайные величины слабо зависимы, или краткодиапазонно коррелированы. Действительно, для достаточно больших величин n условие $E\{S_n^2\} = (\text{const})n$, справедливое для независимых случайных величин, выполняется.

2. Сумма коэффициентов корреляции расходится

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n E\{x_i + x_{i+k}\} = \infty. \quad (6.16)$$

Когда это условие выполняется, говорят, что случайные величины сильно зависимы или длиннодиапазонно коррелированы. Подобные случайные величины показывают зависимость от n дисперсии S_n , которая сильнее, чем линейность. Длиннодиапазонно коррелированные случайные величины характеризуются отсутствием характерного временного масштаба. Такое поведение наблюдается в стохастических процессах, характеризуемых автокорреляционной функцией, отвечающей степенному закону, как в (6.12).

Мы заметили, что сумма S_n n случайных величин может также выглядеть как стохастический процесс во времени, когда S_t представляет собой случайный процесс, определенный на времени $t = n\Delta t$. В этом случае предел суммы коэффициентов корреляции при $n \rightarrow \infty$ равен $\int_0^{\infty} R(\tau) d\tau$. Следовательно, для зависимых во времени стохастических процессов интеграл автокорреляционной функции может быть использован для отличия краткодиапазонно коррелированных и длиннодиапазонно коррелированных случайных величин.

6.3. Краткодиапазонно коррелированные случайные процессы

В предыдущем разделе мы заметили, что краткодиапазонно коррелированные случайные процессы характеризуются типичной временной памятью. Один простой пример дается стохастиче-

ским процессом, имеющим экспоненциально убывающую автокорреляционную функцию (см. (6.10)). Эта форма описывает, например, статистическую память скорости $v(t)$ броуновской частицы, когда автокорреляционная функция $v(t)$ равна

$$R(\tau) = \sigma^2 e^{-|\tau|/\tau_c}. \quad (6.17)$$

В дополнение к характеристике двухточечных статистических свойств в терминах автокорреляционной функции те же статистические свойства могут быть исследованы с помощью частотных характеристик. С этой точки зрения рассмотрим спектр мощности случайной величины. Спектр мощности стационарного случайного процесса в широком смысле этого термина есть Фурье-преобразование его автокорреляционной функции

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau. \quad (6.18)$$

Для автокорреляционной функции скорости (6.17) спектр мощности равен

$$S(f) = \frac{2\sigma^2\tau_c}{1 + (2\pi f\tau_c)^2} \quad (6.19)$$

Когда $f \ll 1/(2\pi\tau_c)$, спектр мощности практически не зависит от частоты. Тогда для временного окна, намного большего чем τ_c , стохастический процесс является приблизительно белым шумом. Интеграл белого шума, называемый винеровским процессом, есть нестационарный процесс, характеризуемый спектром мощности с функциональной формой

$$S(f) \sim \frac{1}{f^2}. \quad (6.20)$$

Подводя итоги, можно сказать, что краткодиапазонно коррелированные стохастические процессы могут быть охарактеризованы в отношении их статистических свойств второго порядка посредством исследования автокорреляционной функции и/или спектра мощности. Быстро убывающие автокорреляционные функции и спектр мощности, похожий на белый шум (или $1/f^2$ спектр мощности для интегрированной величины) дают приметы краткодиапазонно коррелированных стохастических процессов.

6.4. Длиннодиапазонно коррелированные случайные процессы

Стохастические процессы, характеризуемые степенной автокорреляционной функцией (как в (6.12)), являются коррелированными в больших диапазонах. Степенная автокорреляционная функция наблюдается во многих системах — физических, биологических и экономических. Рассмотрим стохастический процесс со спектром мощности в форме

$$S(f) = \frac{\text{const}}{|f|^\eta} \quad (6.21)$$

при $0 < \eta < 2$. В предыдущем разделе мы видели, что случай $\eta = 0$ соответствует белому шуму, в то время как $\eta = 2$ соответствует винеровскому процессу. Когда $\eta \approx 1$, стохастический процесс характеризуется спектральной плотностью как в (6.21), и называется $1/f$ -шумом, в то время как общий случай, при $0 < \eta < 2$ иногда называют $1/f^\eta$ -шум. $1/f$ -шум наблюдается во многих явлениях, начиная от флуктуаций тока в диодах и транзисторах до флуктуаций транспортного потока на шоссе [46, 79, 103, 136, 156].

Эти стохастические процессы нестационарны. Наблюдая шум в моменты t_1 и t_2 , так что время наблюдения T_{obs} мало в сравнении со временем, протекающим с начала процесса $T_{obs} \ll t_1$, можно оценить автокорреляционную функцию. Рассмотрим конкретный пример, когда источник тока со спектром «белый шум» подключен ко входу одномерной линии сопротивления—конденсатор бесконечной длины. В такой системе для $0 < \eta < 1$ и $\tau > 0$ автокорреляционная функция такого нестационарного стохастического процесса описывается формой, подобной (6.12), используемой для стационарных процессов [79]:

$$R(\tau) \sim |\tau|^{\eta-1}. \quad (6.22)$$

Для $1 < \eta < 2$

$$R(t_2, \tau) \sim t_2^{\eta-1} - C |\tau|^{\eta-1}. \quad (6.23)$$

Наконец, для граничного случая $\eta = 1$ и $0 < \tau \ll t_2$ имеем:

$$R(t_2, \tau) \sim \ln(4t_2) - \ln |\tau|. \quad (6.24)$$

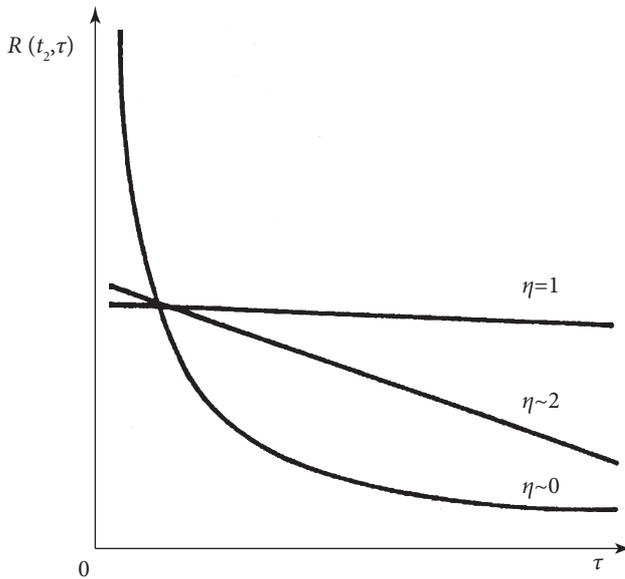


Рис. 6.3. Формы автокорреляционных функций для $1/f^\eta$ -шума для случаев, когда $\eta = 0, 1$ и 2 . По Кешнеру (Keshner) [79]

Типичные формы этих автокорреляционных функций показаны на рис. 6.3. Автокорреляционная функция для $1/f$ -шума не имеет характерного временного масштаба, поэтому $1/f$ -шум является длиннодиапазонно коррелированным стохастическим процессом.

На практике трудно отличить $1/f$ -шум от процесса со многими характеристическими временными масштабами. Как много характеристических временных масштабов требуется, чтобы воспроизвести $1/f$ -шум в данном частотном интервале? Строго говоря, их требуется бесконечное число. Однако, если требуется только конечная точность, то тогда достаточно конечного числа характеристических масштабов. Оценено [79], что плотность $1/f$ спектра мощности может быть воспроизведена с 5% точности посредством линейной системы, в которой налагаются по крайней мере 8 различных временных масштабов, в то время как для 1% точности необходимо минимальное число временных масштабов порядка 40.

6.5. Сравнение краткодиапазонно и длиндиапазонно коррелированных шумов

Если временной масштаб τ_c характеризует память стохастического процесса, то для временных интервалов, длиннее чем τ_c , условную плотность вероятности описывает уравнение

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}; t_1, t_2, \dots, t_{n-1} | x_n; t_n) = f(x_{n-1}; t_{n-1} | x_n; t_n). \quad (6.25)$$

Стохастические процессы, для которых условные плотности вероятности описываются уравнением (6.25), называются марковскими процессами. Для простейшего марковского процесса

$$f(x_1, x_2, x_3; t_1, t_2, t_3) = f(x_1; t_1) f(x_1; t_1 | x_2; t_2) f(x_2; t_2 | x_3; t_3). \quad (6.26)$$

Таким образом, только плотности вероятности первого и второго порядков $f(x_1; t_1)$ и $f(x_n; t_n | x_{n+1}; t_{n+1})$ необходимы для полной характеристики стохастического процесса. Стохастический процесс, не имеющий характерного временного масштаба, подобный $1/f$ -шуму, не является марковским процессом.

Знание плотностей условной вероятности первого и второго порядков полностью характеризует марковский процесс, так как аналогичная плотность вероятности более высокого порядка может быть определена из них. Для немарковских процессов этого знания недостаточно для полной характеристики стохастического процесса.

Немарковские стохастические процессы с одинаковыми условными плотностями вероятности первого и второго порядков, в общем, различны, потому что совместные плотности вероятности всех порядков требуются для полной характеристики длиндиапазонно коррелированных стохастических процессов. Таким образом, различные $1/f$ -шумовые сигналы не могут быть рассмотрены как одинаковые стохастические процессы до тех пор, пока не будут также известны высокопорядковые совместные плотности вероятности.

Глава 7

Корреляции в финансовых временных рядах

В этой главе мы применяем концепцию, развитую в гл. 6, чтобы обсудить эмпирические наблюдения временных корреляций, обнаруженных во временных рядах цен финансовых инструментов. Мы увидим, что существуют только краткодиапазонные корреляции ценовых изменений, но наблюдаются длиннодиапазонные корреляции волатильности. Далее мы обсудим степень стационарности финансовых временных рядов.

7.1. Автокорреляционная функция и спектральная плотность

Парная независимость изменений логарифмов цен финансовых активов обычно исследуется анализом автокорреляционной функции временных вариаций логарифмов цен (рис. 7.1) или спектральной плотности временного ряда самих логарифмов цен (рис. 7.2). Эти два статистических свойства эквивалентны для стационарных стохастических процессов. Найдено, что для отдельных акций спектральная плотность логарифма цены хорошо описывается функциональной формой

$$S(f) \sim \frac{1}{f^2}, \quad (7.1)$$

которая схожа со спектральной плотностью случайного блуждания.

Автокорреляционная функция изменения логарифма цены является быстро убывающей функцией, обычно характеризуемой временем корреляции намного короче одного торгового дня. Точное определение времени корреляции возможно посредством анализа высокочастотных (внутридневных) данных. Например, при анализе высокочастотных данных о временных изменениях

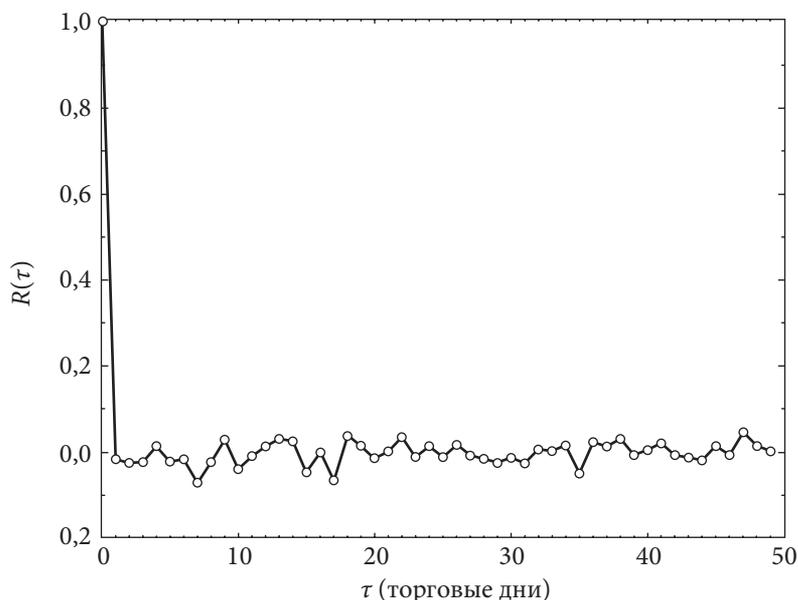


Рис. 7.1. Автокорреляционная функция логарифма ценовых изменений акций компании Кока-Кола — ежедневные данные за период с 07.1989 г. по 10.1995 г. Время памяти меньше, чем один торговый день

индекса S&P500 обнаружено, что корреляционное время составляет нескольких торговых минут (рис. 7.3).

Исследование высокочастотных данных позволяет провести анализ спектральной плотности с использованием большой базы экспериментальных данных, даже если общий временной интервал наблюдения анализируемых данных не очень велик. Таким образом, высокочастотные данные могут быть полезны для преодоления проблем, связанных с нестационарностью флуктуаций экономических индикаторов.

На рис. 7.4 мы показываем спектральную плотность индекса S&P500 на основе данных, записанных в течение 4-летнего периода с января 1984 г. по декабрь 1987 г. Используя высокочастотные данные, мы можем анализировать спектральную плотность в частотном интервале около 5 порядков величины. Эти данные подтверждают (7.1) в соответствии с гипотезой, что стохастическая динамика логарифма цены акции и индекса цен может быть описана случайным блужданием.

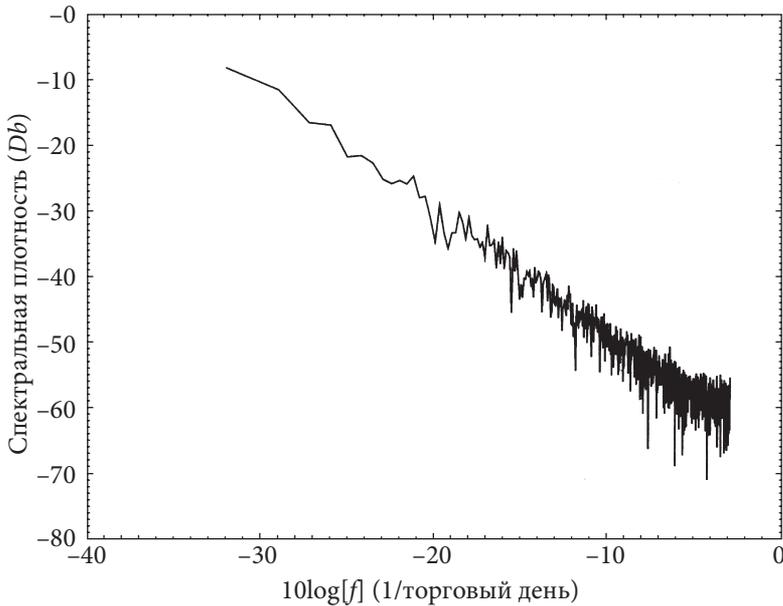


Рис. 7.2. Спектральная плотность логарифма цен акций компании Кока-Кола — ежедневные данные за период с 07.1989 г. по 10.1995 г. Спектральная плотность достаточно хорошо приближена к степенному закону $s(f) \sim 1/f^2$

Спектральные плотности и автокорреляционные функции являются статистическими инструментами, которые не очень чувствительны к длиннопериодным корреляциям. Другой тест, часто более эффективный в детектировании наличия длиннопериодных корреляций, основан на исследовании временной эволюции стандартного отклонения $\sigma(t)$ ценовых изменений. В общем случае

$$\sigma(t) \sim t^\nu, \quad (7.2)$$

где $\nu = 1/2$ для независимых ценовых изменений. Эмпирические исследования временной эволюции стандартного отклонения изменений цен недавно выполнены в [41, 112]. Эмпирическое поведение, обнаруженное в рыночных данных, описывается уравнением (7.2) с $\nu \approx 0,5$ во временном окне приблизительно от 30 торговых минут до 100 торговых дней. Эта величина ν типична для рыночных

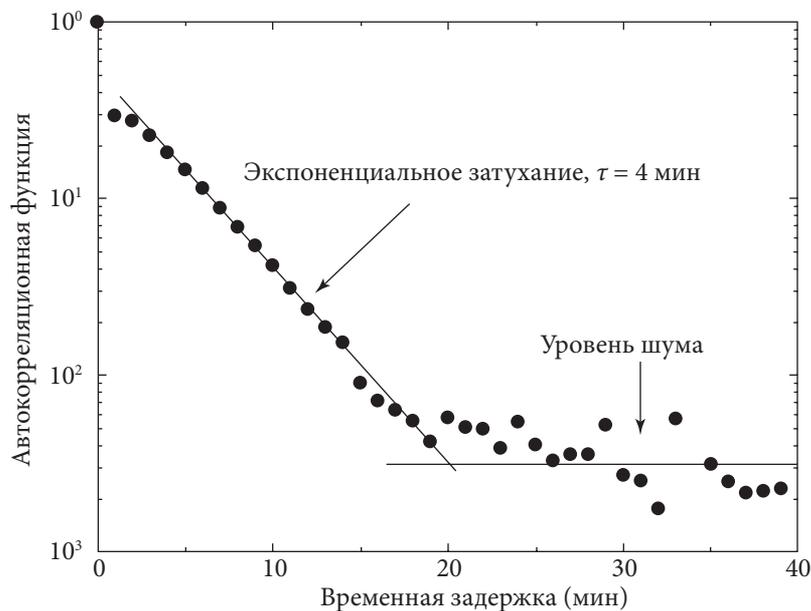


Рис. 7.3. Полулогарифмический график автокорреляционной функции для S&P 500, дискретность временной шкалы 1 мин. Прямая линия соответствует экспоненциальному затуханию с параметром времени затухания $t = 4$ мин. Очевидно, что после приблизительно 20 мин. корреляции становятся сравнимы с уровнем шума. С разрешения П. Гопикришнана (P. Gopikrishnan)

исследований. В других исследованиях анализировались дневные данные биржевых индексов Нью-Йорка (Нью-Йоркский составной индекс), Франкфурта (DAX-индекс) и Милана (MIB-индекс) с результатами для ν , равными 0,52, 0,53 и 0,57 соответственно. Эти величины показывают существование слабых длиннопериодных корреляций (эмпирические ν всегда немного больше 0,5). Сила длиннопериодных корреляций зависит от рынка и выглядит большей для менее эффективных рынков.

При исследовании высокочастотных данных для индекса S&P500 найдено, что $\sigma(t)$ имеет два режима. Для коротких временных интервалов ($t < 30$ торговых мин.) наблюдается сильное рассеяние данных по ценам ($\nu > 0,5$), в то время как на длинных временных интервалах рассеяние меньше ($\nu = 0,5$). На коротких временных интервалах $\nu \approx 0,8$, такое сильное рассеяние цен воз-

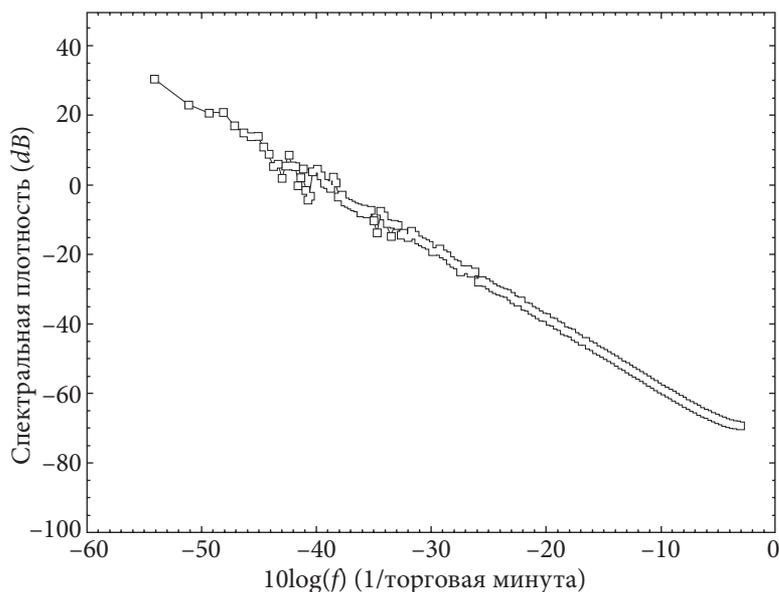


Рис. 7.4. Спектральная плотность высокочастотных данных индекса S&P500. Поведение, выражаемое формулой (7.1), наблюдается почти для пяти декад; обнаружено только небольшое отклонение для наибольшей исследуемой частоты. Адаптировано из [112]

можно благодаря тому факту, что временной ряд имеет память только в несколько минут (рис. 7.3), хотя это может также зависеть от степени негауссовости процесса. На интервалах, покрывающих от 30 до 10^4 торговых минут найдено $\nu = 0,53$, так что обнаружены лишь слабые длиннопериодные корреляции.

7.2. Корреляции высших порядков: волатильность

Автокорреляционная функция ценовых изменений имеет экспоненциальный спад с небольшим характеристическим временем — несколько торговых минут для индекса S&P500 (рис. 7.3). Однако парная независимость прямо не подразумевает, что ценовые изменения являются независимыми случайными величинами. Различные исследования, выполненные экономистами и физиками, показали, что автокорреляционная функция нелинейных ценовых изменений имеет намного большую временную память.

В действительности нелинейные функции, такие как абсолютные величины или их квадраты, являются длиннодиапазонно коррелированными по рыночным индексам акций и валютным курсам.

Существование длиннодиапазонной корреляции квадратов величин ценовых изменений доказывает, что могут быть некоторые другие фундаментальные стохастические процессы в дополнение к самим ценовым изменениям. К таким процессам часто относят волатильность. Волатильность часто оценивается вычислением стандартного отклонения ценовых изменений в выбранном временном окне. Можно также использовать другие пути оценки, например осреднение абсолютных величин ценовых изменений, методы максимального подобия или байесовские методы (обзор см. [123]). Существуют различные мотивации для рассмотрения статистических свойств волатильности:

(1) Волатильность может быть прямо связана с количеством информации, поступающим на данное время. Например, если поступает большое количество информации, то тогда трейдеры будут действовать соответственно — результат называется в большом количестве торгов и, в общем, в большой волатильности.

(2) Волатильность может прямо использоваться в моделировании стохастического процесса ценовыми изменениями, как, например, в ARCH/GARCH моделях, обсуждаемых в гл. 10.

(3) С практической точки зрения волатильность есть ключевой параметр в измерении риска финансовых инвестиций.

Автокорреляционная функция волатильности, оцененная как локальное среднее абсолютной величины ценовых изменений или посредством локального стандартного отклонения, хорошо описывается степенным законом убывания [31, 36, 41, 95, 137]. На рис. 7.5 показана автокорреляционная функция для абсолютных величин ценовых изменений одноминутного индекса S&P500 с использованием тех же данных, которые лежат в основе рис. 7.3. В этом случае убывание по степенному закону с показателем $\gamma \approx 0,3$ [96] хорошо описывает автокорреляционную функцию.

Долговременные корреляции абсолютных величин ценовых изменений могут также быть исследованы рассмотрением спектра мощности. На рис. 7.6 показан спектр мощности абсолютной величины ценовых изменений индекса S&P, измеренного на одночасовых интервалах. Результаты спектра мощности совпадают

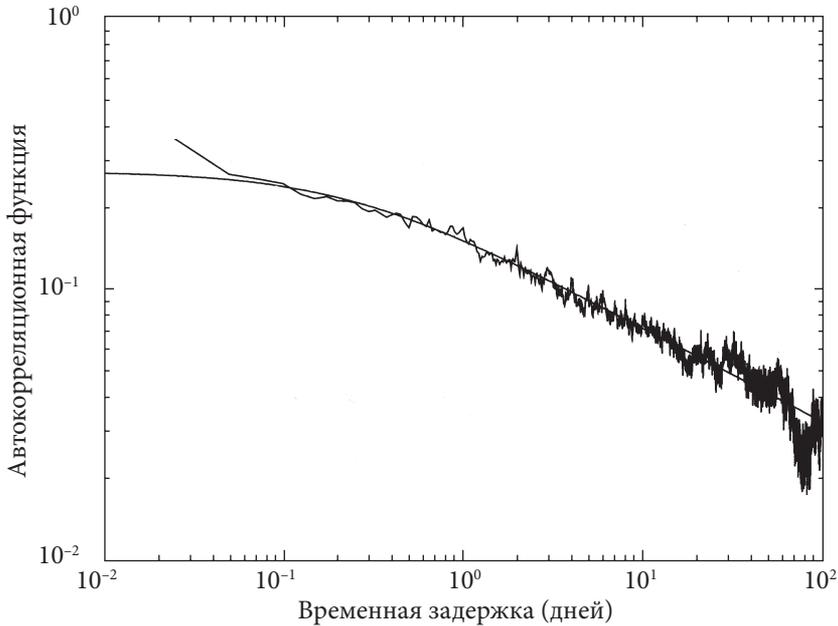


Рис. 7.5. Логарифмический график волатильности автокорреляционной функции, построенный на основе данных из рис. 7.3. Непрерывная линия соответствует регрессивному степенному закону на всем диапазоне, что дает оценку значения экспоненты степенного закона $\gamma \approx 0,3$, которая измеряет долговременные корреляции автокорреляционной функции. С разрешения П. Гопикришнана (P. Gopikrishnan)

с результатами автокорреляционной функции, а именно дают поведение по $1/f^\eta$ с $\eta = 1 - \gamma \approx 0,7$ [9, 96, 114].

Исследования распределения говорят о логнормальном распределении волатильности около центральной части распределения [31, 96, 133], в то время как другая работа доказывает, что асимптотическое поведение демонстрирует поведение по степенному закону [96]. В заключение заметим, что существование корреляции волатильности не противоречит наблюдениям парной независимости ценовых изменений, потому что автокорреляция ценовых изменений зависит от условной плотности вероятности второго порядка, в то время как автокорреляция волатильности подвержена влиянию высокопорядковой условной плотности вероятности.

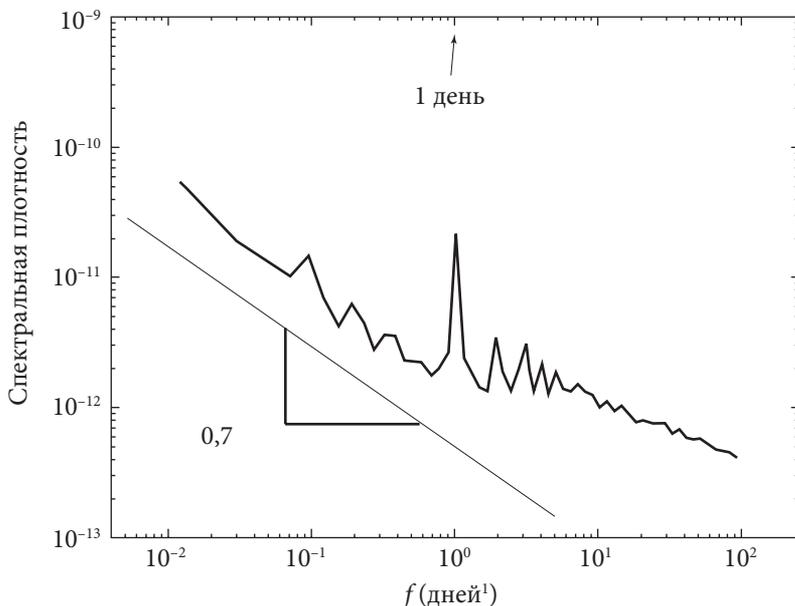


Рис. 7.6. Спектральная функция волатильности высокочастотных временных рядов S&P 500 за 13-летний период с января 1984 г. по декабрь 1996 г. Изображенная на рисунке прямая линия не совпадает с графиком, но является прогнозированием степенного закона с экспонентой 0,7, который согласуется с графиком на рис. 7.5. Острый пик, наблюдаемый для частоты приблизительно один обратный день, относится к внутрисдневным колебаниям волатильности. С разрешения П. Гопикришнана (P. Gopikrishnan)

7.3. Стационарность ценовых изменений

Из эмпирических исследований, обсужденных в предыдущих разделах, мы заключаем, что стохастическая динамика цен финансовых инструментов может быть приближенно описана случайным блужданием, характеризуемым в коротких временных диапазонах парными корреляциями. Можем ли мы описать ценовые изменения в терминах стационарных процессов? Эмпирический анализ финансовых данных показывает, что ценовые изменения не могут быть описаны стационарным стохастическим процессом в строгом смысле этого термина, так как стационарное отклонение ценовых изменений, а именно волатильность, зависит от времени на реальных рынках. Следовательно, форма стационарности, наблюдаемая на финансовых рынках, является наилуч-

шей асимптотической стационарностью. При анализе достаточно длинных финансовых временных рядов получена асимптотическая ФПВ ценовых изменений. Асимптотическая ФПВ демонстрирует на длинных временных диапазонах статистические свойства стохастических процессов.

7.4. Выводы

В данной главе мы обсудили различные факты:

1. Утверждение о том, что «ценовые изменения попарно не коррелированы», удовлетворительно описывает статистические свойства эмпирических данных.
2. Кратковременная память ценовых индексов наблюдается только в течение нескольких минут.
3. Слабая длиннопериодическая память проявляется в ценовых изменениях, как это наблюдалось во временной эволюции $\sigma(t)$.
4. Волатильность коррелирует на длинных временных диапазонах со спектральной плотностью типа $1/f$.

Глава 8

Стохастические модели ценовой динамики

Статистические свойства временной эволюции цен играют ключевую роль в моделировании финансовых рынков. Например, знание о стохастической природе цен финансовых активов является решающим фактором для правильной оценки производных финансовых инструментов.

Полная характеристика стохастического процесса требует знания условных плотностей вероятности всех порядков. Это сложная задача, которая не может быть решена на практике. Обычный эмпирический подход, используемый физиками, выполняется за два шага. На первом шаге исследуются корреляции и спектр мощности, на втором — изучается асимптотическая ФПВ.

В наиболее общей стохастической модели ценовой динамики предполагается, что изменения $\ln Y(t)$ нормально (гауссовски) распределены. Эта модель, известная как геометрическое броуновское движение, обеспечивает первое приближение к поведению, наблюдаемому в эмпирических данных. Однако имеют место систематические отклонения от прогнозов, сделанных с использованием такой модели. Эмпирические распределения являются лептоэксцессными, т. е. имеют эксцесс, больший, чем гауссовские распределения (рис. 8.1). Высоко лептоэксцессное распределение характеризуется более острым и высоким максимумом и более толстыми хвостами, чем гауссовское. Степень лептоэксцессности тем выше, чем более высокочастотны данные.

Основываясь на теоретических предположениях и эмпирическом анализе, удалось разработать модели, альтернативные по отношению к геометрическому броуновскому движению. Эти модели отличаются друг от друга не только в отношении формы и лептоэксцессности ФПВ, но также в отношении ключевых свойств, а именно:

- конечном или бесконечном значениях второго или более высоких порядков моментов распределения;

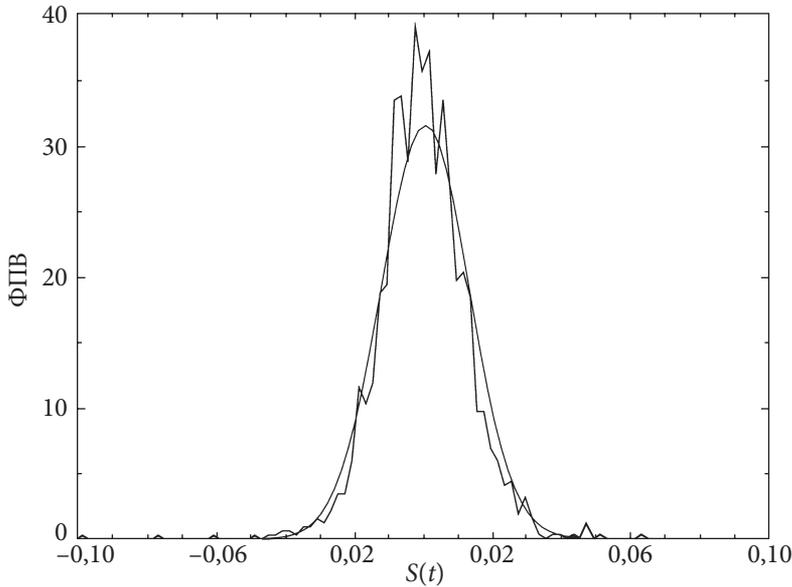


Рис. 8.1. Эмпирическая ФПВ для логарифма ежедневных изменений цены акций компании Шеврон (Chevron), торговавшихся на Нью-Йоркской фондовой бирже в период с 1989 г. по 1995 г. Сглаженная линия представляет собой гауссову ФПВ с той же дисперсией, рассчитанной по этим данным

- природы стационарности, представленной на коротких временных шкалах или асимптотически;
- непрерывности или прерывности $Y(t)$ или $\ln Y(t)$;
- скейлингового поведения стохастического процесса.

Для разъяснения этих концепций мы, во-первых, обсудим некоторые подмножества этих моделей:

1. Устойчивую по Леви негауссовскую модель [102].
2. t -распределение Стьюдента [19].
3. Смесь гауссовских распределений [32].
4. «Усеченный полет» Леви [110].

Другие выдающиеся модели включают: «прыжковую» диффузионную модель [121] и гиперболически распределенный стохастический процесс [47]. Стохастические модели, имеющие зависящую от времени дисперсию на коротких временных интервалах, часто моделируют в терминах ARCH-процессов или в обобщенной форме GARCH-процессов, — это будет обсуждено в гл. 10.

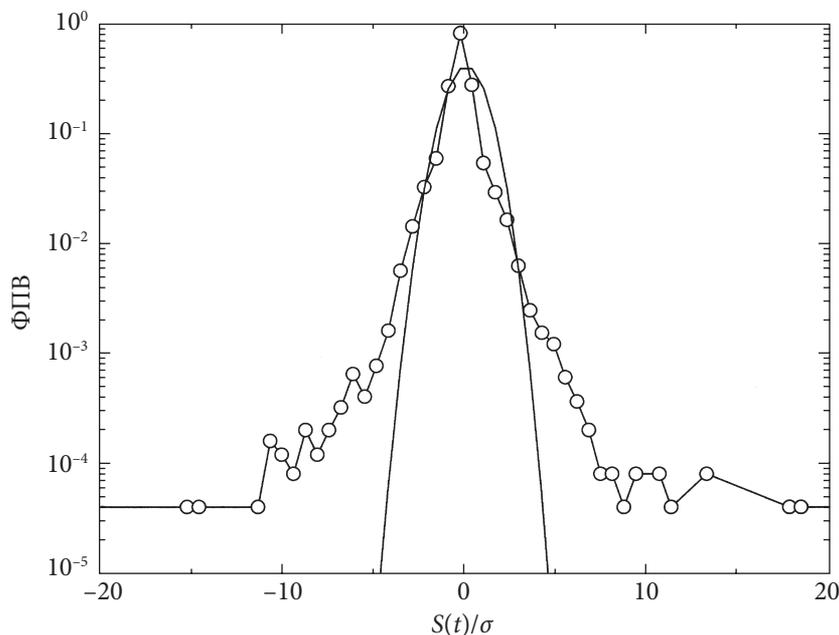


Рис. 8.2. Эмпирическая функция плотности распределения вероятности для высокочастотных изменений цены акций компании Ксерокс (Херокс), торговавшихся на Нью-Йоркской фондовой бирже в течение двухлетнего периода с 1994 г. по 1995 г. Этот полулогарифмический график показывает островершинную природу кривой распределения, наблюдаемую в эмпирических исследованиях. Для сравнения также показана гауссова кривая с измеренным стандартным отклонением. С разрешения П. Гопикришнана (P. Gopikrishnan)

8.1. Устойчивая негауссовская модель Леви

Первая модель, которая явно приняла в расчет эмпирическую лептоэксцессность, наблюдаемую в плотности вероятности $P(S)$, была предложена в 1963 г. Мандельбротом, который моделировал $\ln Y(t)$ для цен на хлопок как устойчивый по Леви негауссовский стохастический процесс. Его находки были подтверждены исследованиям Фаме в 1965 г. [52], которые были выполнены посредством анализа динамики цен Нью-Йоркской фондовой биржи. Наиболее интересными свойствами устойчивых негауссовских процессов Леви являются:

- их устойчивость (т. е. самоподобие),

- их связь с предельной теоремой — они являются аттракторами в вероятностном пространстве.

В мандельбровтовской Леви-гипотезе устойчивости подразумевается, что $\ln Y(t)$ испытывает дискретные изменения во времени, и $S(t) \equiv \ln Y(t+1) - \ln Y(t)$ характеризуется негауссовскими скейлингом и распределением с бесконечным вторым и более высокими моментами. С 1963 г. было опубликовано много статей, рассматривающих эту важную проблему — конечных или бесконечных значений дисперсии $S(t)$.

8.2. Т-распределение Стьюдента

Гауссовские процессы протекают с конечной дисперсией. Устойчивые негауссовские процессы имеют бесконечную дисперсию. Существует ли что-нибудь «между» этими двумя пределами? Действительно, t -распределение Стьюдента есть распределение

$$P(z) = \frac{C_n}{(1 + z^2/n)^{(n+1)/2}} \quad (8.1)$$

стохастического процесса

$$z \equiv \frac{x\sqrt{n}}{\sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}}, \quad (8.2)$$

полученного из независимых стохастических переменных y_1, y_2, \dots, y_n и x , каждое из которых имеет нормальную плотность, нулевое среднее и единичную дисперсию. Здесь

$$C_n \equiv \frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\sqrt{\pi n} \Gamma(n/2)}. \quad (8.3)$$

Когда $n=1$, $P(z)$ является распределением Лоренца. Когда $n \rightarrow \infty$, $P(z)$ есть гауссовское распределение. В общем случае $P(z)$ имеет конечные моменты для $k < n$. Следовательно, стохастический процесс, характеризуемый t -распределением Стьюдента, может иметь как конечные, так и бесконечные моменты. Посредством изменения параметра n (который управляет конечностью моментов порядка k) можно аппроксимировать с хорошей точностью распределение ценовых изменений, найденное из рыночных данных на данном временном горизонте [19]. Заметим, что t -распреде-

ние Стьюдента при $n \neq 1$, с учетом его ограниченности, неустойчиво. Это подразумевает, что его форма изменяется на различных временных горизонтах и что распределения на разных горизонтах не следуют скейлинговым отношениям.

8.3. Смесь гауссовских распределений

Другая модель, которая способна описать островершинность ФПВ эмпирических данных и которая согласуется с существованием конечного второго момента ценовых изменений, предложена Кларком [32]. В его модели используется концепция подчиненного стохастического процесса [57]. Когда стохастический процесс происходит в моменты времени t_1, t_2, t_3, \dots , которые сами являются реализацией стохастического процесса, стартующего со случайного момента времени t_1 , можно получить функцию $\Omega(t)$, называемую направляющим процессом. Стартуя с процесса $\ln Y(t)$, происходящего в случайные моменты времени t_1, t_2, t_3, \dots , можно сформировать новый случайный процесс $\ln Y[\Omega(t)]$. Этот процесс называется подчиненным по отношению к $\ln Y(t)$, и распределение разностей логарифмов ценовых изменений $S[\Omega(t)]$ называется подчиненным по отношению к распределению $S(t)$.

Из анализа рыночной активности известно, что количество транзакций, происходящих на рынке, зависит от времени. Кларк предположил, что объем торгов является хорошим фактором, по отношению к которому можно исследовать эволюцию ценовой динамики. Он использовал в качестве направляющего процесса $\Omega(t)$ накопленный объем торгов в момент времени t . В его модели распределение логарифмов ценовых приростов, происходящее из данного уровня торговых объемов $P[S[\Omega(t)]]$, есть подчиненное по отношению к распределению индивидуальных торгов $P[S(t)]$ и направлено распределением торгового объема $P(\Omega)$. Предполагая $P[S(t)]$ гауссовским, а $P(\Omega)$ имеющим все моменты конечными, Кларк смог доказать, что $P[S[\Omega(t)]]$ имеет лептоэксцессное распределение со всеми конечными моментами. Кларк интерпретировал лептоэксцессное поведение, наблюдаемое при анализе эмпирических данных, как результат непостоянства активности (объема) торгов в процессе торговой сессии. В его модели второй момент распределения $P[S[\Omega(t)]]$ всегда конечен при условии, что распределение $P(\Omega)$ имеет конечный второй момент. Специфичность формы распределения зависит от распределения направляющего процесса $\Omega(t)$. В общем случае $P[S[\Omega(t)]]$ распределение не обладает свойством самоподобия (скейлинга).

8.4. «Усеченный полет Леви»

Устойчивое негауссовское распределение Леви подчиняется скейлинговым соотношениям, но имеет бесконечную дисперсию; t -распределение Стьюдента и смесь гауссовских распределений не показывают в общем случае скейлинговых свойств и могут иметь или не иметь конечную дисперсию. Стохастический процесс с конечной дисперсией и характеризуемый скейлинговыми отношениями в больших, но конечных интервалах времени, называется процессом «усеченного полета Леви» (TLF) [110]. Распределение TLF определяется так:

$$P(x) \equiv \begin{cases} 0, & x > l, \\ cP_L(x), & -l \leq x \leq l, \\ 0, & x < -l, \end{cases} \quad (8.4)$$

где $P_L(x)$ есть симметричное распределение Леви с индексом α , скейлинговым фактором γ и нормализационной константой c . TLF не является устойчивым стохастическим процессом, так как мы показали выше, что только распределение Леви является устойчивым.

Так как он имеет конечную дисперсию, TLF будет сходиться к гауссовскому процессу. Как быстро будет он сходиться? Чтобы ответить на этот вопрос, мы рассматриваем величину $S_n \equiv \sum_{i=1}^n x_i$, где x_i есть усеченный полет Леви, и $\langle x_i x_j \rangle = \text{const} \delta_{ij}$. Распределение $P(S_n)$ хорошо аппроксимирует $P_L(x)$ в пределе при $n \rightarrow 1$, в то время как $P(S_n) = P_G(S_n)$ в пределе $n \rightarrow \infty$. Следовательно, переходное значение n_x , а именно n_x таково, что (рис. 8.3)

$$P(S_n) \approx \begin{cases} P_L(S_n), & \text{когда } n \ll n_x, \\ P_G(S_n), & \text{когда } n \gg n_x, \end{cases} \quad (8.5)$$

где $P_G(S_n)$ есть гауссовское распределение. Переходное значение n_x дается соотношением

$$n_x \cong A l^\alpha, \quad (8.6)$$

где для $\gamma=1$ имеем

$$A = \left[\frac{\pi \alpha}{2\Gamma(1/\alpha) [\Gamma(1+\alpha) \sin(\pi\alpha/2)/(2-\alpha)]^{1/2}} \right]^{2\alpha/(\alpha-2)}. \quad (8.7)$$

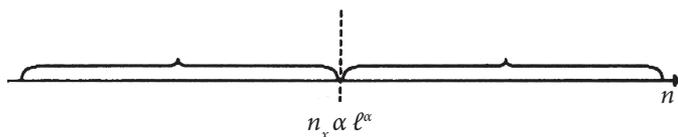


Рис. 8.3. Схематическая иллюстрация результатов для TLF («усеченного полета Леви»). Показан переход из одной области в другую, обнаруженный между поведением «полета Леви» для малых n (слева) и гауссовым поведением для больших n (справа). Переходное значение n_x быстро увеличивается с граничной длиной ℓ . Адаптировано из [110]

Можно численно исследовать этот процесс сходимости (когда n увеличивается) от TLF к его асимптоте — гауссиану. Для моделирования устойчивого стохастического процесса Леви с индексом α и скейлинговым фактором $\gamma = 1$ мы использовали алгоритм Мантеньи [106]. Существуют другие алгоритмы [140]. На рис. 8.4 мы показываем вероятность возврата прибыли к нулевому значению, полученную моделированием S_n -процесса для случая $\alpha = 1,5$ и $\ell = 100$. Мы также показываем асимптотическое поведение для малых и больших n . Мы ясно видим переход между двумя режимами. Для выбранных управляющих параметров переходное значение n_x наблюдается при $n_x \approx 260$.

Для тех же управляющих параметров мы также исследуем распределение $P(S_n)$ для разных величин n посредством моделирования TLF для $n = 1, 10, 100, 1000$ (рис. 8.5). Для того чтобы иметь возможность сравнивать формы этих распределений при различных величинах n , мы представляем графики этих распределений, используя масштабируемые переменные $\tilde{P}(\tilde{S}) \equiv P(S)/n^{-1/\alpha}$ и $\tilde{S} \equiv S/n^{1/\alpha}$.

Из рис. 8.5 видно, что TLF-распределение изменяет форму при изменении n . Для малых величин n ($n = 1$ и 10) мы нашли хорошее согласие с профилем Леви, в то время как для больших величин n ($n = 1000$) распределение хорошо согласуется с гауссовским. Сравнивая результаты рис. 8.4 и 8.5, мы замечаем, что вероятность возврата к нулевому значению показывает с высокой степенью точности сходимость процесса к одному из двух асимптотических режимов. Например, когда $n = 1$ и 10 , вероятность возврата очевидна в Леви-режиме (рис. 8.4) и центральная часть TLF-распределения хорошо описывается Леви-распределением (рис. 8.5). Напротив, для $n = 1000$ вероятность возврата проходит в гауссовском режиме (рис. 8.4) и это распределение совпадает с гауссов-

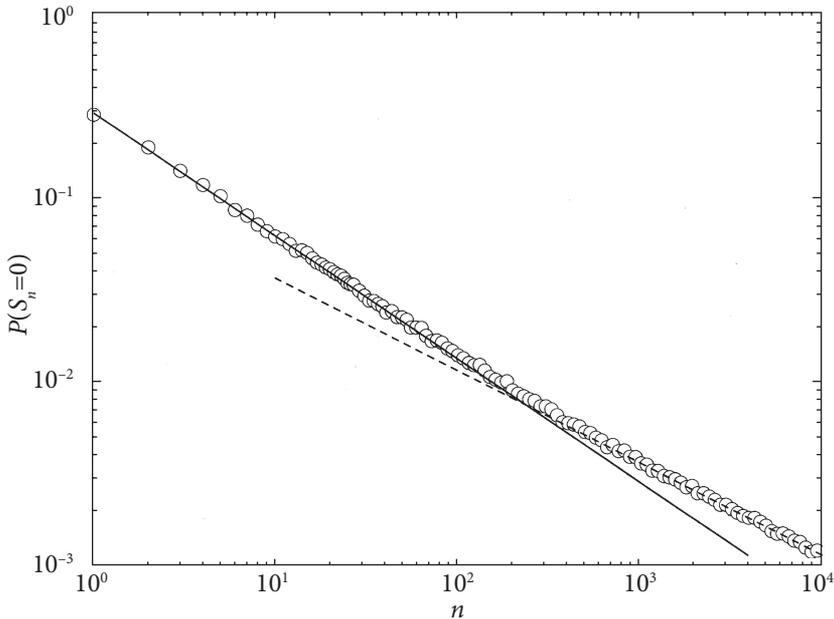


Рис. 8.4. Вероятность возврата к начальному значению S_n как функции от n для $a = 1,5$ и $\ell = 100$. Результаты имитационного моделирования (кружки), полученные выполнением 5×10^4 реализаций, сравниваются с режимом Леви (непрерывная линия) и с асимптотическим гауссовым режимом, рассчитанным для $\ell = 100$ (пунктирная линия). Адаптировано из [114]

ским распределением, характеризуемым соответствующим стандартным отклонением (рис. 8.5).

Суммируя, можно сказать, что при исследовании вероятности возврата к исходному значению почти устойчивых, ненормальных стохастических процессов с конечной дисперсией найден очевидный переход между Леви и гауссовским режимами. Следовательно, Леви-подобные распределения могут эмпирически наблюдаться при длинных (но конечных) интервалах времени даже в случае стохастических процессов, характеризуемых конечной дисперсией.

В гл. 4 мы показали, что из гипотезы эффективного рынка следует заключение о том, что распределение ценовых изменений для длинных горизонтов хорошо аппроксимируется бесконечно делимыми ФПВ. Обсуждаемый здесь TLF-процесс является бесконечно

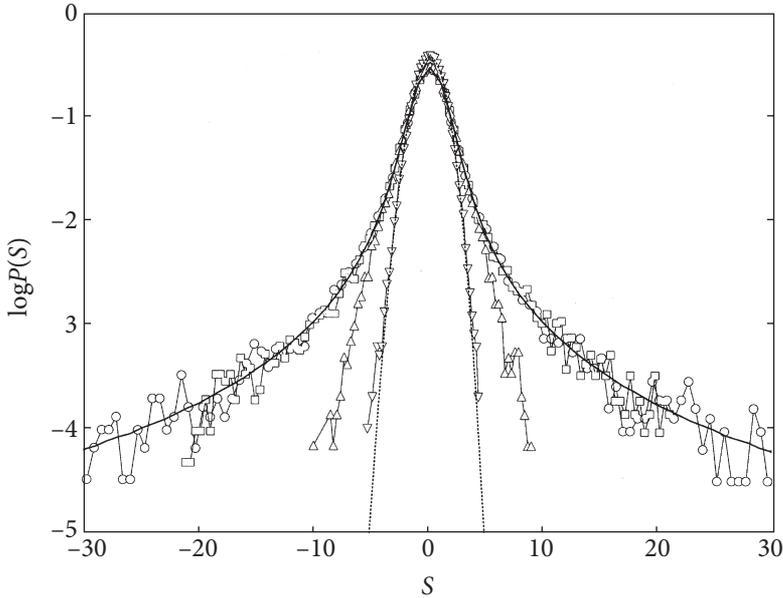


Рис. 8.5. Полулогарифмический масштабированный график распределения вероятностей процесса TLF («усеченного полета Леви»), характеризуемого параметрами $a = 1,5$ и $l = 100$ для $n = 1, 10, 100$ и 1000 . Для малых значений n ($n = 1$ (кружки) и 10 (квадраты)) центральная часть распределения хорошо описывается стабильным симметричным профилем Леви, ассоциированным с $a = 1,5$ и $y = 1$ (непрерывная линия). Для больших значений n ($n = 1000$ (перевернутые треугольники)) процесс TLF уже достиг гауссова режима и распределение, по существу, гауссово (пунктирная линия). Адаптировано из [114]

делимым, поскольку усечение распределения разрывает его. Однако пример бесконечно делимых TLF-процессов был введен Короненом [86], который рассмотрел TLF-процесс с мягким (экспоненциальным) спадом и нашел характеристическую функцию

$$\varphi(q) = \exp \left\{ c_0 - c_1 \frac{(q^2 + 1/l^2)^{\alpha/2}}{\cos(\pi\alpha/2)} \cos[\alpha \arctg l|q|] \right\}, \quad (8.8)$$

где c_1 — масштабный фактор и

$$c_0 \equiv \frac{l^{-\alpha}}{\cos(\pi\alpha/2)}. \quad (8.9)$$

Процесс с $\varphi(q)$, описываемый уравнением (8.8), является бесконечно делимым, так как процессы, которые характеризуются функциями, имеющими экспоненциальную форму, являются бесконечно делимыми. Детальная форма спада не изменяет общего поведения сходимости TLF-процесса к общему асимптотическому гауссовскому процессу, так как в соответствии с теоремой Берри—Эссена, сходимость по существу управляется третьим моментом $|x|$ [144].

Глава 9

Скейлинг и его разрушение

Не существует модели стохастического процесса, описывающего временную эволюцию логарифма цены, которая была бы принята всеми исследователями. В этой главе мы представляем одну из точек зрения. Мы обсудим результаты недавних эмпирических исследований, чтобы ответить на следующие вопросы:

- (1) Является ли второй момент распределения ценовых изменений конечным?
- (2) Имеется ли самоподобие?
- (3) Если есть самоподобие, то какова его природа?
- (4) В каком временном интервале имеет место самоподобие?

9.1. Эмпирический анализ индекса S&P 500

Вначале мы рассмотрим исследование эмпирических свойств временной эволюции индекса S&P 500 за шестилетний период, с октября 1984 г. по декабрь 1989 г. [111]. Обозначим временной ряд этого индекса как $Y(t)$. Эта база данных имеет достаточно высокое разрешение во времени, значения $Y(t)$ менялись каждую минуту, а иногда и каждые 15 секунд.

В этом анализе время учитывалось только в торговые часы. Во первых, вычисляем ФПВ индексных изменений

$$Z_{\Delta t}(t) \equiv Y(t + \Delta t) - Y(t) \quad (9.1)$$

на 1-минутных интервалах ($\Delta t = 1$ мин.). Эта ФПВ (см. рис. 9.1)

- почти симметрична,
- высоко лептоэксцессна,
- характеризуется негауссовским профилем для малых индексных изменений.

Мы выделяем различные подмножества неперекрывающихся ценовых изменений $Z_{\Delta t}(t)$, изменяя Δt от 1 до 1000 мин. Коли-

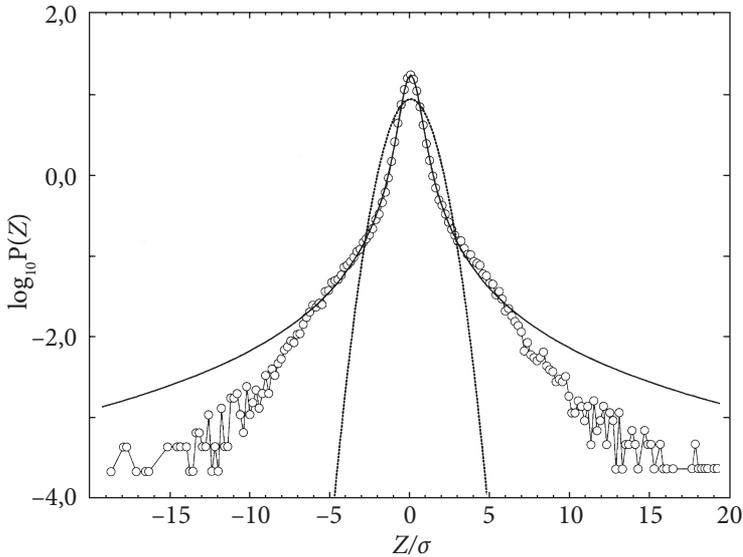


Рис. 9.1. Сравнение $\Delta t = 1$ функции плотности распределения вероятности для высокочастотных изменений цены S&P 500 с гауссовым распределением (пунктирная линия) и с устойчивым распределением Леви (непрерывная линия) с индексом $\alpha = 1,40$, полученным из скейлингового анализа, и масштабным коэффициентом $\gamma = 0,00375$, полученным из $P(0)$, измеренной, когда $\Delta t = 1$ мин. Адаптировано из [111]

чество записей в каждом подмножестве уменьшается от 493 545 ($\Delta t = 1$ мин.) до 562 ($\Delta t = 1000$ мин.). Ширина ФПВ увеличивается с ростом Δt , как в любом случайном процессе (рис. 9.2).

Когда характеризуют форму ФПВ, обычным подходом является исследование крыльев. Мы используем другой подход, мы изучаем вероятность возврата прибыли к нулю $[P_{\Delta t}(Z=0)]$ как функцию Δt . Когда мы вычерчиваем наши результаты на логарифмическом графике, мы наблюдаем интересное «скейлинговое» поведение по степенному закону (рис. 9.3).

Этот результат согласуется с устойчивой Леви-ФПВ. Индекс α распределения Леви может быть определен из наклона линии графика (см. (4.27)). Посредством этого метода мы находим $\alpha = 1,40 \pm 0,05$. Для $\Delta t = 1$ имеем $P_{\Delta t}(0) = 15,7$ и из (4.27) получается величина $\gamma = 0,00375$ для масштабного фактора.

Далее мы сравниваем эмпирические результаты с устойчивой Леви-ФПВ с индексом $\alpha = 1,40$ и масштабным фактором $\gamma = 0,00375$.

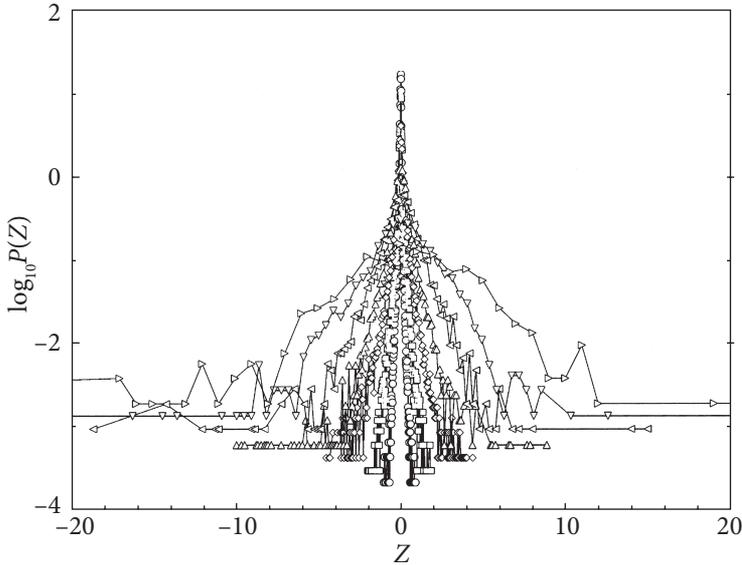


Рис. 9.2. Высокочастотные данные для индекса S&P 500. Функции плотности распределения вероятности изменений цены, рассчитанные для разных временных горизонтов $\Delta t = 1, 3, 10, 32, 100, 316, 1000$ мин. Наблюдается типичный для случайного блуждания разброс. Адаптировано из [111]

Мы находим, что существует отклонение от распределения Леви на хвостах (рис. 9.1). В частности, когда $|Z| \geq 6\sigma$, данные на хвостах значительно ниже, чем на Леви-ФПВ. Этот анализ даёт ответ на вопрос (1) из начала этой главы, показывая, что дисперсия распределения ценовых изменений конечна.

Теперь мы возвратимся к вопросу (2). Мы заметили уже, что максимумы распределений возрастают во временных интервалах $\Delta t \leq 1000$ мин. А как насчёт других областей? В гл. 4 мы видели, что устойчивое распределение самоподобно. Масштабируемые переменные для устойчивого Леви-процесса с индексом α есть

$$\tilde{Z} \equiv \frac{Z}{(\Delta t)^{1/\alpha}} \quad (9.2)$$

и

$$\tilde{P}(\tilde{Z}) \equiv \frac{P(Z)}{(\Delta t)^{-1/\alpha}}. \quad (9.3)$$

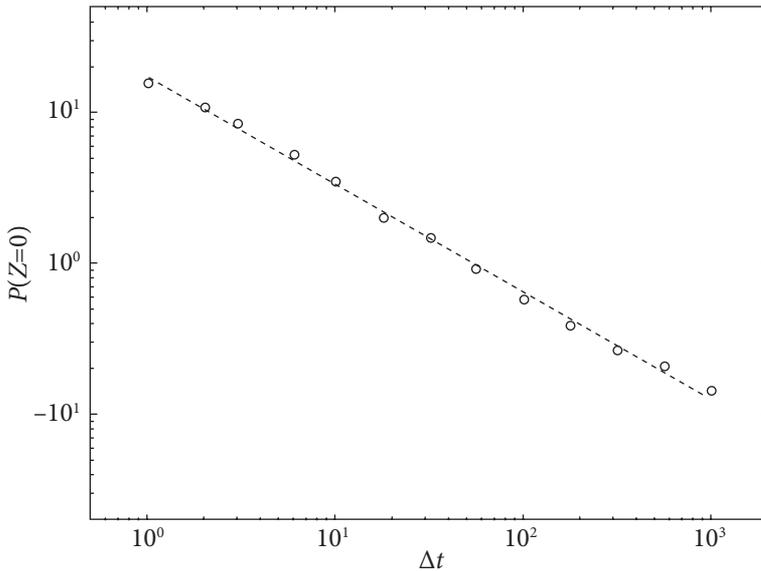


Рис. 9.3. Вероятность возврата к начальному значению, рассчитанному как функция от временного интервала Δt . Зависимость по степенному закону показана изображением рассчитанных значений на логарифмическом графике. Наклон, $0,712 \pm 0,025$ более трёх порядков величины, согласуется с негауссовым скейлингом. Адаптировано из [111]

Когда мы используем $\alpha = 1,40$ в качестве индекса Леви-распределения, эмпирические результаты хорошо падают на распределение с $\Delta t = 1$ мин. (рис. 9.4).

На первый взгляд, некоторые наши находки выглядят противоречиво. В частности, мы наблюдаем несовпадающие результаты: негауссовский скейлинг в центральной части распределения, Леви-негауссовский профиль для $|Z| \leq 6\sigma$, но тем не менее конечную дисперсию. Конечная дисперсия подразумевает, что скейлинг приближителен и справедлив только для конечного временного интервала. Для длинных временных интервалов скейлинг должен нарушаться. Чтобы увидеть это нарушение, мы показываем на рис. 9.5 вероятность $P(Z=0)$ — вероятность возврата прибыли к нулевому значению, измеренную для высокочастотных данных S&P 500, и здесь же $P_G(0)$ — вероятность возврата к начальному значению, которая могла бы быть получена при гауссовском процессе.

Эмпирические величины дисперсии, измеренные на каждой исследованной величине Δt , использованы для вычисления $P_G(0)$.

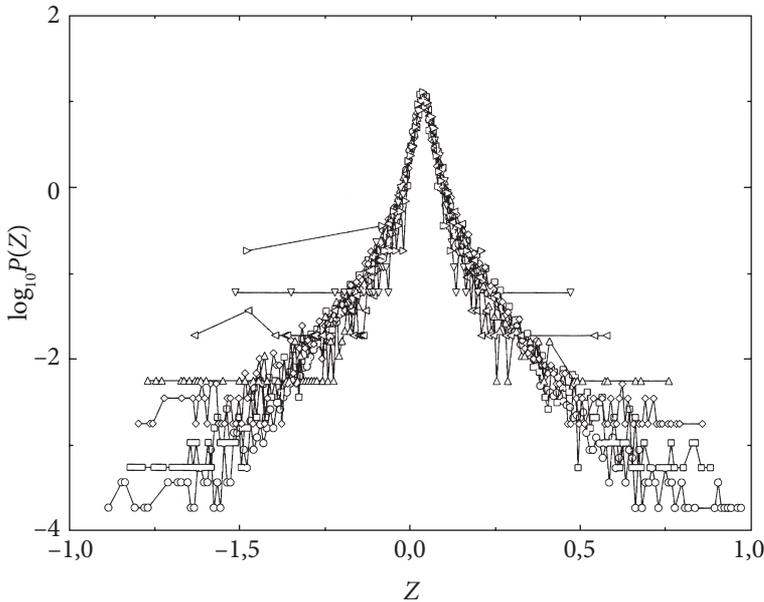


Рис. 9.4. Функции плотности вероятности, аналогичные рис. 9.2, но изображенные в масштабированных единицах. Значительный качественный скачок наблюдается, когда масштабирование осуществляется с использованием значения $a = 1,40$. Адаптировано из [111]

Для различных величин Δt разности между двумя вероятностями возврата к начальному значению систематически уменьшаются для $30 < \Delta t < 1000$ мин. Посредством экстраполирования скейлингового поведения $P(0)$ и $P_G(0)$ мы оцениваем, что разрушение негауссовского скейлинга происходит приблизительно через 10^4 торговых минут. Мы заключаем, что негауссовский скейлинг наблюдается для большого, но конечного временного интервала, приблизительно от 1 до 10^4 торговых минут.

9.2. Сравнение с TLF-распределением

Большинство эмпирических данных высокочастотных измерений индекса S&P 500 совпадают с простой стохастической моделью, обсуждённой в предыдущем разделе, — TLF. Однако TLF несколько ограничивает моделирование эмпирических данных. Большинство ограничений касаются предположения о независимости

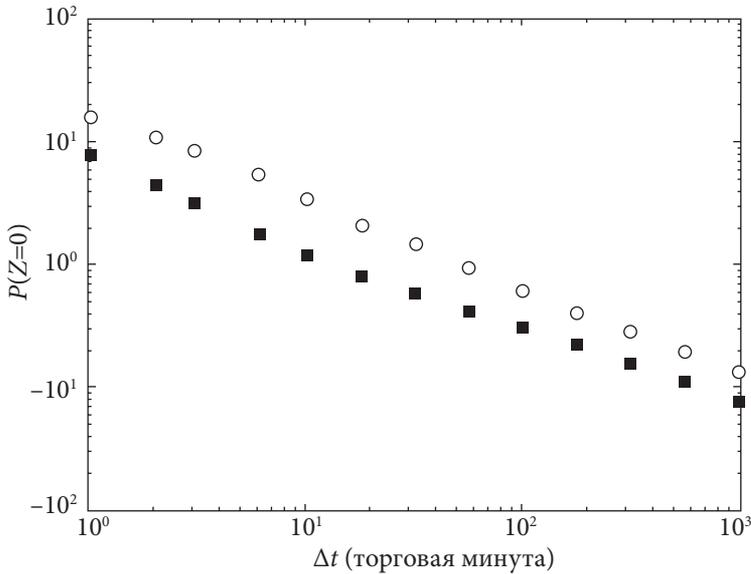


Рис. 9.5. Вероятность возврата к начальному значению для высокочастотных данных S&P 500 (кружки), вместе с вероятностью возврата к начальному значению, которая могла бы быть получена, если бы процесс был гауссовым. Вероятность $P_G(0)$ (квадраты) — приближенно полученная из расчетов дисперсии для каждого значения Δt . Расстояние между двумя точками есть мера негауссовой природы функции плотности вероятности (ФПВ). Адаптировано из [112]

и идентичности распределений ценовых изменений, так как в TLF-модели управляющие параметры α , γ и l не зависят от времени. В этом предположении подразумевается, что асимптотическая и кратковременная ФПВ TLF-смещений (ценовых изменений) одинаковы для одинаковых временных горизонтов Δt . Мы проверяем это предположение посредством изучения временной эволюции параметров α и γ . Параметр γ даёт одну возможную меру волатильности процесса. Мы рассматриваем 72 подмножества исходной базы данных, повторяя для каждого из них один и тот же анализ — тот, который выполнен на полной базе. Результаты суммированы на рис. 9.6 и рис. 9.7, где мы показываем временную эволюцию параметров α и γ . (*Примечание.* Параметр l не может быть получен, для его расчета с достаточной надёжностью требуется больше данных.) Мы заключаем, что α приблизительно постоянен

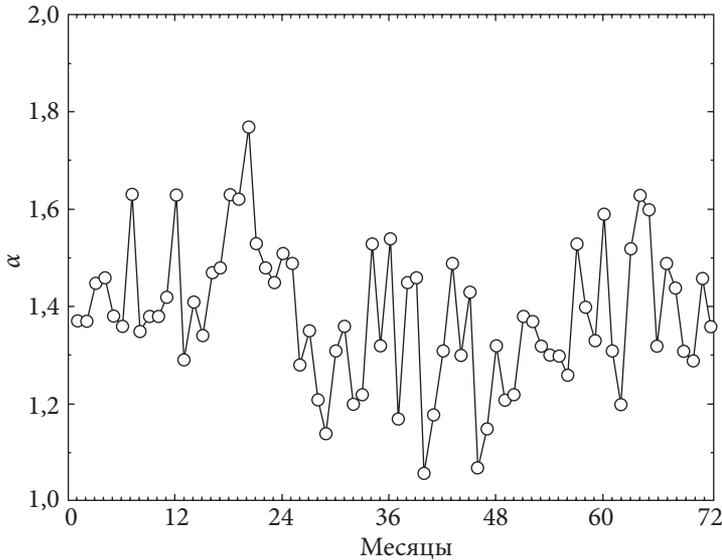


Рис. 9.6. Временная зависимость индекса α , определенная из вероятности возврата к начальному значению для распределения высокочастотных данных изменения цены, проанализированных на месячной временной шкале. Вычисление повторено для каждого из 72 месяцев за период с 01.1984 г. по 12.1989 г.. Адаптировано из [114]

(рис. 9.6) [114], в то время как γ сильно флуктуирует со «взрывами» активности (рис. 9.7). Следовательно, эмпирические данные показывают, что ценовые изменения не могут моделироваться в терминах стохастического процесса с независимыми идентично распределенными ценовыми изменениями.

На основании сказанного можно сделать следующий вывод: TLF-модель хорошо описывает асимптотические распределения ценовых изменений, измеренные на разных временных горизонтах, и их скейлинговые свойства, но не может описать надлежащим образом зависимость от времени волатильность, наблюдаемую в рыночных данных.

9.3. Статистические свойства редких событий

Один ключевой вопрос в описании статистических свойств рыночных цен касается «редких событий», а именно событий больших положительных или отрицательных ценовых изменений.

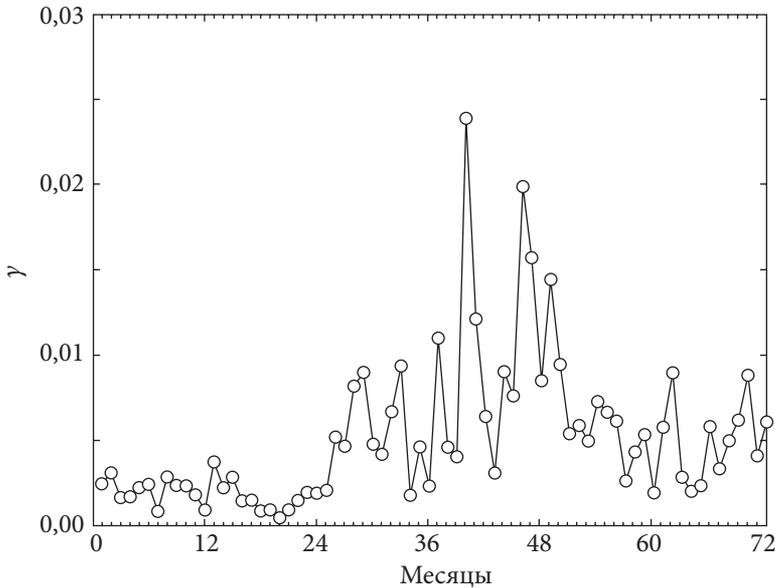


Рис. 9.7. Временная зависимость масштабного коэффициента γ , определенная с использованием значения α из рис. 9.6, и вероятности возврата к начальному значению для распределения высокочастотных данных изменения цены, рассчитанному для $\Delta t = 1$ мин. Вычисление повторено для каждого из 72 месяцев за период с 01.1984 г. по 12.1989 г. Адаптировано из [114]

Количественный анализ статистических свойств таких событий труден, и требуются чрезвычайно большие базы данных (или чрезвычайно длинные временные периоды), чтобы сделать какие-либо надежные заключения. Для двухлетнего периода, с января 1994 г. по декабрь 1995 г., были исследованы высокочастотные данные [67] по ценам 1000 крупнейших компаний, котируемых на трех главных американских биржах: NYSE, AMEX, и NASDAQ. Для каждой компании было исследовано $S(t)$, и была обеспечена гомогенность в этом множестве посредством деления $S(t)$ каждой компании на волатильность, измеренную на исследуемом временном интервале.

Поведение редких событий в ансамбле этих 1000 компаний исследовано рассмотрением кумулятивного распределения нормализованной переменной $g(t) \equiv S(t)/\sigma_i$, где σ_i — волатильность компании i . Кумулятивное распределение вероятности $F(g)$ изме-

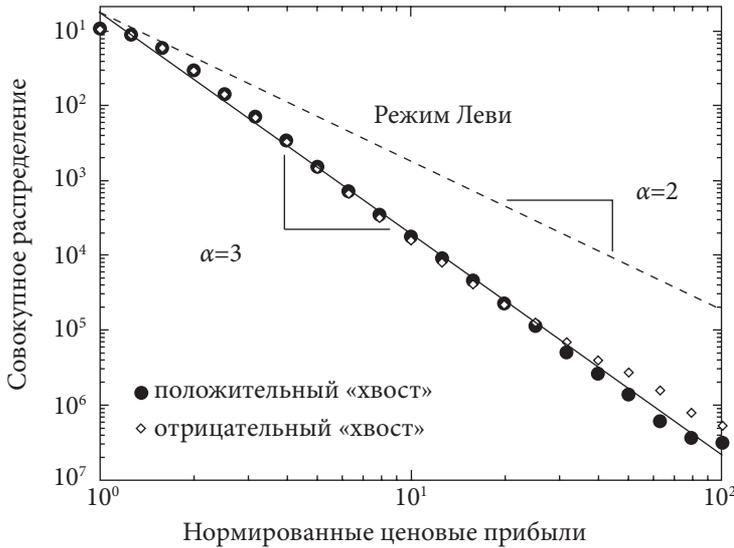


Рис. 9.8. Логарифмический график совокупного распределения вероятности $F(g)$, основанный на высокочастотных данных для 1000 крупнейших компаний за двухлетний период с 1 января 1994 г. по 31 декабря 1995 г. Поведение степенного закона (9.4) хорошо соответствует данным в диапазоне $2 < g < 100$ как для положительного, так и для отрицательного «хвостов». Показатели степени соответствуют $a = 3,10 \pm 0,03$ (положительный «хвост») и $a = 2,84 \pm 0,12$ (отрицательный «хвост»). Адаптировано из [67]

нения цены на величину g или больше подчиняется степенному закону для больших величин g , как для положительных, так и для отрицательных g (рис. 9.8):

$$F(g) \approx g^{-\alpha} \quad (9.4)$$

с показателем $\alpha \approx 3$ как для положительных, так и для отрицательных хвостов, когда данные подгоняются в диапазоне $2 \leq g \leq 100$. Так как $\alpha > 2$, этот результат также согласуется с заключением о том, что второй момент ценовых изменений конечен [67, 68, 95].

В итоге можно сказать, что однозначная модель для статистики ценовых изменений не существует, но в то же время найдены некоторые результаты, демонстрирующие свойства такого рода стохастических процессов.

Глава 10

ARCH- и GARCH-процессы

Мы увидели, что существуют эмпирические и теоретические исследования, поддерживающие заключение о том, что волатильность логарифма ценовых изменений финансовых активов есть зависящий от времени стохастический процесс. В этой главе мы обсудим подход к описанию стохастических процессов, характеризуемых зависящей от времени дисперсией (волатильностью), или ARCH-процессов, введённых Инглом в 1982 г. [50]. ARCH-модели применимы в различных областях экономической теории. Примеры включают: (1) средние и дисперсии инфляции в Великобритании, (2) фондовые прибыли, (3) ставки процента, (4) обменные курсы валют. ARCH-модели широко изучены в экономической теории и финансах, и по ним имеется огромная литература.

ARCH-модели — это простые модели, способные описать стохастический процесс, который локально не стационарен, но асимптотически стационарен. Это подразумевает, что параметры, контролирующие условную ФПВ $f_t(x)$ флуктуируют во времени t . Однако такая «локальная» временная зависимость не мешает стохастическому процессу иметь хорошо определённую ФПВ $P(x)$.

ARCH-процессы являются эмпирически мотивированными дискретными по времени стохастическими моделями, для которых дисперсия на времени t зависит — условно — от некоторых прошлых величин квадратов самого случайного сигнала. ARCH-процессы определяют класс стохастических моделей, потому что каждая специфическая модель характеризуется конкретным числом управляющих параметров и специфической формой ФПВ, называемой условной ФПВ процесса, генерирующего случайную переменную на времени t .

В этой главе мы представим некоторые широко используемые ARCH-процессы. Мы сосредоточим наше внимание на форме асимптотической ФПВ и на наблюдаемых скейлинговых свойствах.

10.1. ARCH-процесс

Стохастический процесс с авторегрессионной условной гетероскедастичностью, а именно стохастический процесс с «непостоянными дисперсиями, зависящими от прошлых значений, но постоянной безусловной дисперсией» [50], есть ARCH(p)-процесс, определённый уравнением:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 x_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p x_{t-p}^2. \quad (10.1)$$

Здесь $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p$ — положительные числа и x_t — случайная величина с нулевым средним и дисперсией σ_t^2 , характеризуемой условной ФПВ $f_t(x)$. Обычно $f_t(x)$ берётся гауссовской ФПВ, но возможен и другой выбор.

Изменяя количество p членов в (10.1), можно управлять величиной и природой памяти дисперсии σ_t^2 . Более того, стохастическая природа ARCH(p)-процесса изменяется при изменении формы условной ФПВ $f_t(x)$. ARCH-процесс является полностью определённым только тогда, когда p и форма $f_t(x)$ определены.

Мы рассматриваем простейший ARCH-процесс, а именно ARCH(1)-процесс с гауссовской условной ФПВ. Этот ARCH(1)-процесс определяется уравнениями:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 x_{t-1}^2 \quad (10.2)$$

и

$$S(t) = \sum_{i=1}^t x_i. \quad (10.3)$$

На рис. 10.1 мы показываем временную эволюцию $S(t)$, полученную моделированием ARCH(1)-процесса с параметрами $\alpha_0 = 0,45$ и $\alpha_1 = 0,55$. На том же рисунке мы также показываем временную эволюцию с дисперсией σ_t^2 . Хотя условная ФПВ выбрана гауссовской, асимптотическая ФПВ представляет собой заданную степень лептоэксцессности (положительного эксцесса, островершинности), потому что дисперсия σ_t условной ФПВ сама является флуктуирующим случайным процессом.

ARCH(1)-процесс с гауссовской условной ФПВ характеризуется конечной «безусловной» дисперсией (эта дисперсия наблюдается на длинных временных интервалах), если

$$1 - \alpha_1 \neq 0 \text{ при } 0 \leq \alpha_1 < 1. \quad (10.4)$$

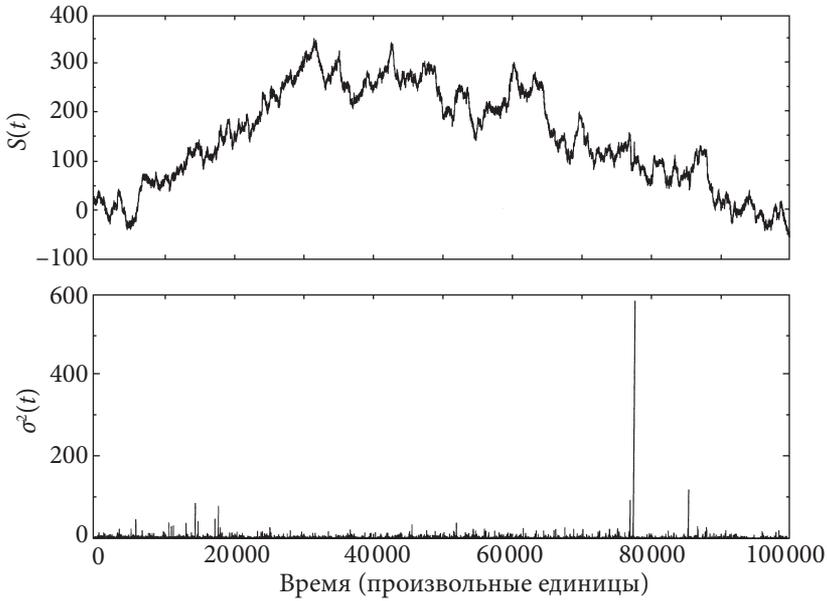


Рис. 10.1. Численное моделирование процесса ARCH(1), характеризующегося параметрами $\alpha_0 = 0,45$, $\alpha_1 = 0,55$ и условной гауссовой ФПВ. Показана временная эволюция $S(t)$ (вверху) и её условная дисперсия (внизу).

Величина дисперсии равна

$$\sigma^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}. \quad (10.5)$$

Эксцесс ARCH(1) процесса есть [50]

$$k \equiv \frac{\langle x^4 \rangle}{\langle x^2 \rangle^2} = 3 + \frac{6\alpha_1^2}{1 - 3\alpha_1^2}. \quad (10.6)$$

который конечен, если

$$0 \leq \alpha_1 < \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (10.7)$$

Следовательно, изменяя α_0 и α_1 , можно получить стохастические процессы с одинаковой безусловной дисперсией, но различными величинами эксцесса.

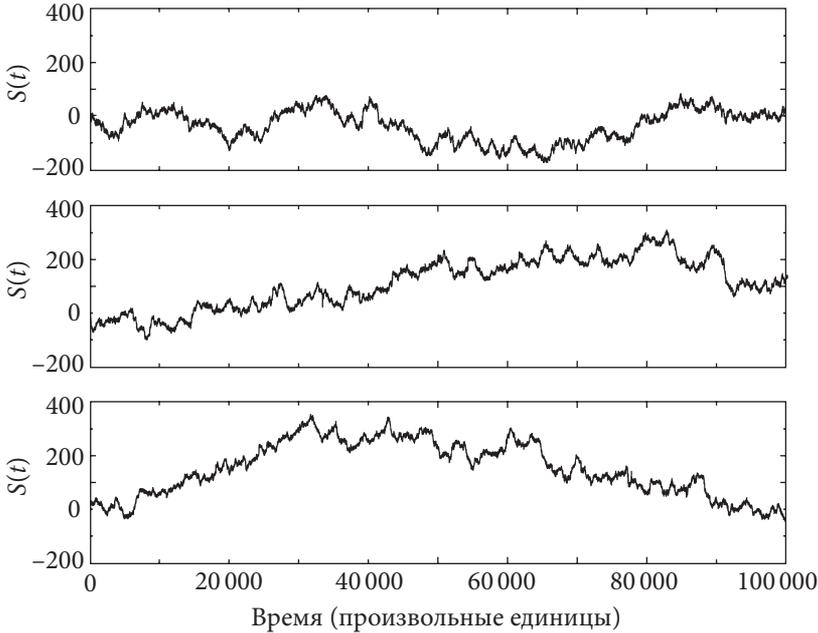


Рис. 10.2. Численное моделирование ARCH(1)-процесса с одинаковой безусловной дисперсией ($\sigma^2 = 1$) и различными значениями безусловного эксцесса. Вверху: $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 0$ (значит, $k = 3$ по формуле (10.6)). Посередине: $\alpha_0 = \alpha_1 = 0,5$ (значит, $k = 9$). Внизу: $\alpha_0 = 0,45, \alpha_1 = 0,55$ (значит, $k = 23$)

Далее мы рассмотрим три примера ARCH(1) временных рядов, имеющих одинаковую безусловную дисперсию, но различные величины эксцесса; $\sigma^2 = 1$ для всех примеров, в то время как величины коэффициентов эксцесса k возрастают от 3 (винеровский процесс) до 23. На рис. 10.2 мы показываем временные ряды $S(t)$, в то время как на рис. 10.3 — временный ряд x . Рассматривая рис. 10.2, мы замечаем, что «посещаемая территория» в ARCH(1)-процессе увеличивается при росте k (несмотря на тот факт что $\sigma^2 = 1$ для всех трёх случаев); в соответствии с этим наблюдением мы видим на рис. 10.3, что выбросы, в три раза превышающие безусловное стандартное отклонение, наблюдаются когда $k > 3$. Из формы асимптотической ФПВ (рис.10.4) мы замечаем более высокую степень островершинности, когда $k > 3$. Когда $\alpha_0 = 1$ и $\alpha_1 = 0$, безусловная ФПВ $P(x)$ есть гауссиан. Для $0 < \alpha_1 < 1$ точная форма ФПВ ARCH (1) неизвестна.

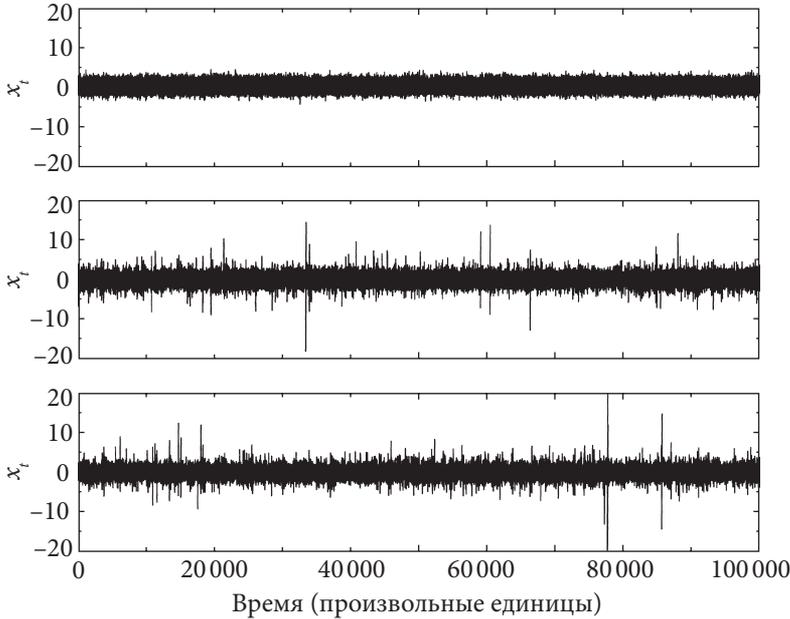


Рис. 10.3. Последовательные приращения случайных величин x_t в моделировании, показанном на рис. 10.2. События при x_t за пределами трех стандартных отклонений почти отсутствуют, когда $k=3$ (вверху), присутствуют, когда $k=9$ (посередине), и более интенсивны, когда $k=23$ (внизу)

10.2. GARCH-процессы

Во многих приложениях, использующих линейную ARCH(p) модель, требуется большая величина p . Это обычно ставит некоторые проблемы в оптимальном определении $p+1$ параметров $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p$, которые наилучшим образом описывают временную эволюцию данного экономического временного ряда. Преодоление этой проблемы ведёт к введению обобщённого ARCH процесса, называемого GARCH(p, q) процессом, введенного Боллерслевом [20].

Этот класс стохастических процессов определяется соотношением:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 x_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q x_{t-q}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \dots + \beta_p \sigma_{t-p}^2, \quad (10.8)$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_q; \beta_1, \dots, \beta_p$ — управляющие параметры. Здесь x_t есть случайная величина с нулевым средним и дисперсией σ_t^2 и харак-

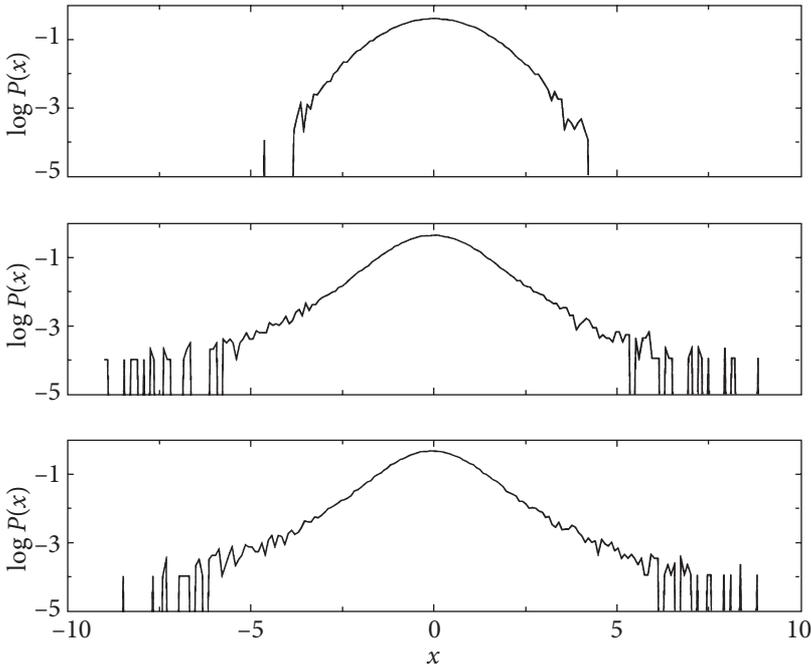


Рис. 10.4. Функции плотности вероятности последовательных приращений, показанных на рис. 10.3. ФПВ гауссова, когда $k=3$ (вверху) и островершинная кривая с эксцессом больше нормального (лептоэксцесс), когда $k=9$ или 23 (посередине и внизу).

теризуется условной ФПВ $f_t(x)$, которая произвольна, но часто выбирается гауссовской.

Мы рассматриваем простейший GARCH-процесс, а именно GARCH(1,1)-процесс с гауссовской условной ФПВ. Она может быть выбрана так [9], что:

$$\sigma^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \beta_1} \quad (10.9)$$

и коэффициент эксцесса даётся отношением:

$$k = 3 + \frac{6\alpha_1^2}{1 - 3\alpha_1^2 - 2\alpha_1\beta_1 - \beta_1^2}. \quad (10.10)$$

10.3. Статистические свойства ARCH / GARCH-процессов

В поисках упрощений в этом разделе мы представляем статистические свойства GARCH(1,1)-процесса с гауссовской условной ФПВ. Более общие GARCH(p,q)-процессы с гауссовской условной ФПВ, по существу, имеют такие же свойства [20].

Во-первых, мы обсудим класс стохастических процессов, к которому принадлежит GARCH(1,1). Он определяется посредством

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 x_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2. \quad (10.11)$$

Случайная величина x_t может быть записана в терминах σ_t посредством соотношения

$$x_t \equiv \eta_t \sigma_t, \quad (10.12)$$

где η_t — независимые идентично распределенные случайные величины с нулевым средним и единичной дисперсией. При предположении гауссовской условной ФПВ η_t тоже является гауссовской. Используя уравнения (10.12), можно переписать формулу (10.11) как:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 \eta_{t-1}^2 + \beta_1) \sigma_{t-1}^2. \quad (10.13)$$

Уравнение (10.13) показывает, что GARCH(1,1)- и более общие GARCH(p,q)-процессы являются, по существу, случайными мультипликативными процессами. Отметим, что автокорреляционная функция случайной величины x_t $R(\tau) = \langle x_t x_{t+\tau} \rangle$ пропорциональна дельта-функции $\delta(\tau)$.

А что можно сказать относительно высокопорядковой корреляции этого процесса? Следуя Боллерслеу [20], мы увидим, что в GARCH(1,1)-процессе x_t^2 является марковской случайной величины, характеризуемой временным масштабом $\tau = |\ln(\alpha_1 + \beta_1)|^{-1}$. Следовательно, GARCH(1,1)-процесс дает интересный пример стохастического процесса x_t , который по второму порядку некоррелирован, но коррелирован в высших порядках.

Давайте, во-первых, напомним, что GARCH(1,1)-процесс может быть записан как:

$$x_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 x_{t-1}^2 + \beta_1 x_{t-1}^2 - \beta_1 \nu_{t-1} + \nu_t, \quad (10.14)$$

где

$$v_t = x_t^2 - \sigma_t^2 = (\eta_t^2 - 1)\sigma_t^2. \quad (10.15)$$

Неважно, что последовательные значения v_t являются некоррелированными случайными величинами с нулевым средним. Эта форма записи GARCH(1,1)-процесса показывает, что GARCH(1,1)-процесс может быть интерпретирован как процесс авторегрессионного скользящего среднего (ARMA)* в x_t^2 . Эта формулировка также полезна в определении автоковариации x_t^2 , которая определена как

$$\text{cov}(x_t^2, x_{t+n}^2) \equiv \langle x_t^2, x_{t+n}^2 \rangle - \langle x_t^2 \rangle \langle x_{t+n}^2 \rangle. \quad (10.16)$$

Для GARCH(1,1)-процесса, определенного как в уравнении (10.11) с конечным моментом четвертого порядка, посредством использования уравнения (10.14) и уравнения (10.15) можно заключить, что

$$\text{cov}(x_t^2, x_{t+n+1}^2) = (\alpha_1 + \beta_1) \text{cov}(x_t^2, x_{t+n}^2). \quad (10.17)$$

Для наиболее общего случая GARCH(p, q)-процесса также можно записать отношения автоковариации для x_t^2, x_{t+n}^2 (временной лаг n шагов) и автоковариации x_t^2, x_{t+n-i}^2 (временной лаг $n-i$ шагов). Это общее отношение есть [20]

$$\text{cov}(x_t^2, x_{t+n}^2) = \sum_{i=1}^m B_i \text{cov}(x_t^2, x_{t+n-i}^2), \quad (10.18)$$

где $m = \max\{p, q\}$ и

$$B_i = \alpha_i + \beta_i. \quad (10.19)$$

Из уравнения (10.17) мы видим, что автоковариация квадрата процесса x_t описывалась экспоненциальной формой

$$\text{cov}(x_t^2, x_{t+n}^2) = A e^{-n/\tau}, \quad (10.20)$$

где $A \equiv \alpha_0 / (1 - B)$ и $\tau \equiv |\ln B|^{-1}$, $B = \alpha_1 + \beta_1$. В GARCH(1,1)-процессе квадрат процесса x_t^2 представляет собой марковский процесс, характеризующийся характерным временем τ .

* ARMA — autoregressive moving average

Марковский характер процесса x_t^2 также наблюдаем в ARCH-процессе. Например, характеристическая временная шкала автоковариации x_t^2 есть в ARCH(1)-процессе. Разница во временной памяти ARCH(1)- и GARCH(1,1)-процессов определяется сравнением характеристической временной шкалы для этих двух процессов. Давайте рассмотрим ARCH(1)- и GARCH(1,1)-процессы с конечными вторым и четвертым моментами. Требование конечной величины четвертого момента подразумевает, что α_1 должно быть ниже, чем $1/\sqrt{3}$ (см. уравнение (10.7) для ARCH(1)-процесса), в то время как соответствующий GARCH(1,1)-процесс с конечным четвертым моментом может быть охарактеризован величинами α_1 и β_1 , так как $\alpha_1 + \beta_1$ близко к 1, при условии, что β_1 больше чем 0,7 (эти условия для конечных или бесконечных моментов для GARCH(1,1)-процесса могут быть найдены в [20]). Следовательно, ARCH(1)-процесс с конечным четвертым моментом может быть охарактеризован максимальным характеристическим временным масштабом на площади флуктуаций приблизительно как $\tau = |\ln 1/\sqrt{3}|^{-1} \cong 1,8$ временных единиц, в то время как в GARCH(1,1)-процессе с конечным четвертым моментом мы можем наблюдать характеристический временной масштаб более длинный, чем сотни временных единиц, с единственным условием, что параметр β_1 должен быть больше 0,7.

В предыдущих главах мы показали существование эмпирического факта, свидетельствующего о том, что дисперсия прибылей характеризуется корреляцией по степенному закону.

Так как корреляция квадрата GARCH(1,1)-процесса экспоненциальна, GARCH(1,1)-процесс не может быть использован для удовлетворительного описания эмпирически наблюдаемого феномена. Несмотря на это ограничение GARCH(1,1)-процесс широко используется для моделирования финансовых временных рядов. Это ограничение преодолевается использованием величин B , близких к единице, в эмпирическом анализе [1]. Величины B , близкие к единице, соответствуют временной памяти, которая может быть порядка месяцев. Модельные величины для параметров α_1 и β_1 получены в период с 1963 г. по 1986 г. посредством анализа дневных данных цен акций в Исследовательском центре цен ценных бумаг (CRSP) и составляли: $\alpha_1 = 0,07906$ и $\beta_1 = 0,90501$ [1]. Сумма $B = \alpha_1 + \beta_1$ тогда равна 0,98407, которая соответствует последовательности x_t^2 в $\tau = 62,3$ торговых дней. Такая долгая временная память квадратов прибылей приблизительно соответствует степенному закону в ограниченном временном окне.

Другим ключевым моментом статистических свойств GARCH(1,1)-процесса является его поведение на различных временных горизонтах. Для конечной дисперсии GARCH(1,1)-процессов применима центральная предельная теорема, и можно ожидать, что временное агрегирование GARCH(1,1)-процесса соответствует уменьшению лептоэксцесса этого процесса. Дрост и Ньюмен [43] выполнили количественное исследование этой проблемы. Они показали, что «временное агрегирование» GARCH(1,1)-процесса снова приводит к GARCH(1,1)-процессу, но он характеризуется измененными управляющими параметрами. В частности, иногда GARCH(1,1) x_t есть «агрегированное» как

$$S_t^{(m)} = \sum_{i=0}^{m-1} x_{t-i}. \quad (10.21)$$

Можно показать, что $S_t^{(m)}$ также является GARCH(1,1)-процессом, характеризуемым управляющими параметрами [43]

$$\begin{aligned} \alpha_0^{(m)} &= \alpha_0 \frac{1 - B^m}{1 - B}, \\ \alpha_1^{(m)} &= B^m - \beta^{(m)}, \end{aligned} \quad (10.22)$$

где $\beta^{(m)} \in (0,1)$ — решение квадратного уравнения:

$$\frac{\beta^{(m)}}{1 + [\beta^{(m)}]^2} = \frac{\beta_1 B^{m-1}}{1 + \alpha_1^2 [1 - B^{2m-2}] / [1 - B^2] + \beta_1^2 B^{2m-2}}. \quad (10.23)$$

На рис. 10.5 показано поведение параметров $\alpha_1^{(m)}$ и $\beta_1^{(m)}$ для временного агрегирования GARCH(1,1)-процессов, полученное повторным удвоением или делением пополам временного интервала для GARCH(1,1)-процессов для диапазона величин параметров. Когда временной интервал удваивается, эти параметры движутся к меньшим величинам $\beta^{(m)}$, в то время как $\alpha_1^{(m)}$ может увеличиваться или уменьшаться, в зависимости от начальных величин α_1 и β_1 . Однако в любом случае (см. левую область на рис. 10.5) аттрактор для всех GARCH(1,1)-процессов с конечной дисперсией есть процесс, характеризуемый $\alpha_1^{(m)} = 0$, $\beta^{(m)} = 0$, а именно гауссовский процесс.

Суммируя, можно сказать, что для любого GARCH(1,1)-процесса временное агрегирование означает, что безусловная ФПВ этого процесса представляет степень лептоэксцесса, который уменьша-

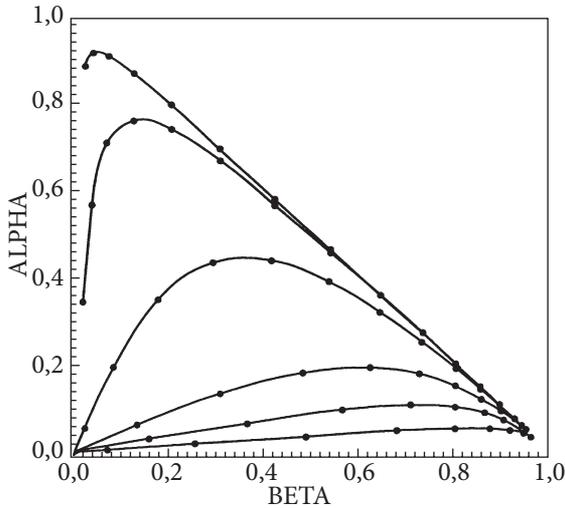


Рис. 10.5. Агрегирование GARCH(1,1). Точки на графике обозначают параметры α_1 и β_1 модели GARCH(1,1), полученные увеличением или уменьшением вдвое выборочного интервала*, характеризуется параметрами $\beta_1 = 0,8$ и $\alpha_1 = 0,05, 0,1, 0,15, 0,19, 0,199$ и $0,1999$ (снизу вверх соответственно). По Дросту и Ньюмэну (Drost and Nijman) [43]

* Начало GARCH(1,1)-процессов

ется, когда временной горизонт между переменными увеличивается. К сожалению, знания поведения $\alpha_1^{(m)}$ и $\beta_1^{(m)}$ для любых величин m недостаточно для определения поведения вероятности прибыли исходного GARCH(1,1)-процесса. Мы исследуем эту зависимость численно в следующем разделе, где сравниваем эмпирические данные и результаты моделирования GARCH(1,1)-процесса.

10.4. GARCH(1,1) и эмпирические наблюдения

В этом разделе мы сравниваем эмпирические высокочастотные данные S&P500 с результатами моделирования GARCH(1,1)-процесса. В частности, мы сравниваем ФПВ и скейлинговые свойства эмпирических данных с ФПВ и скейлинговыми свойствами GARCH(1,1)-процесса, характеризуемого теми же дисперсией и эксцессом, что и во временном ряду S&P500.

GARCH(1,1)-процесс имеет три управляющих параметра — α_0 , α_1 и β_1 . Мы подбираем эти параметры с таким расчетом, чтобы

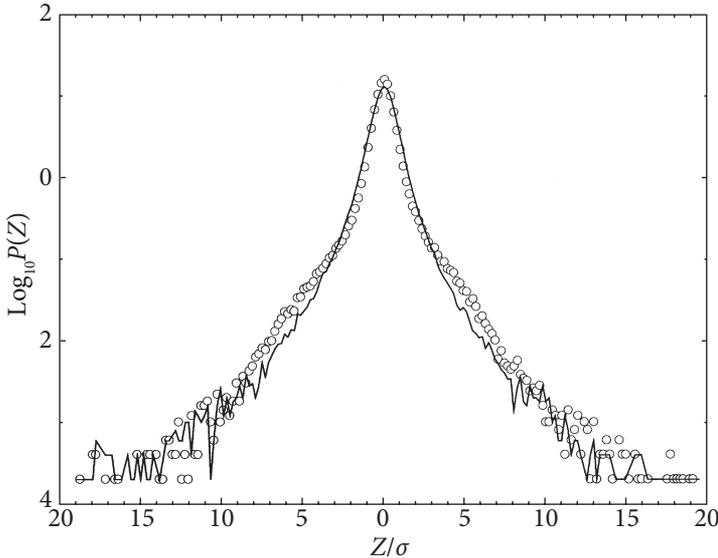


Рис. 10.6. Сравнение эмпирических ФПВ, рассчитанных по высокочастотным данным S&P500 с параметром $\Delta t = 1$ мин. с безусловной ФПВ GARCH(1,1)-процесса, характеризующегося параметрами $\alpha_0 = 2,30 \times 10^{-5}$, $\alpha_1 = 0,09105$ и $\beta_1 = 0,9$ (условная гауссова плотность вероятности). Согласованность хорошо прослеживается для более чем четырех декад

дисперсия и эксцесс GARCH(1,1)-процесса наилучшим образом совпадали с дисперсией и эксцессом, полученными в результате анализа эмпирических данных. Таким путем мы определяем величины двух параметров — α_0 , α_1 . Величина третьего параметра, β_1 , выбрана равной 0,9, поскольку эта величина часто используется в литературе [1].

Из эмпирического анализа высокочастотных данных S&P500 мы нашли для $\Delta t = 1$ мин., что $\sigma^2 = 0,00257$ и $k \approx 43$. Используя уравнения (10.9) и (10.10), мы получаем $\alpha_0 = 2,30 \times 10^{-5}$ и $\alpha_1 = 0,09105$.

Посредством надлежащего выбора управляющих параметров α_0 , α_1 и β_1 GARCH(1,1) стохастические процессы с гауссовской условной ФПВ удовлетворительно моделируют эксцесс ФПВ кратковременных ценовых изменений. На рис. 10.6 мы показываем распределение ценовых изменений S&P500 вместе с распределением, наблюдаемым для GARCH-процесса. Совпадение достаточно хорошее.

Тот факт, что GARCH(1,1)-процесс хорошо описывает $\Delta t = 1$ -минутную ФПВ, не обеспечивает того, что подобный процесс хоро-

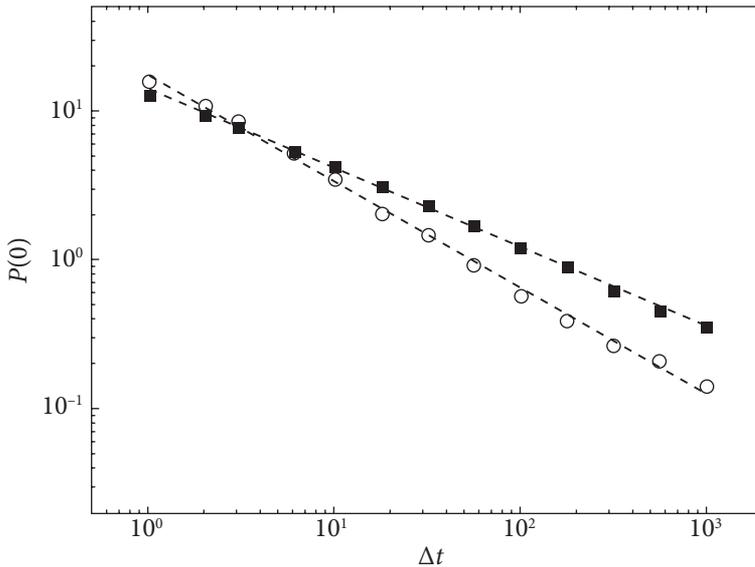


Рис. 10.7. Скейлинговые характеристики стохастического GARCH(1,1)-процесса (черные квадраты) с управляющими параметрами, как на рис. 10.6. Скейлинг GARCH(1,1)-процесса не способен описать эмпирическое поведение, наблюдаемое в высокочастотных данных S&P500 (которые также приведены для сравнения и обозначены белыми кружками). Заметим, что наклон 0,53 чрезвычайно близок к гауссову значению 0,5, показывая, что скейлинг близок к скейлингу гауссова процесса.

шо описывает стохастическую динамику эмпирических данных для любого временного горизонта Δt . Следовательно, возникает важный вопрос, требующий ответа: действительно ли в общем случае динамика высокочастотных ценовых изменений хорошо описывается GARCH(1,1)-процессом. Для описания этой динамики ценовых изменений исчерпывающим способом в дополнение к ФПВ ценовых изменений на данном временном горизонте необходимо также рассмотреть скейлинговые свойства ФПВ ценовых изменений. Что можно сказать о скейлинговых свойствах GARCH-процесса? Теоретического ответа на данный момент не существует; однако некоторые индикаторы могут быть получены методом численного моделирования GARCH-процесса.

Рис. 10.7 показывает скейлинговое свойство вероятности возврата к началу для GARCH(1,1)-процесса с условной гауссовской ФПВ для таких же управляющих параметров, какие использо-

ваны при расчете ФПВ, показанной на рис. 10.6. Эмпирическое поведение, наблюдаемое в высокочастотных данных S&P500 также показано для сравнения. Хотя GARCH(1,1)-процесс способен описать одномоментную ФПВ, он бессилён описать скейлинговые свойства ФПВ для всех временных горизонтов при использовании одних и тех же управляющих параметров. Таким образом, для проверки эффективности модели недостаточно сравнить распределение на единственном временном горизонте.

10.5. Выводы

ARCH- и GARCH-процессы — чрезвычайно интересные классы стохастических процессов. Они широко используются в финансах и могут скоро быть использованы в других дисциплинах. При рассмотрении высокочастотных данных фондового рынка ARCH/GARCH-процессы с гауссовской ФПВ способны описать ФПВ ценовых изменений на данном временном горизонте, но не могут описать надлежащим образом скейлинговые свойства ФПВ на разных временных горизонтах.

Открытыми вопросами для этого класса стохастических процессов остаются:

(1) Какова форма асимптотической ФПВ для ARCH- и GARCH-процессов, характеризуемых данной условной ФПВ $f_i(x)$?

(2) Какова природа скейлингового свойства возврата к исходному значению как функции величин управляющих параметров и формы условной ФПВ?

Глава 11

Финансовые рынки и турбулентность

Одно из возражений, часто выдвигаемых против применения физических методов при исследовании экономических систем, состоит в том, что этот род деятельности не может быть ветвью физики, потому что «уравнение движения процесса» неизвестно.

Но если этот критерий — требование того, чтобы гамильтониан процесса был известен или получаем — применить повсеместно, различные плодотворные области исследований должны бы быть дисквалифицированы, например моделирование трения или многие исследования в области строения материи. Более того, большое количество проблем в физике, которые хорошо описаны определенным уравнением — таких как турбулентность [61] — аналитически неразрешимы даже с применением изоощренных математических и физических методов.

На качественном уровне турбулентность и финансовые рынки одинаково притягательны. В турбулентности исследователь инжектирует большой импульс энергии в систему и изучает отклик, — например вызывает волнение в ведре воды и затем наблюдает, каким образом эта энергия трансформируется последовательно в волны меньших амплитуд. В финансовых системах «фундаментальная информация» может поступить в систему, а реакция на эту информацию может трансформироваться до меньших масштабов — вплоть до отдельных инвесторов. Действительно, слово «турбулентность» пришло в просторечие, так как ценовые флуктуации в финансах качественно похожи на скорость флуктуаций в турбулентности. Полезна ли эта качественная параллель на количественном уровне в такой степени, чтобы наше понимание турбулентности было уместным при изучении ценовых флуктуаций?

В этой главе мы обсудим полностью развитую турбулентность в параллели со стохастическим моделированием фондовых цен. Наша цель состоит в том, чтобы показать, что стыковка между

двумя дисциплинами может быть полезна, но не в том, чтобы установить полную аналогию между ними. Мы найдем, что формальное соответствие между турбулентностью и финансовыми системами не поддержано количественными вычислениями.

11.1. Турбулентность

Турбулентность является хорошо определенной, но не разрешенной физической проблемой, оставаясь и сегодня одним из великих вызовов в физике. Среди подходов, которые были испытаны, есть аналитические подходы, скейлинговые аргументы, основанные на анализе размерностей, статистическое и численное моделирование.

Рассмотрим простую систему, которая демонстрирует турбулентность жидкости с кинетической вязкостью ν , текущей со скоростью V в трубке диаметром L . Управляющий параметр, величина которого определяет «сложность» этого потока, есть число Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{LV}{\nu}. \quad (11.1)$$

Когда число Рейнольдса достигает пороговой величины, «сложность жидкости взрывается», так как она неожиданно становится турбулентной.

Уравнения, описывающие законы движения несжимаемой жидкости, стали известны после опубликования работы Навье 1823 г. [128], которая привела к тому, что теперь называется уравнениями Навье—Стокса

$$\frac{\partial}{\partial t}V(r, t) + (V(r, t)\nabla)V(r, t) = -\nabla P + \nu\nabla^2V(r, t) \quad (11.2)$$

и

$$\nabla V(r, t) = 0 \quad (11.3)$$

Здесь $V(r, t)$ — вектор скорости в точке r в момент времени t и P — давление. Уравнения Навье—Стокса характеризуют сложность «полностью развитой турбулентности» — это технический термин, указывающий на турбулентность при больших значениях числа Рейнольдса. Была доказана неразрешимость в аналитическом виде уравнений (11.2) и (11.3) и даже численное моделирование решений невозможно для очень больших величин Re .

В 1941 г. прорыв в описании «полностью развитой турбулентности» был сделан Колмогоровым [82—84]. Он показал, что в пределе при бесконечных числах Рейнольдса средний квадрат изменения скорости

$$\langle [\Delta V(l)]^2 \rangle = \langle [V(r+l) - V(r)]^2 \rangle \quad (11.4)$$

ведет себя приближенно как

$$\langle [\Delta V(l)]^2 \rangle \sim l^{2/3} \quad (11.5)$$

в инерциальной области, размер которой меньше, чем размер, внутри которого турбулентность проявляется, и больше, чем типичная длина, ниже которой кинетическая энергия рассеивается в виде тепла. Теория Колмогорова хорошо описывает момент второго порядка $\langle [\Delta V(l)]^2 \rangle$ и дает точное выражение для момента третьего порядка $\langle [\Delta V(l)]^3 \rangle$, наблюдаемых в экспериментах, но не способна описать моменты более высоких порядков.

В полностью развитой турбулентности скоростные флуктуации характеризуются прерывистым поведением, которое отражается в лептоэксцессном характере ФПВ скоростных смещений. Теория Колмогорова не способна описать прерывистое поведение скоростных изменений. В экспериментальных исследованиях обычно измеряют скорость $V(t)$ как функцию времени. Из этого временного ряда пространственная зависимость скорости $V(t) = 1000$ может быть получена посредством использования гипотезы Тейлора [124].

11.2. Параллельный анализ ценовой динамики и скорости жидкости

Турбулентность являет собой одновременно аналогию и отличие от эволюции цен на финансовом рынке. Чтобы увидеть это, мы обсудим результаты параллельного анализа [112] двух систем — временную эволюцию индекса S&P 500 и скорости турбулентной жидкости при высоких числах Рейнольдса. Оба процесса демонстрируют прерывистость и негауссовские черты на коротких временных интервалах. Оба процесса нестационарны на коротких временных масштабах, но асимптотически стационарны. Лучшее понимание и моделирование стохастических процессов, которые только асимптотически стационарны, потенциально полезно для обеих областей.

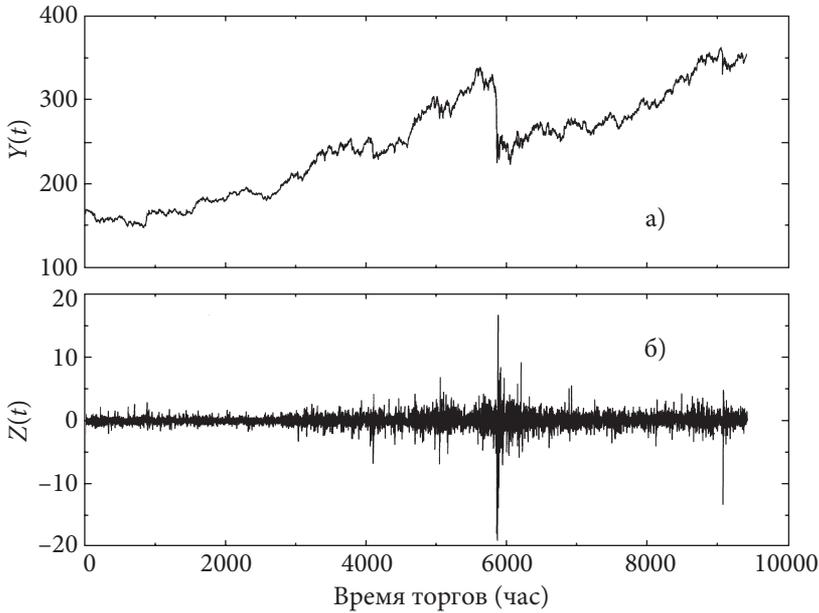


Рис. 11.1. (а) Временная эволюция S&P 500 с дискретным разложением временного ряда на $\Delta t = 1$ час за период с января 1984 г. по декабрь 1989 г. (б) Ежечасные колебания индекса S&P 500 за 6-летний период с января 1984 г. по декабрь 1989 г.

В частности, мы рассматриваем статистические свойства (1) индекса S&P 500 — высокочастотного временного ряда, записанного в течение 6 лет, с 1984 г. по 1989 г., и (2) скорости ветра, регистрируемого в атмосферном поверхностном слое примерно на высоте 6 м над зерновым полем Коннектикутской сельскохозяйственной исследовательской станции. Схожесть и отличие очевидны уже при прямом взгляде на временную эволюцию индекса и скорости потока, — так же, как и при последующем измерении обоих временных рядов.

Во-первых, мы сравниваем временную эволюцию индекса S&P 500 (рис. 11.1а) и временную эволюцию скорости жидкости (рис. 11.2а). Мы также проводим часовые измерения индекса S&P 500 (рис. 11.1б) и изменения скорости потока (рис. 11.2б).

Посредством анализа временной эволюции последовательных изменений обоих сигналов мы можем получить полезную ин-

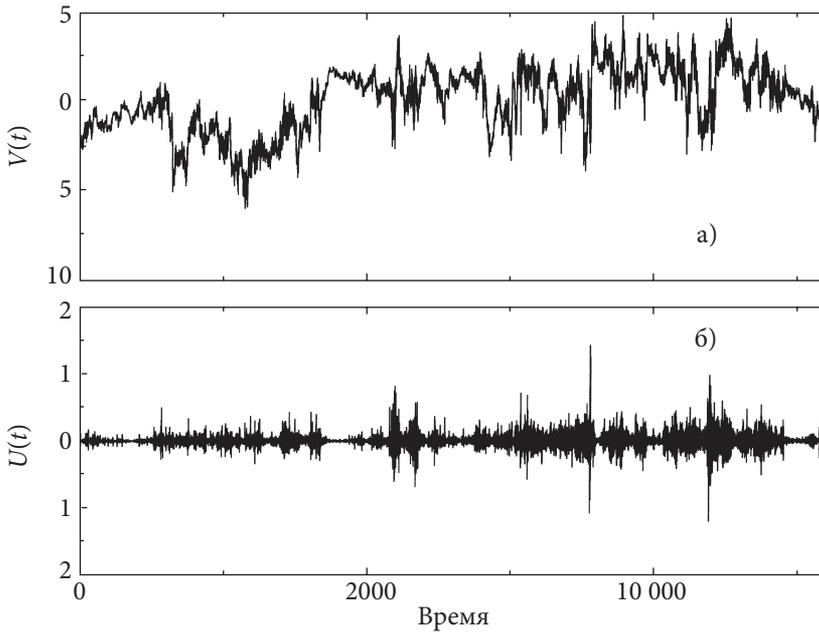


Рис. 11.2. Временная эволюция скорости в полностью развитой турбулентности. (а) Временная эволюция скорости ветра, зафиксированная в атмосфере при крайне высоком значении числа Рейнольдса; в микромасштабе Тейлора число Рейнольдса порядка 1500. Временные единицы даны в произвольных единицах. (б) Разности временного ряда скорости, приведенного в (а). Адаптировано из [113]

формацию относительно статистических свойств двух сигналов. Количественный анализ может быть выполнен посредством рассмотрения волатильности для финансовых данных и квадратного корня второго момента скорости флуктуации для турбулентных данных. Оба множества данных, показанные на рис. 11.3, хорошо описываются степенным законом.

$$\sigma(\Delta t) \sim (\Delta t)^\nu, \quad (11.6)$$

но с разными величинами показателя ν . Индексные изменения существенно не коррелированы (наблюдаемая величина $\nu = 0,53$ чрезвычайно близка к 0,5 — величине, ожидаемой для некоррелированных измерений), в то время как скоростные изменения антикоррелированы ($\nu = 0,33 < 0,5$).

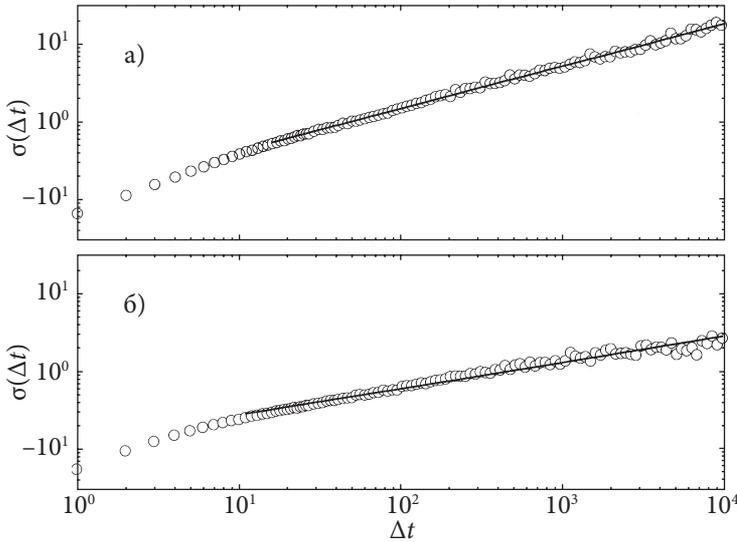


Рис. 11.3. (а) Стандартное отклонение $\sigma(\Delta t)$ распределения вероятности $P(Z)$, характеризующее приращения $Z_{\Delta t}(t)$, изображенное на двойной логарифмической шкале как функция от Δt для временного ряда S&P 500. После временного интервала супердиффузионного поведения ($0 < \Delta t \leq 15$ мин.) наблюдается диффузионное поведение, близкое к ожидаемому для случайного процесса с некоррелированными приращениями; рассчитанный показатель ν формулы (11.6), равный 0,53 (наклон непрерывной линии) близок к теоретическому значению $1/2$. (б) Стандартное отклонение $\sigma(\Delta t)$ распределения вероятности $P(U)$, характеризующее скорость приращений $U_{\Delta t}(t) \equiv V(t + \Delta t) - V(t)$, изображенное на двойной логарифмической шкале как функция от Δt для временного ряда разности скорости в режиме турбулентности. После временного интервала супердиффузионного поведения ($0 < \Delta t \leq 10$ мин.) субдиффузионное поведение близко к ожидаемому для жидкости в рассматриваемом инерционном диапазоне. Фактически, рассчитанный показатель ν формулы (11.6), равный 0,33 (наклон непрерывной линии), близок к теоретическому значению $1/3$. Адаптировано из [112]

Таким образом, количественная разница между двумя формами поведения свидетельствует, что природа временной корреляции между последовательными измерениями должна быть различна для этих двух процессов. Действительно, временные эволюции индекса S&P 500 и скорости ветра на рис. 11.1а и 11.2а выглядят совершенно разными, так как имеется высокая степень

антикорреляции в скорости ветра. Эта разница также визуально очевидна из рис. 11.2б, который приблизительно симметричен относительно оси абсцисс, в то время как на рис. 11.1б этого нет.

Это различие между двумя стохастическими процессами также наблюдаемо в спектрах мощности временных рядов индекса S&P 500 и скорости ветра (рис. 11.4). В то время как оба отвечают уравнению (6.21) в различных частотных диапазонах, показатели η совершенно различны. Для индекса S&P 500 $\eta = 1,98$, так что спектральная плотность, в сущности, идентична спектру мощности антикорреляционного случайного процесса ($\eta = 2$). Для временного ряда скорости ветра $\eta \approx 5/3$ в диапазоне стационарного движения и $\eta \approx 2$ в диапазоне турбулентности.

Гасшхай и др. [64] показали формальную аналогию между скоростью турбулентного потока и обменным курсом валюты на валютном рынке. Они подтвердили свое заключение, показав, что изменение временного горизонта Δt приводит к изменению наблюдаемых форм как ФПВ ценовых изменений курсов валют, так и ФПВ изменений скорости турбулентного потока. В частности, формы обоих ФПВ демонстрируют лептоэксцессные профили на коротких временных горизонтах. Однако параллельный анализ двух явлений [112, 113] показывает, что временная корреляция совершенно различна в этих двух системах (рис. 11.4).

Более того, стохастические процессы, такие как усеченный полет Леви (TLF) и GARCH(1,1), также описывают временную эволюцию ФПВ смещений, которые развиваются от лептоэксцессной до гауссовской формы, в то время как такое поведение не характерно для флуктуаций скорости полностью турбулентного потока.

Для определения степени подобия между флуктуацией скорости потока и изменениями индекса S&P 500 рассматривается вероятность возврата к началу координат, $P_{\Delta t}(U=0)$, как функция Δt для турбулентного потока, полученная с использованием процедуры, примененной ранее для расчета результатов, представленных на рис. 9.3. Мы приводим на рис. 11.5 измеренные $P_{\Delta t}(U=0)$. Мы также показываем на рис. 11.5 оценки $P_G(U=0)$, полученные с использованием измеренной вариации изменений скорости $\sigma(\Delta t)$, предполагая гауссовскую форму для распределения ($P_G(U=0) = 1/\sqrt{2\pi\sigma(\Delta t)}$). Разность между каждой парой точек для данной Δt есть мера отношения $P_{\Delta t}/P_G$, и количественно характеризует степень негауссовости поведения скоростных разностей. Мы заметим, что процесс турбулентности становится возрастающе гауссовским при возрастании интервалов g , но мы не наблюдаем какого-либо скейлингового режима.

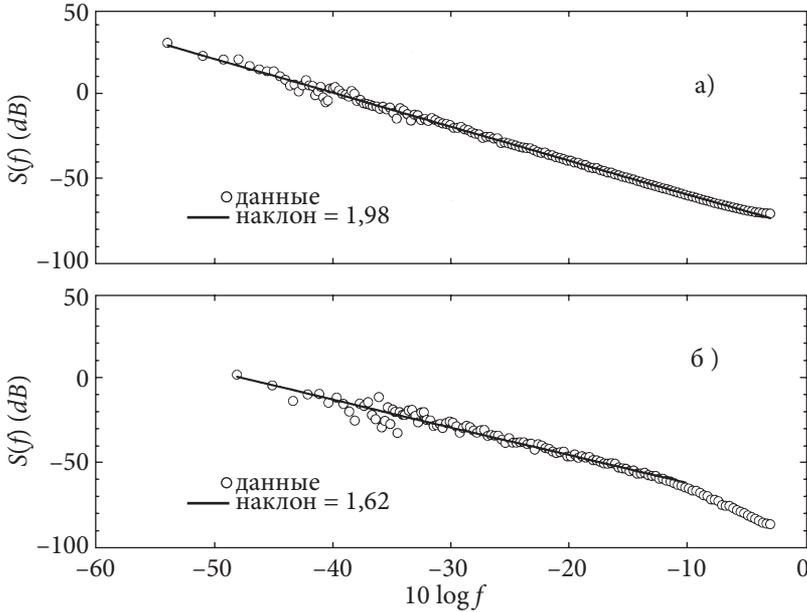


Рис. 11.4. (а) Спектральная плотность временного ряда S&P 500. Рассматривается поведение степенного закона $1/f^2$, ожидаемого для случайного процесса с приращениями, которые попарно независимы, для частотного интервала с более чем четырьмя порядками величины. (б) Спектральная плотность временного ряда скорости. С очевидностью наблюдается инерционный диапазон (низкая частота) степенного закона $1/f^{5/3}$ и диссипативный диапазон (высокая частота). Адаптировано из [112]

11.3. Скейлинг в турбулентности и на финансовых рынках

Концепция скейлинга используется в ряде областей науки, когда исследуемый процесс не имеет характерного масштаба. Степенной закон распределения вариации скорости в турбулентном процессе (см. уравнение (11.5)) служит примером скейлингового поведения, как и степенной закон распределения волатильности на различных временных горизонтах на финансовых рынках (см. уравнение (11.6)). Причины, лежащие в основе этих двух скейлинговых поведений, однако, совершенно различны. В случае турбулентности показатель степени $2/3$ расстояния l прямо следует из того факта, что в этом интервале диапазона статистические свойства флуктуаций скорости являются уникальными и универ-

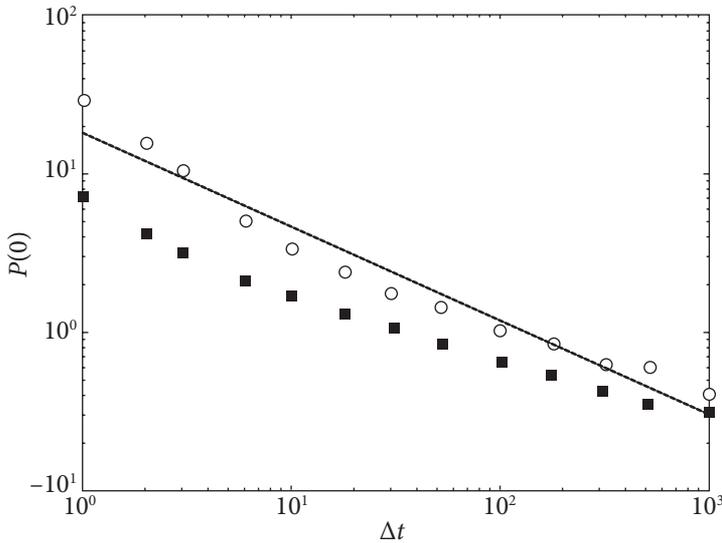


Рис. 11.5. Рассчитанная вероятность возврата к начальному значению скорости турбулентного потока жидкости. Показана вероятность возврата к начальному значению $P(0)$ (незакрашенные кружки) и вероятность возврата, принимающая гауссову форму $P_G(0)$ (закрашенные квадраты), — как функция временного интервала Δt . Кроме того, две рассчитанные величины различаются в полном интервале, показывая тем самым, что контур ФПВ должен быть не гауссовым. Тем не менее, в этом случае единого показателя степенного закона не существует для всего временного интервала в диапазоне трех порядков величины. Наклон наиболее точной линейной аппроксимирующей прямой составляет $-0,59 \pm 0,11$, тогда как гауссово распределение имело бы наклон $-0,5$. Адаптировано из [115]

сально определены масштабом l и средней скоростью рассеяния энергии на единицу массы ε .

Далее мы показываем, что из соображений размерности требуется, чтобы средний квадрат изменения скорости имел вид

$$\langle [\Delta V(l)]^2 \rangle = C \varepsilon^{2/3} l^{2/3}, \quad (11.7)$$

где C — безразмерная константа. Это единственно возможное соотношение, потому что скорость рассеяния энергии на единицу массы имеет размерность $[L]^2[T]^{-3}$. Фактически, если мы определяем a как показатель ε , и b как показатель l в уравнении (11.7), то теория размерностей требует чтобы

$$\frac{[L]^2}{[T]^2} = \frac{[L]^{2a}}{[T]^{3a}} [L]^b, \quad (11.8)$$

где равенство указывает на то, что обе части уравнения имеют одинаковую размерность. Это условие удовлетворяется равенством показателей для L и T :

$$\begin{cases} 2 = 2a + b, \\ 2 = 3a. \end{cases} \quad (11.9)$$

Отсюда $a = 2/3$ и $b = 2/3$.

Следовательно, закон Колмогорова (11.7) прямо соотносится с наблюдением, что средняя скорость рассеяния энергии есть единственно уместная величина при выводе формулы с использованием требования совпадения размерностей. Фактически (11.7) теряет свою применимость, когда другие величины становятся значимыми. Такая ситуация возникает в двумерной задаче, когда в турбулентном потоке образуются стационарные вихревые цепочки.

Заметим, что скейлинговые свойства, наблюдаемые в стохастическом процессе, для дисперсии на различных временных горизонтах и для вероятности возврата к исходному значению не обязательно должны быть связаны. В определенных специальных (и общих) случаях они связаны между собой, например в таких стохастических процессах, как гауссовский или частичное броуновское движение.

Но они не связаны:

- в турбулентной динамике, где скейлинг представлен в дисперсии изменений скорости, но не представлен в вероятности возврата к исходному значению, и
- в «усеченных полетах» Леви, где скейлинговый показатель дисперсии $\sigma^2(t) \sim t$ всегда равен единице, но скейлинговый показатель вероятности возврата к исходному значению есть $-1/\alpha$ для временных интервалов меньших, чем время переходного процесса.

Для финансовых рынков скейлинговый закон волатильности на различных временных горизонтах имеет различное происхождение, становясь прямым следствием двух свойств. Первое состоит в том, что последовательные ценовые изменения некоррелированы, а второе — в том что дисперсия ценовых изменений конечна. Следовательно, в противоположность турбулентности,

скейлинговое свойство волатильности связано со статистическими свойствами, лежащими в основе стохастического процесса. Таким образом, мы увидели, что хотя скейлинг наблюдается в системах, в корне отличных друг от друга, причины скейлинга не обязаны быть одинаковыми.

В действительности фундаментальные причины, которые приводят к скейлингу в турбулентности, отличаются от тех, которые приводят к скейлингу на финансовых рынках.

11.4. Обсуждение

Параллельный анализ флуктуаций скоростей в турбулентности и изменений индекса (или обменного курса) на финансовых рынках показывает, что одинаковые статистические методы могут быть полезны для исследования систем с известными, но неразрешимыми уравнениями движения, и систем, для которых математическое описание процесса остается неизвестным.

В этих двух явлениях мы находим:

- схожесть: прерывистость, негауссовскую ФПВ и постепенную сходимости к гауссовскому аттрактору в ФПВ,
- отличия: ФПВ имеют различные формы в этих двух системах, и вероятность возврата к исходному значению ведет себя по-разному: для турбулентности мы не наблюдаем скейлингового режима, а для изменений индекса мы наблюдаем скейлинговый режим в большом диапазоне временного интервала более чем трех порядков величины. Более того, флуктуации скорости антикоррелированы, а изменения индекса (или обменного курса) некоррелированы.

Более пристальная проверка теории Колмогорова объясняет, почему наблюдение этой разницы не удивительно. Закон $2/3$ для эволюции дисперсии флуктуаций скорости, уравнение (11.5), справедливо только для системы, в которой динамическая эволюция сущностно управляема скоростью рассеяния энергии на единицу массы. Мы не видим какой-либо рациональной причины, поддерживающей идею, что активы на финансовом рынке должны иметь динамическую эволюцию, управляемую аналогичной величиной. В действительности не было найдено никакого закона, аналогичного закону $2/3$, который бы удовлетворительно описывал динамику цен на финансовых рынках.

Глава 12

Корреляция и антикорреляция между акциями

Одна из наиболее привлекательных идей эконофизики состоит в том, что финансовые рынки могут быть описаны в русле аналогичных хорошо поддающихся описанию критических явлений в физике. Последние протекают в пространстве (реальном или абстрактном) и времени. Мы рассмотрели случай только единственного актива и его эволюции; в этой главе мы обсуждаем подход, основанный на одновременном исследовании нескольких ценовых временных рядов активов, принадлежащих данному портфелю. Действительно, наличие корреляций (и антикорреляций) между ценами пар акций давно известно и играет ключевую роль в теории выбора наиболее эффективного портфеля финансовых активов [49, 115]. Мы показываем, как значимы эти корреляции и антикорреляции, посредством изучения синхронности в динамике цен пар акций на финансовом рынке [107]. Особые свойства ковариационной матрицы прибылей акций данного портфеля тщательно исследованы. Мы также кратко рассматриваем исследования, которые имеют целью (1) определить количество экономических факторов, влияющих на динамику цен на данном финансовом рынке [34, 154] и (2) оценить расхождения, наблюдаемые между рыночными данными и результатами, ожидаемыми от применения теории случайных матриц [63, 87, 134].

12.1. Одновременная динамика цен пары акций

На финансовых рынках много акций торгуются одновременно. Один из методов изучения сходства и различия синхронной эволюции цен пары акций состоит в изучении коэффициента корреляции ρ_{ij} между дневными изменениями логарифмов цен двух акций — i и j . Обобщив (5.4), мы можем определить для акции i

$$S_i \equiv \ln Y_i(t) - \ln Y_i(t-1). \quad (12.1)$$

Коэффициент корреляции ρ_{ij} находится из соотношения

$$\rho_{ij} = \frac{\langle S_i S_j \rangle - \langle S_i \rangle \langle S_j \rangle}{\sqrt{\langle S_i^2 - \langle S_i \rangle^2 \rangle \langle S_j^2 - \langle S_j \rangle^2 \rangle}}. \quad (12.2)$$

Здесь Y_i есть цена закрытия торгового дня t для акции i , а S_i — изменение логарифма цены акции i за этот день. Угловые скобки означают среднее по времени по всем торговым дням внутри исследуемого временного периода. Коэффициент корреляции ρ_{ij} может изменяться в диапазоне от -1 до $+1$ с тремя характерными значениями:

$$\rho_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{— полностью коррелированные цены акций} \\ 0 & \text{— корреляция между ценами акций отсутствует} \\ -1 & \text{— полностью антикоррелированные изменения в ценах} \\ & \text{акций} \end{cases}$$

Наше обсуждение проводится для двух наборов акций NYSE [107]:

- 30 акций, используемых для расчета DJIA,
- 500 акций, используемых для вычисления индекса S&P 500.

12.1.1. Портфель акций индекса DJIA

Для набора 30 акций индекса DJIA существует $(30 \times 29)/2 = 435$ различных коэффициентов корреляции ρ_{ij} . Все ρ_{ij} рассчитаны для каждого исследуемого временного периода. В табл. 12.1 приведены минимальные и максимальные значения этого множества ρ_{ij} . Из табл. 12.1 следует, что типичные максимальные величины ρ_{ij} лежат выше 0,5, так что в этом портфеле присутствуют некоторые сильно положительно коррелированные пары акций. Типичная минимальная величина близка к нулю, так что степень максимальной антикорреляции мала.

Наибольшая величина ρ_{ij} , равная 0,73, наблюдалась в 1990 г. для пары акций Кока-Кола и Проктер&Гэмбл. На рис. 12.1 показана временная эволюция $\ln Y(t)$ для обеих акций. Из этого графика видно, что цены этих двух акций заметно синхронизированы.

В табл. 12.1 представлены только минимальные и максимальные величины ρ_{ij} для каждого года. Дополнительная информация о поведении коэффициентов корреляционной матрицы может

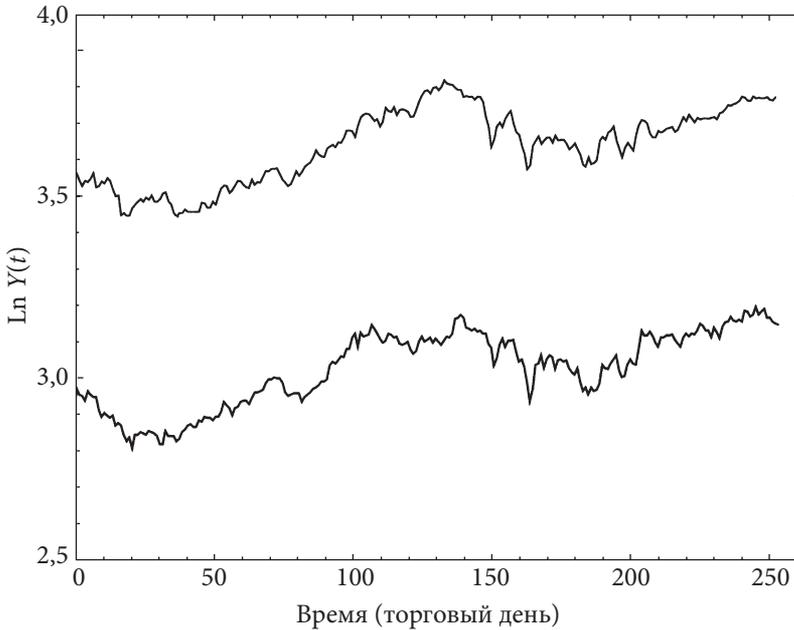


Рис. 12.1. Временная эволюция $\ln Y(t)$ для акций компании Кока-Кола (нижняя кривая) и Проктер&Гэмбл (верхняя кривая) в 1990 г.

быть получена посредством рассмотрения ФПВ $P(\rho_{ij})$ полного множества 435 коэффициентов корреляции. Фактически $P(\rho_{ij})$ — колоколообразная кривая; среднее не очень сильно, но все же зависит от временного интервала (года), а стандартное отклонение σ почти постоянно [107].

Таблица 12.1. Наблюдаемые минимальные и максимальные значения, когда рассчитываются все значения корреляционного коэффициента ρ_{ij} в портфеле из 30 акций индекса Доу-Джонса (Dow-Jones Industrial Average) [107]

Временной период	Минимум	Максимум
1990	0,02	0,73
1991	-0,01	0,63
1992	-0,10	0,63
1993	-0,16	0,63
1994	-0,06	0,51

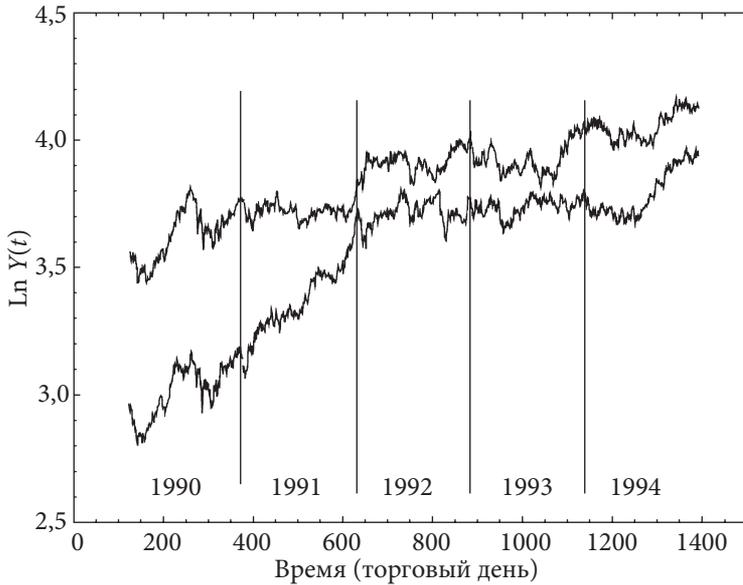


Рис. 12.2. Временная эволюция $\ln Y(t)$ для акций компании Кока-Кола (нижняя кривая) и Проктер&Гэмбл (Procter&Gamble) (верхняя кривая) за пять исследованных календарных лет, с 1990 г. по 1994 г. Значение ρ_{ij} составляет 0,73, 0,47, 0,28, 0,33 и 0,39 в течение пяти лет с 1990 г. по 1994 г., в указанном порядке, тогда как значение δ_{ij} составляет 2,62, 1,73, 1,25, 2,44 и 2,27 соответственно, в течение тех же пяти лет.

Для всех 435 пар акций ρ_{ij} изменяется со временем. Каков характерный временной масштаб, в продолжение которого сильно коррелированные пары акций сохраняют свой корреляционный статус? Рис. 12.2 показывает временную эволюцию $\ln Y(t)$ для Кока-Кола и Проктер&Гэмбл для пяти исследованных календарных лет.

Для количественной оценки относительных величин коэффициентов корреляции пар акций мы рассчитываем

$$\delta_{ij} \equiv \frac{\rho_{ij} - \langle \rho_{ij} \rangle}{\sigma} \quad (12.4)$$

— отклонение ρ_{ij} от средней ее величины, используя стандартное отклонение σ как единицу измерения, где $\langle \rho_{ij} \rangle$ есть среднее ρ_{ij} всех пар акций ij в анализируемом портфеле. Для случая, где i и j означают Кока-Кола и Проктер&Гэмбл, $\delta_{ij} > 1$ для всех пяти лет наблю-

дений. Вероятно, для этих пар акций коэффициент корреляции ρ_{ij} изменяется с характерным временным масштабом порядка года.

12.1.2. Портфель акций индекса S&P 500

Для этого портфеля акций, используемых для вычисления индекса S&P 500 существует $(500 \times 499)/2 = 124\,750$ различных ρ_{ij} — это много больше, чем для 30 акций DJIA. В табл. 12.2 приведены минимальные и максимальные значения ρ_{ij} , измеренные для S&P 500. В соответствии с результатами, полученными для портфеля DJIA, мы наблюдаем пары акций, характеризующиеся высокой степенью корреляции [107]. Наиболее заметный случай наблюдался в 1994 г. между Хоум Стейк Мининг и Плейсер Дом Инк., для которых $\rho_{ij} = 0,82$. Антикоррелированные пары акций тоже представлены, но как и для DJIA, степень антикорреляции меньше, чем степень корреляции. Наибольшая антикорреляция $\rho_{ij} = -0,30$ наблюдалась в 1990 г. между Барри Голд и Найченс Корп.

Таблица 12.2. Наблюдаемые минимальные и максимальные значения ρ_{ij} для портфеля из 500 акций индекса S&P 500

Временной период	Минимум	Максимум
1990	-0,30	0,81
1991	-0,29	0,74
1992	-0,25	0,73
1993	-0,27	0,81
1994	-0,25	0,82

Так как общее число наблюдений коэффициентов корреляции ρ_{ij} много больше, чем для DJIA, ФПВ $P(\rho_{ij})$ для индекса S&P 500 имеет большую статистическую надежность. На рис. 12.3 $P(\rho_{ij})$ показана для каждого календарного года. График показывает, как и для случая DJIA, что центр ФПВ медленно движется во времени, в то время как ширина распределения приблизительно постоянна.

12.2. Статистические свойства корреляционной матрицы

Статистические свойства корреляционной матрицы прибылей исследованы в экономической и физической литературе, но с разными целями. В экономических исследованиях основная цель —

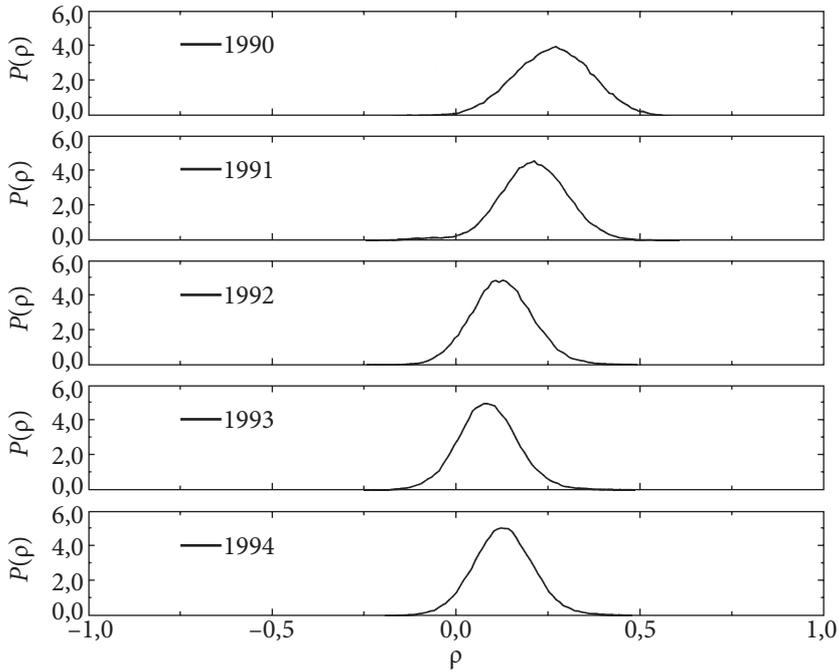


Рис. 12.3. Корреляционные коэффициенты для S&P 500: показаны $P(\rho_{ij})$ для каждого из пяти календарных лет с 1990 г. по 1994 г.

определить количество k факторов, представленных на финансовом рынке, с использованием теории арбитражного оценивания, впервые предложенной Россом [139]. В этой теории экономический фактор есть фактор, который является общим для множества рассматриваемых акций; n однопериодных прибылей активов R_n генерируются с использованием линейной модели стохастического процесса с k факторами. В частности,

$$R_n = R_{n0} + B\xi_k + \varepsilon_n, \quad (12.5)$$

где R_{n0} — безрисковые и рискованные премиальные средние прибыли, B есть k матрица весов, ξ_k — временной ряд k факторов, влияющих на прибыли актива, и ε_n — риск актива. Предполагается, что ξ_k и ε_n имеют нулевое среднее и характеризуются ковариацией $\text{cov}(\xi_i, \varepsilon_i)$, где $k \neq l$ и $\text{cov}(\xi_i, \varepsilon_i) = 0$ для любого i .

Статистические свойства собственных значений случайных матриц хорошо подтверждены [39, 69, 119]. В рамках теории ар-

битражного ценообразования существование собственных значений, доминирующих в ковариационной матрице, интерпретировано как доказательство небольшого количества экономических факторов k , управляющих стохастической динамикой прибылей актива на финансовом рынке. Эмпирический анализ, похоже, подтверждает существование небольшого количества значимых факторов, а также то, что имеются убедительные аргументы в пользу наличия доминирующих k факторов среди них [24].

Эмпирический анализ, выполненный физиками, также обнаруживает собственные значения, намного большие предсказываемых теорией случайных матриц (и несколько других собственных значений, не намного их превышающие) [87, 134]. Физики надеются использовать теоретические модели, такие как локализационная теория Андерсона или теория спиновых стекол для интерпретации этих данных. Например, локализационная теория Андерсона побуждает к изучению минимальных собственных значений, связанных с собственными векторами, которые оказываются управляемыми количеством независимых элементов, меньшим, чем для типичного собственного вектора [134].

12.3. Обсуждение

Анализ коэффициента корреляции и ковариационных матриц прибылей активов на финансовых рынках показывает существенную корреляцию между отдельными парами активов, торгуемых на рынке. Правдоподобно, что наличие умеренной степени корреляции между акциями необходимо брать в расчет при моделировании финансовых рынков. Показано наличие малого количества экономических факторов, оказывающих существенное воздействие на цены большого количества активов. Эти находки не противоречат гипотезе эффективного рынка, так как синхронизация между ценами активов и существование экономических факторов не подразумевают прямо временной предсказательности будущих цен активов. Если бы имелись точные знания о природе экономических факторов и их динамике, а также обнаруживалась бы корреляция между ценами активов с временным лагом, то это обеспечило бы арбитражные возможности и в таком случае противоречило бы эффективности рынка. В действительности одно из этих противоречий обнаружено наблюдением того факта, что прибыли больших акций ведут за собой цены более мелких акций [97].

Глава 13

Таксономия портфеля акций

В гл. 12 мы ввели понятие коэффициента корреляции ρ_{ij} , чтобы количественно оценить степень синхронизации цен акций i и j . В этой главе мы увидим, что эта концепция полезна в двух разных аспектах: (1) она дает возможность определить меру, которая позволяет оценить относительное расстояние между акциями данного портфеля и (2) она обеспечивает возможность получения экономической информации, содержащейся во временных рядах цен акций.

13.1. Расстояние между акциями

Метод определения расстояния между акциями i и j с течением времени состоит в следующем. Рассмотрим величину

$$\tilde{S}_i \equiv \frac{S_i - \langle S_i \rangle}{\sqrt{\langle S_i^2 \rangle - \langle S_i \rangle^2}}, \quad (13.1)$$

где S_i — логарифмическая разница цен акций i , заданная уравнением (12.1). Следовательно, \tilde{S}_i есть аналогичная переменная, полученная из среднего значения величины S_i и деленная на ее стандартное отклонение, рассчитанное для заданного временного интервала. Рассмотрим n значений \tilde{S}_i , рассчитанных для одного временного интервала как компоненты \tilde{S}_{ik} n -мерного вектора \tilde{S}_i . Эвклидово расстояние d_{ij} между векторами \tilde{S}_i и \tilde{S}_j получено из пифагорова отношения

$$d_{ij}^2 = \|\tilde{S}_i - \tilde{S}_j\|^2 = \sum_{k=1}^n (\tilde{S}_{ik} - \tilde{S}_{jk})^2. \quad (13.2)$$

Вектор \tilde{S}_i имеет единичную длину, потому что из определения (13.1) имеем

$$\sum_{k=1}^n \tilde{S}_{ik}^2 = 1. \quad (13.3)$$

Следовательно, уравнение (13.2) может быть переписано как

$$d_{ij}^2 = \sum_{k=1}^n (\tilde{S}_{ik}^2 + \tilde{S}_{jk}^2 - 2\tilde{S}_{ik}\tilde{S}_{jk}) = 2 - 2\sum_{k=1}^n \tilde{S}_{ik}\tilde{S}_{jk}. \quad (13.4)$$

Сумма в правой части уравнения (13.4) $\sum_{k=1}^n \tilde{S}_{ik}\tilde{S}_{jk}$ совпадает с ρ_{ij} (см. (12.2)). Следовательно, (13.4) приводит (Д. Сорнетт, частное сообщение) к следующему:

$$d_{ij} = \sqrt{2(1 - \rho_{ij})}. \quad (13.5)$$

Так как уравнение (13.2) определяет эвклидово расстояние, из него следуют три свойства:

$$\begin{aligned} \text{свойство 1} \quad d_{ij} &= 0 \Leftrightarrow i = j, \\ \text{свойство 2} \quad d_{ij} &= d_{ji}, \\ \text{свойство 3} \quad d_{ij} &\leq d_{ik} + d_{kj}. \end{aligned} \quad (13.6)$$

Свойства (1) и (2) легко проверяются, поскольку при $\rho_{ij} = 1$ из уравнения (13.5) следует, что $d_{ij} = 0$, а из равенства $\rho_{ij} = \rho_{ji}$ следует $d_{ij} = d_{ji}$. Справедливость свойства (3) (треугольного неравенства) вытекает из уравнений (13.2) и (13.5). Таким образом, величина d_{ij} удовлетворяет всем трем свойствам, которые должны соблюдаться в метрическом пространстве.

Введение расстояния между синхронно развивающейся ценой активов было впервые предложено в [108], где расстояние численно оцениваемых свойств (1) и (3) было использовано. Знание матрицы расстояний между n объектами обычно используется для разбиения множества n объектов на подмножества близко отстоящих друг от друга объектов. Для получения такой таксономии необходимо сформулировать дополнительную гипотезу относительно топологического пространства n объектов. Этому посвящен следующий раздел.

13.2. Многомерные пространства

Рассмотрим конкретный пример — портфель $n = 6$ акций: Шеврон (SHV), Дженерал электрик (GE), Кока-Кола (KO), Прок-

тер&Гэмбл (PG), Тексако (TX) и Эксон (XON), где в скобках мы даем сокращенные обозначения. Используя измеренные величины ρ_{ij} за календарный 1990 г., мы вычисляем матрицу расстояний \hat{d}_{ij} .

	CHV	GE	KO	PG	TX	XON
CHV	0	1,15	1,18	1,15	0,84	0,89
GE		0	0,86	0,89	1,26	1,16
KO			0	0,74	1,27	1,11
PA				0	1,26	1,10
TX					0	0,94
XON						0

Мы ввели рабочую гипотезу: полезное пространство для соединения n акций есть многомерное пространство. Эта гипотеза мотивирована *апостериори* тем фактом, что такая объединительная таксономия имеет смысл с экономической точки зрения. Многомерное пространство есть пространство, в котором расстояние между объектами есть многомерное расстояние. Многомерное расстояние \hat{d}_{ij} должно удовлетворять первым двум свойствам метрического расстояния (1) $\hat{d}_{ij} = 0 \Leftrightarrow i = j$ и (2) $\hat{d}_{ij} = \hat{d}_{ji}$, а обычное «треугольное неравенство» — свойство (3) уравнения (13.6) — заменено более жестким неравенством, названным «многомерным неравенством»

$$\hat{d}_{ij} \leq \max\{\hat{d}_{ik}, \hat{d}_{kj}\} \quad (13.7)$$

Многомерные пространства обеспечивают естественный способ описания иерархически структурированных сложных систем, так как концепция многомерности прямо связана с концепцией иерархии. Они наблюдаются в спиновых стеклах [123] — прототипе возмущенных неупорядоченных систем. Хорошее введение в концепцию многомерности для читателя с подготовкой в области физики дает Раммах [138].

Общая связь между индексированными иерархиями и многомерностью была строго изучена Бензецири [15]. При условии что метрическое расстояние между n объектами существует, различные многомерные пространства могут быть получены посредством некоторого разделения заданного множества n объектов. Среди всех возможных многомерных структур, связанных с метрикой расстояния d_{ij} , одно выделяется благодаря его простоте и замеча-

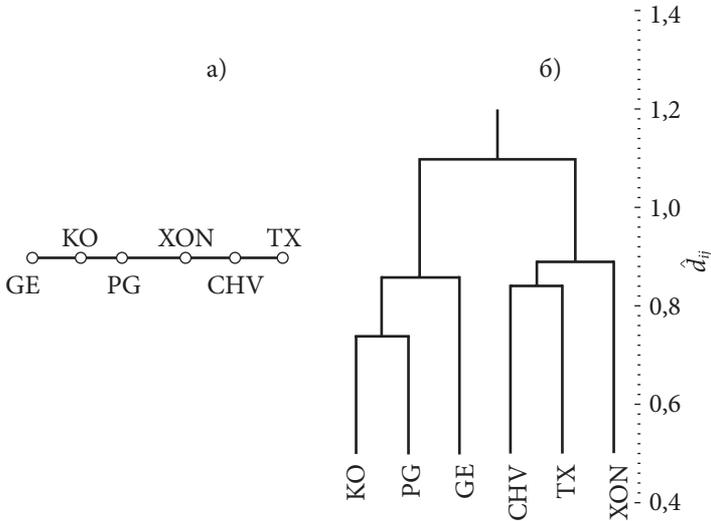


Рис. 13.1. (а) MST и (б) индексированное иерархическое дерево, полученное для примера из шести фирм, идентифицируемых по их аббревиатурам CHV, GE, KO, PG, TX и XON

тельными свойствам. Это субдоминантная многомерность. В метрическом пространстве, в котором n объектов связаны между собой, субдоминантная многомерность может быть получена посредством определения минимального дерева (дерева с минимальной суммарной длиной ветвей) MST^* , связывающего n объектов. MST является концепцией теории графов [157]. В связном взвешенном графе из n объектов MST существует дерево, имеющее $n - 1$ ветвей, которые минимизируют сумму расстояний между вершинами. Субдоминантное многомерное пространство, ассоциированное с метрическим пространством, дает хорошо определенную топологическую структуру, которая связана с однозначно индексированной иерархией. Следовательно, исследование субдоминантных многомерностей позволяет определить в уникальной области индексированную иерархию n рассматриваемых объектов. Метод конструирования MST , связывающего множество n объектов, известен как алгоритм Крускала [130, 157], он прост и прям.

MST , ассоциированное с евклидовой матрицей, может быть получено следующим образом. Во-первых, находим пару акций,

* MST — Minimal-Spanning Tree

разделенных наименьшим расстоянием: КО и РG ($d=0,74$). Затем находим пару акций со следующим наименьшим расстоянием: СНV и ТХ ($d=0,84$). Теперь мы имеем две отдельных области в MST. Если мы продолжим, то найдем следующую пару КО и GE ($d=0,86$). На этой стадии области MST состоят из GE—КО—РG и СНV—ТХ. Следующая пара ближайших акций есть GE—РG и СНV—ХОН ($d=0,89$). Связь GE—РG не рассматривается, потому что обе акции уже отсортированы, а ХОН связывается с СНV. Теперь есть две области: ХОН—СНV—ТХ и GE—КО—РG. Наименьшее расстояние, связывающее эти две области, наблюдается для РG—ХОН ($d=0,10$). Эта связь РG—ХОН завершает построение MST.

Используя эту процедуру, можно получить MST, показанное на рис. 13.1а. На рис. 13.1б приведено индексированное иерархическое дерево, ассоциированное с MST. Это дерево ясно показывает, что в этом портфеле существует две группы акций. В первой группе есть нефтяные компании (СНV, ТХ и ХОН) а во второй — компании, продающие потребительские товары или услуги (КО, РG и GE). Индексированное иерархическое дерево позволяет определить матрицу многомерных расстояний \hat{d}_{ij} . В нашем примере матрица \hat{d}_{ij} имеет вид:

	СНV	GE	КО	РG	ТХ	ХОН
СНV	0	1,10	1,10	1,10	0,84	0,89
GE		0	0,86	0,86	1,10	1,10
КО			0	0,74	1,10	1,10
РG				0	1,10	1,10
ТХ					0	0,89
ХОН						0

Каждый элемент в матрице \hat{d}_{ij} равен максимальному расстоянию между двумя последовательными объектами, вычисленному при движении от начального объекта к конечному объекту через кратчайший путь MST, связывающий два объекта. В противоположность \hat{d}_{ij} -матрице, количество различных элементов величин в ультраметрической матрице расстояний \hat{d}_{ij} не может превысить $n-1$, как это и представлено в нашем примере.

В главе 12 мы показали, что временная эволюция ρ_{ij} может быть охарактеризована медленной динамикой в годовом масштабе времени. Однако ρ_{ij} есть статистическая величина и она может быть использована при анализе стабильности иерархической структуры (рис. 13.1б). На рис. 13.2 показаны индексированные

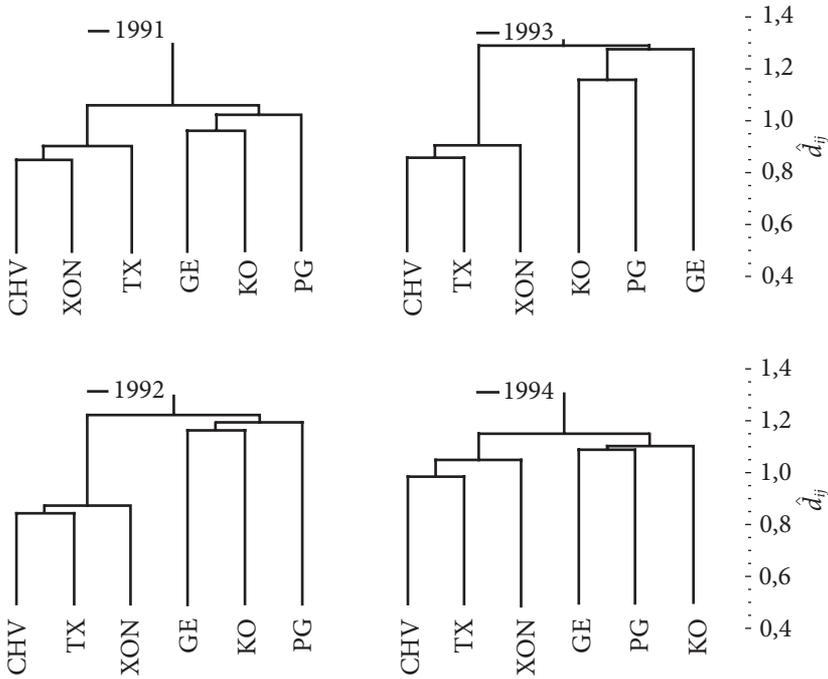


Рис. 13.2. Индексированные иерархические деревья, полученные в течение календарных лет с 1991 г. по 1994 г. для портфеля акций из шести фирм (GHV, GE, KO, PG, TX и XON)

иерархические деревья, полученные в календарных годах с 1991 г. по 1994 г. для портфеля из шести указанных выше акций.

Два основных кластера, наблюдаемые в 1990 г. (рис. 13.16), CHV — TX — XON и GE — PG — KO, также наблюдаются во всех других годах. Но величина базовой линии — расстояния — зависит от времени, и внутренняя структура этих двух кластеров изменяется. Например, в четырех из пяти лет ближайшие нефтяные компании есть CHV и TX, в то время как в 1991 г. ближайшими являются CHV и XON (ср.рис. 13.1 и 13.2). Наиболее сильно связаны компании потребительских товаров KO и PG в 1990 и 1993, GE и KO в 1991, GE и PG в 1994 гг.

Итак, эмпирический анализ показывает, что индексированное иерархическое дерево зависит от времени, но сохраняет примерно в течение года базовую структуру, которая демонстрирует значимую экономическую таксономию.

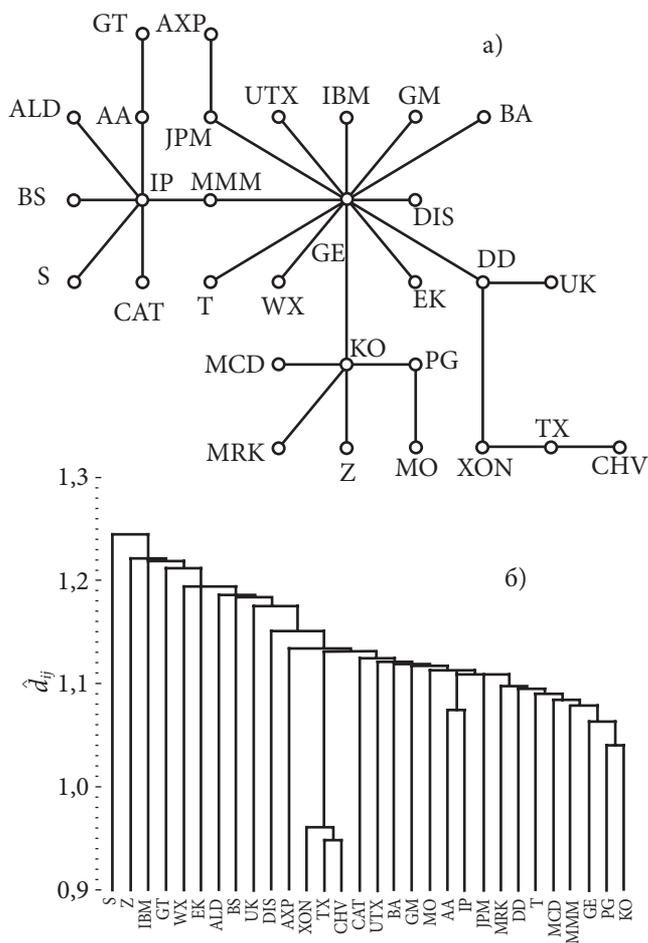


Рис. 13.3. (а) MST и (б) индексированное иерархическое дерево, полученное для портфеля DJIA в течение временного периода с 07/89 по 10/95. Адаптировано из [108]

13.3. Субдоминантное многомерное пространство портфеля акций

Изложенная выше процедура использована в [108] для получения многомерного пространства двух портфелей акций. Первый представляет собой множество из 30 акций, использованных для вычисления индекса Доу-Джонса (DJIA). На рис. 13.3. показано MST,

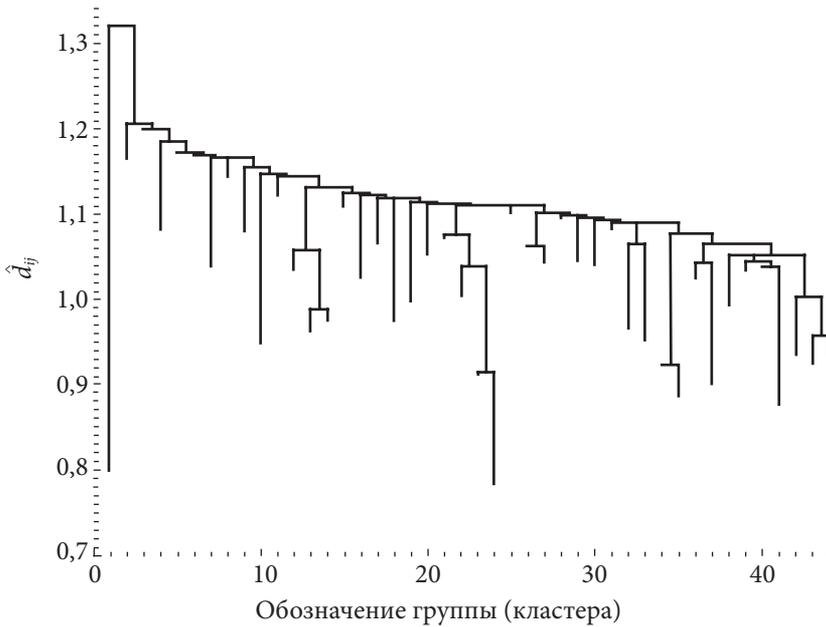


Рис. 13.4. Основная структура MST портфеля S&P 500 для временного периода с 07/89 по 10/95. Адаптировано из [108].

полученное для портфеля DJIA с 7/89 до 10/95, а также индексированное иерархическое дерево. Три группы связанных акций видны на этом рисунке. Первая группа составлена из акций нефтяных компаний (CHV, TX и XON), вторая — из акций компаний, производящих потребительские товары и услуги, и акций нефтяных компаний (PG, KO, GE, MMM, MCD, T, DD, MRK и JPM), и третья — из акций сырьевых компаний (IP и AA). Эта таксономия, ассоциированная с субдоминантной многомерностью портфеля DJIA, является вполне осмысленной с экономической точки зрения. Заметим, что эта таксономия получена посредством анализа временных рядов цен акций без каких-либо других предположений, кроме одного — фундаментального, состоящего в том, что субдоминантная многомерность хорошо описывает взаимосвязь между акциями портфеля.

Второй портфель — S&P 500. Соответствующая таксономия более наглядна в этом портфеле, чем в DJIA, поскольку S&P 500 портфель намного больше и потому, что различные компании в нем представляют различные области деятельности. MST и соответ-

вующее индексное иерархическое дерево слишком сложно для графического предоставления, но рис.13.4 показывает основную структуру MST. Рисунок получен с учетом только тех линий, которые кончаются в группе, не меньшей чем из двух акций. Существуют 44 группы, полученные использованием этой процедуры и в большинстве случаев эти группы гомогенны в отношении их секторов промышленности и часто также в отношении их подсекторов [108], как описано в 49 ежегодном отчете американской индустрии (Forbes Annual Report on American Industry).

13.4. Выводы

В гл. 2 мы обсудили ключевой момент информационной теории: временной ряд, который состоит из ограниченного количества наблюдений, часто напоминает случайный процесс. В этой главе мы увидели, что есть возможность построить стратегии, которые позволяют получить осмысленную токсономию, используя корреляционный анализ более чем одного ценового ряда. В частности, мы можем находить часть экономической информации, накопленной в отдельном временном ряде, если рассчитаем расстояние между каждой парой акций в портфеле, и можем предположить, что субдоминантное многомерное пространство есть подходящая топология.

Глава 14

Опционы на идеализированных рынках

В предшествующих главах мы увидели, что моделирование динамики цен акций — это достаточно сложная задача и что окончательную модель еще предстоит построить. Сложность всей финансовой системы еще более высока. Сложность состоит не только в торговле финансовыми ценными бумагами, — дополнительный источник сложности возникает при выпуске финансовых контрактов этих флуктуирующих финансовых ценных бумаг.

Важным классом финансовых контрактов являются производные финансовых инструментов, их цены зависят от цен других (базисных) ценных бумаг [22, 45, 73, 74, 122, 127]. Примеры производных включают форвардные контракты, фьючерсы, опционы, свопы (различного рода обмена активами).

Производные торгуются или на рынке незарегистрированных ценных бумаг, или более формальным путем, на специализированных биржах.

В этой главе мы исследуем базисные финансовые контракты и процедуры их рационального оценивания. Мы рассматриваем идеализированные рынки и обсуждаем гипотезы, лежащие в основе методов, используемых для получения рациональной цены контрактов.

14.1. Форвардные контракты

Простейшая производная — форвардный контракт. Когда оговариваются условия форвардного контракта, один из участников соглашается купить данное количество актива по определенной цене (которая называется форвардной ценой или ценой поставки K) на обусловленной будущей дате (дате поставки T). Другой участник соглашается в этот день продать указанное количество актива по оговоренной в контракте цене. Партнер, согласившийся

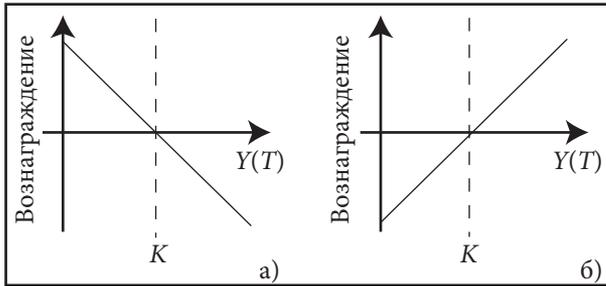


Рис. 14.1. Вознаграждение для каждой стороны, вовлеченной в форвардный контракт, как функция от цены $Y(T)$ на дату погашения T : (а) для короткой позиции (сторона, соглашающаяся продать в будущем), (б) для длинной позиции (сторона, соглашающаяся купить в будущем)

купить, будет находиться в длинной позиции, а партнер, согласившийся продать, — в короткой позиции.

Цена продаваемого финансового актива $Y(T)$ флуктуирует и на дату поставки T обычно отличается от цены, обусловленной в форвардном контракте. Доход является или положительным, или отрицательным: то, что выигрывает один из партнеров, другой теряет (рис. 14.1).

14.2. Фьючерсы

Фьючерсный контракт есть форвардный контракт, торгуемый на бирже. Это означает, что контракт является стандартизированным и что два участника взаимодействуют посредством биржевого института — клирингового центра. Клиринговый центр оформляет контракты: один с получателем, другой с продавцом. Он гарантирует, что его контракты будут выполнены.

14.3. Опционы

Опцион есть финансовый контракт, который дает держателю право купить или продать актив во время T и по цене K . Цена K называется ценой исполнения, и T называется датой исполнения, или датой истечения опциона.

Опционы также могут быть охарактеризованы периодом, в продолжении которого опцион может быть исполнен. Если опцион может быть исполнен только по указанной в нем дате испол-

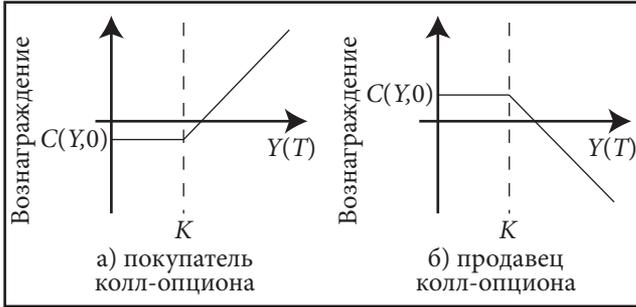


Рис. 14.2. (а) Вознаграждение как функция цены на дату погашения T для покупателя колл-опциона, который стоит $C(Y, t)$ во время заключения контракта, где K означает цену «страйк» (цену исполнения опциона), (б) Вознаграждение для продавца этого же колл-опциона.

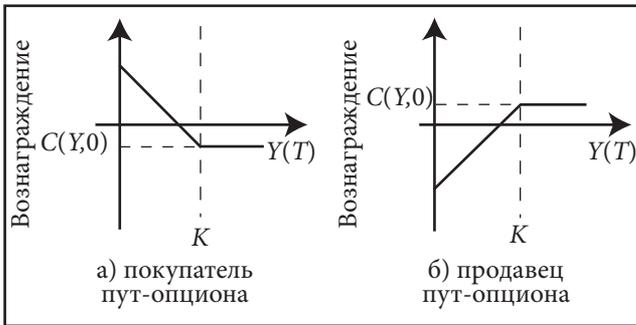


Рис. 14.3. То же самое, что и рис.14.2, для пут-опциона

нения $t = T$, он называется европейским опционом. Если опцион может быть исполнен в любое время между началом контракта в $t = 0$ и $t = T$, он называется американским опционом. В этой главе мы рассматриваем европейские опционы.

Существуют опционы до востребования (колл-опционы) и опционы на продажу (пут-опционы). Колл-опцион дает покупателю опциона право купить оговоренный финансовый актив по фиксированной цене K в указанный день. За это право покупатель уплачивает продавцу опциона сумму $C(Y, t)$. В данном случае не существует симметрии между двумя участниками контракта. Покупатель опциона платит деньги в момент заключения договора и получает тем самым право купить актив в будущем, а продавец опциона получает средства немедленно, но ставится перед потенциальным

убытком в будущем (рис. 14.2). В пут-опционе покупатель опциона имеет право продать оговоренный финансовый актив по указанной цене K на дату $t = T$ обратно продавцу опциона (рис. 14.3).

14.4. Спекуляция и хеджирование

Производные являются финансовыми инструментами по меньшей мере для двух типов трейдеров — занимающихся спекуляцией и хеджированием. Спекулянты заинтересованы в производных, потому что они могут обеспечить недорогой способ формирования портфеля с высоким уровнем риска и высокой ожидаемой прибылью. Хеджеры заинтересованы в производных потому, что они позволяют инвесторам уменьшить рыночный риск, которому они уже подвержены.

14.4.1. Спекуляция: пример

Инвестор верит, что данная акция (с текущей ценой 200 \$ USA) будет расти в цене в период времени T . Он покупает колл-опцион с ценой исполнения 220 долларов, заплатив за это 5 долларов. Предположим, что за время $t = T$ (срока исполнения) цена акции возросла до 230 долларов. Инвестор может тогда использовать свой опцион, купив акцию за 220 долларов и немедленно продав ее за 230 долларов. Тогда доход будет $10 - 5 = 5$ долларов — 100% от вложенной суммы. Заметим, что в этом примере стоимость акции возросла на

$$\frac{(230 - 200)}{200} = 15\%.$$

С другой стороны, предположим, что на дату исполнения опциона цена акции стала равной или меньше 220 долларов — инвестор потеряет вложенные 5 долларов (100% потерь). Таким образом, инвестор играя на 5 долларов, приобретает возможность получения высокой прибыли, подвергая себя при этом большому риску.

14.4.2. Хеджирование: форма страхования

Некоторая компания в США должна заплатить 10 000 евро европейским фирмам через 180 дней. Эта компания может подписать форвардный контракт по текущему обменному курсу на выше-

означенную сумму или может купить колл-опцион, дающий право на покупку евро через 180 дней по курсу, существующему на день покупки опциона. Это исключает риск, связанный с флуктуациями обменного курса доллар/евро, но за это надо платить и необходимо делать выбор — или подвергнуться риску потерь в форвардном контракте, или просто прямой издержке в опционном контракте.

14.4.3. Хеджирование: концепция безрискового портфеля

Для более подробного изучения процедуры хеджирования рассмотрим упрощенную версию нашей проблемы, а именно биномиальную модель цен акций [37]. Цена акции Y на каждом временном шаге t может принимать только два значения (рис. 14.4). Предположим, хеджер на каждом временном шаге держит количество Δ_h акций для каждого опциона, проданного на той же акции. Для минимизации риска хеджер нуждается в определении величины Δ_h , что делает портфель безрисковым.

Величина ϕ портфеля

$$\phi = Y\Delta_h - C, \quad (14.1)$$

где $Y\Delta_h$ — стоимость акций Δ_h , которые держит инвестор в момент времени t , и C — стоимость опциона, проданного в момент времени t .

Безрисковая инвестиция требует

$$\phi_u = \phi_d, \quad (14.2)$$

где ϕ_u — стоимость портфеля, если акции идут вверх, а ϕ_d — стоимость портфеля, если акции идут вниз. Следовательно, из (14.1)

$$Y_u\Delta_h - C_u = Y_d\Delta_h - C_d$$

или

$$\Delta_h = \frac{C_u - C_d}{Y_u - Y_d}. \quad (14.3)$$

В пределе, когда t становится бесконечно малой величиной,

$$\Delta_h = \frac{\partial C}{\partial Y}. \quad (14.4)$$

Таким образом, Δ_h равно частной производной стоимости опциона от цены акции (при постоянном t). Ввиду изменения Y во

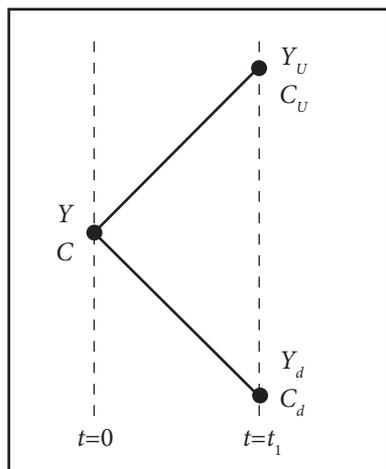


Рис. 14.4. Схематическая иллюстрация биномиальной модели. Здесь Y — рыночная цена акции, а C — стоимость опциона, выпущенного на обозначенную акцию. Для данного временного горизонта $t = t_1$ величины Y_u и Y_d обозначают возможные значения рыночной цены, а C_u и C_d — возможную стоимость опционов

времени $\Delta_h = \frac{\partial C}{\partial Y}$ также должно изменяться во времени для максимизации эффективности хеджирования и минимизации риска в отношении портфеля.

Мы видим, что по меньшей мере три различные торговые стратегии используются на финансовых рынках: хеджирование, спекуляция или возможности арбитражных операций. Некоторые трейдеры специализируются по одному из этих трех вариантов, а другие по случаю переключаются с одной стратегии на другую. Хеджеры фокусируются на уменьшении риска портфеля, а спекулянты максимизируют риск портфеля.

14.5. Оценивание опционов на идеализированных рынках

Для нормального функционирования финансового рынка участники должны хорошо понимать методы оценивание опционов. Задача состоит в том, чтобы найти рациональную и справедливую цену $C(Y, t)$ рассматриваемого опциона. Так как $Y(t)$ являет-

ся случайной величиной, $C(Y, t)$ является функцией случайной переменной.

Первое надежное решение проблемы оценивания опциона было предложено Блэком и Шоулсом [18, 120]. Это решение справедливо при целом ряде предположений:

1. Цена акции следует стохастическому процессу Ито.
2. Торговля ценными бумагами идет непрерывно.
3. Не существует арбитражных возможностей.
4. Продажа ценных бумаг возможна в любое время.
5. Не существует комиссии транзакций.
6. Рыночная процентная ставка постоянна.
7. Между моментами $t=0$ и $t=T$ дивиденды не выплачиваются.

Блэк и Шоулс предположили, что цена акции $Y(t)$ может быть описана как Ито-процесс, а именно процесс, определенный посредством стохастического дифференциального уравнения:

$$dY = a(Y, t)dt + b(Y, t)dW.$$

В частности, они предположили, что цена акции следует геометрическому броуновскому движению:

$$dY = \mu Y dt + \sigma Y dW, \quad (14.5)$$

где μ — ожидаемая прибыль в единицу времени, σ^2 — дисперсия в единицу времени и W — винеровский процесс

Согласно этому предположению изменение логарифма цены подчиняется гауссовскому распределению.

Если предположить, что цена акции смоделирована геометрическим броуновским движением, то некоторая функция Y (включающая цену опциона C) может быть решением дифференциального уравнения в частных производных, полученного из специального случая леммы Ито, справедливого для геометрического броуновского движения [75]:

$$dC = \left[\frac{\partial C}{\partial Y} \mu Y + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial Y^2} \sigma^2 Y^2 \right] dt + \frac{\partial C}{\partial Y} \sigma Y dW. \quad (14.6)$$

Рассмотрим портфель держателя, Δ_t ценных бумаг, который продает одну производную ценную бумагу в момент t . Стоимость портфеля следует из (14.1) и (14.4):

$$\phi = -C + \frac{\partial C}{\partial Y} dY. \quad (14.7)$$

Изменение величины портфеля ϕ в интервале Δt есть

$$\Delta\phi = -C + \frac{\partial C}{\partial Y} dY. \quad (14.8)$$

Используя лемму Ито, будем иметь

$$\Delta C = \left[\frac{\partial C}{\partial Y} \mu Y + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial Y^2} \sigma^2 Y^2 \right] dt + \frac{\partial C}{\partial Y} \sigma Y \Delta W. \quad (14.9)$$

Из определения геометрического броуновского движения (14.5) имеем

$$\Delta Y = \mu Y \Delta t + \sigma Y dW. \quad (14.10)$$

Следовательно, изменение величины ϕ есть

$$\Delta\phi = \left[-\frac{\partial C}{\partial Y} \mu Y - \frac{\partial C}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial Y^2} \sigma^2 Y^2 + \frac{\partial C}{\partial Y} \mu Y \right] \Delta t - \frac{\partial C}{\partial Y} \Delta W + \frac{\partial C}{\partial Y} \sigma Y \Delta W, \quad (14.11)$$

которое упрощается до

$$\Delta\phi = \left[-\frac{\partial C}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial Y^2} \sigma^2 Y^2 \right] dt. \quad (14.12)$$

Предположение Блэка—Шоулса о том, что цена акции следует геометрическому броуновскому движению, является решающим при определении рациональной цены опциона. Фактически, без этого предположения, $\Delta\phi$ не может быть упрощено, как это сделано в уравнении (14.12).

Второе ключевое предположение касается отсутствия возможностей арбитража. В отсутствие возможностей арбитража изменение стоимости портфеля $\Delta\phi$ должно равняться прибыли, полученной инвестированием той же величины денег в безрисковые ценные бумаги, которые обеспечивают прибыль r в единицу времени. В предположении о том, что r — константа, имеем:

$$\Delta\phi = r\phi\Delta t. \quad (14.13)$$

Посредством приравнивания этих двух уравнений для изменения стоимости портфеля, (14.12) и (14.13), получаем соотношение:

$$rC = \frac{\partial C}{\partial t} + rY \frac{\partial C}{\partial Y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial Y^2} \sigma^2 Y^2, \quad (14.14)$$

которое называют уравнением Блэка—Шоулса в частных производных. Чтобы получить (14.14), не требуется предположения относительно специфического свойства опциона. Это дифференциальное уравнение в частных производных справедливо для обоих «пут» и «колл» европейских опционов.

Подходящее $C(Y, t)$ для избранного типа опциона будет получено посредством выбора подходящих граничных условий. В качестве примера для колл-опциона может быть

$$C = \max\{Y - K, 0\}, \text{ когда } t = T. \quad (14.15)$$

Параметрами в уравнении (14.14) являются дисперсия в единицу времени σ^2 и прибыль в единицу времени r безрисковой ценной бумаги. Решение (14.14) зависит от этих двух параметров и от величин Y , K и T , характеризующих граничные условия. Уравнение в частных производных Блэка—Шоулса имеет аналитическое решение, которое обсуждается в следующем разделе.

14.6. Формула Блэка—Шоулса

Блэк и Шоулс решают дифференциальное уравнение в частных производных (14.14), используя следующую подстановку:

$$C(Y, t) = e^{y(t-T)} Y(x, t'), \quad (14.16)$$

где

$$x = \frac{2}{\sigma^2} \left\{ r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right\} \left[\ln(Y/K) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t - T) \right] \quad (14.17)$$

и

$$t' \equiv -\frac{2}{\sigma^2} \left\{ r - \frac{\sigma^2}{2} \right\} (t - T). \quad (14.18)$$

При такой подстановке дифференциальное уравнение в частных производных Блэка—Шоулса становится формально эквивалентным уравнению теплопроводности в физике:

$$\frac{\partial y(x, t')}{\partial t'} = \frac{\partial^2 y(x, t')}{\partial x^2}. \quad (14.19)$$

Уравнение теплопроводности аналитически разрешимо и посредством подстановок (14.17) и (14.18) Блэк и Шоулс нашли своё знаменитое уравнение для проблемы оценки опционов

$$C(Y, t) = YN(d_1) - ke^{y(t-T)}N(d_2), \quad (14.20)$$

где $N(x)$ — накопленная функция плотности для гауссовской переменной с нулевым средним и единичным стандартным отклонением:

$$d_1 \equiv \frac{\ln\left(\frac{Y}{k}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (14.21)$$

и

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}. \quad (14.22)$$

14.7. Сложная структура финансовых рынков

Модель Блэка—Шоулса даёт два важных финансовых инструмента:

- а) аналитическое решение (14.20) для рациональной цены европейского опциона;
- б) торговую стратегию построения безрискового портфеля.

Существование безрискового портфеля означает также, что особый портфель облигаций и акций может быть эквивалентен опциону этой акции в некотором отрезке времени, если портфель надлежащим образом сбалансирован в терминах уравнений (14.1) и (14.4).

Другими словами, стоимость опциона может быть воспроизведена посредством формирования портфеля акций и облигаций, и такой синтетический аналог опциона может быть реализован на финансовом рынке, исходя из предположений Блэка—Шоулса.

Среди предположений (1) и (7) модели Блэка—Шоулса два являются критическими для существования безрискового портфеля. Первое состоит в том, что динамика цены акции есть геометрическое броуновское движение. Второе — то что, торги ценными бумагами непрерывны во времени.

В предыдущих главах мы видели, что в реальности динамика цены акции дискретна как во времени, так и в пространстве. Более того, эмпирические наблюдения статистических свойств

ценовых изменений для высокочастотных режимов не отвечают предположению о геометрическом броуновском движении. Действительно, редкие события (а именно большие прыжки цен акций) время от времени наблюдаются.

Следовательно, модель Блэка—Шоулса является прекрасной основой для понимания и моделирования идеального финансового рынка, но обеспечивает только приближенное описание реальных финансовых рынков. В частности, предположения Блэка и Шоулса не проверены на реальных рынках и не гарантируют существование безрискового портфеля и синтетических опционов на реальных рынках.

14.8. Другие подходы к оцениванию опционов

Другие аспекты проблемы оценивания опционов возникают при рассмотрении альтернативного пути получения рациональной цены опциона.

В рынке Блэка и Шоулса рациональная цена опциона не зависит от толерантности участников рынка к риску. Это означает, что предположение о нейтральности их отношения к риску легитимно на эффективном финансовом рынке. В риск-нейтральной экономике ожидаемая доходность μ какого-либо финансового актива должна быть равна безрисковой процентной ставке r .

Следовательно, в отсутствие арбитражных возможностей ожидаемая стоимость европейского колл-опциона на момент истечения ($t = T$) есть средняя ожидаемая прибыль, а именно:

$$E\{(Y(T) - K)^+\},$$

где $(Y(T) - K)^+$ есть $Y(T) - K$ в случае $Y(T) - K > 0$, и нуль, когда $Y(T) - K \leq 0$. Для достижения риск-нейтральной величины, справедливой во время $T - t$, эта величина должна быть дисконтирована на безрисковую процентную ставку, так что

$$C(Y, t) = e^{-r(T-t)} E\{(Y(T) - K)^+\}. \quad (14.23)$$

Уравнение (14.23) даёт инструмент для определения $C(Y, t)$ без решения дифференциального уравнения в частных производных, соответствующего проблеме оценки опционов. Уравнение (14.23) может быть записано в явной форме:

$$C(Y, t) = e^{-r(T-t)} \int_k^\infty dY (Y - K) f(Y_0; 0 | Y; T), \quad (14.24)$$

где $f(Y_0; 0|Y'; T)$ есть условная плотность вероятностей наблюдения $Y=Y'$ во время $t=T$, когда $Y=Y_0$ во время $t=0$.

Уравнение (14.24) показывает, насколько критично точное значение распределения ценовых изменений. Действительно, $C(Y, t)$ полностью зависит от этого распределения на эффективном финансовом рынке.

Уравнение (14.24) даёт также гибкий инструмент для аналитического или численного определения $C(Y, t)$, когда распределение ценовых изменений известно. Однако стоит отметить, что уравнение (14.24) справедливо только тогда, когда стохастический процесс $Y(t)$ позволяет формирование безрискового портфеля при риск-нейтральных предположениях. Если не существует безрискового портфеля при риск-нейтральном предположении, то не существует также гарантий, что уникальная цена опциона существует, удовлетворяя условию отсутствия арбитражных возможностей.

14.9. Обсуждение

Решение Блэка—Шоулса проблемы оценивания опционов — это краеугольный камень современной теории финансов. Их модель финансовой активности схватывает основные черты реальных финансовых рынков. Некоторые её аспекты, однако, не полностью отражают стохастическое поведение, наблюдаемое на реальных рынках.

Отметим три примера:

- (1) гауссовская гипотеза изменений логарифмов цен акций некорректна — особенно когда изменения высокочастотны;
- (2) предположение о непрерывности цены актива может нарушаться, цена может претерпевать разрыв при появлении новой и существенной экономической информации;
- (3) волатильность цены некоторой акции или индекса или ставки процента непостоянна, они сами являются случайными процессами.

Моделирование реальных финансовых рынков, иногда называемых «неэффективными рынками», включает в себя класс проблем, которые мы рассматриваем в следующей главе.

Глава 15

Опционы на реальных рынках

В гл. 4 мы рассмотрели проблему оценивания опционов на идеализированном рынке. Реальные рынки часто эффективны, но они никогда не идеальны. В этой главе мы обсуждаем как возрастает сложность моделирования финансовых рынков, когда мы принимаем в расчёт аспекты реальных рынков, которые не формализованы в идеальной модели. Эти аспекты известны в литературе как рыночная микроструктура [26] или рыночные неэффективности [127].

В терминологии, используемой в экономической литературе, проводится ясная параллель с подобными сценариями, наблюдаемыми в физической науке. Например, намного легче создать обобщённое описание движения механической системы в идеализированном мире без трения, чем в реальном мире. Подобная ситуация встречается, когда мы сравниваем равновесную и неравновесную термодинамику. В этой главе мы покажем, что знание статистических свойств динамики цен актива критично для моделирования реальных финансовых рынков. Мы также затронем некоторые теоретические и практические проблемы, которые возникают, когда мы принимаем в расчёт рыночные неэффективности.

15.1. Прерывистые прибыли акций

Существование портфеля, содержащего как рискованные так и безрисковые активы, воспроизводящего точно стоимость опциона, является важным звеном в определении рациональной цены опциона в предположении отсутствия на рынке арбитражных возможностей. Воспроизводит или нет портфель стоимость опциона, зависит от статистических свойств динамики цен актива, лежащего в основе опциона. В предыдущей главе мы видели, что портфель, воспроизводящий цену опциона, существует, когда цена актива

следует геометрическому броуновскому движению, но мы также видели, что этот случай не может быть обобщён. Например когда динамика актива следует скачкообразно диффузионной модели [121], простой вышеуказанный портфель не существует. Скачкообразно-диффузионная модель есть стохастический процесс, сочетающий диффузионный член (как в геометрическом броуновском движении) и второй член, описывающий скачки случайных амплитуд, происходящие в случайные моменты времени.

Грубо говоря, существование двух независимых источников случайности в ценовой динамике актива не позволяет создать простой воспроизводящий цену опциона портфель (более строгое обсуждение этой точки зрения содержится в [44, 70]). Невозможно получить рациональную цену опциона только в предположении отсутствия арбитражных возможностей. Другие предположения должны быть приняты относительно терпимости трейдеров к риску и прогнозных значений цены актива на момент истечения срока опциона.

Исходя из другой перспективы, мы можем сказать, что нам необходимо знать статистические свойства динамики актива перед тем, как мы сможем определить рациональную цену опциона, проистекающую из этого актива. Прерывистость пути цены актива — это лишь одно из «неэффективностей», которое может побудить нас к поискам менее обобщённых процедур оценивания опционов.

15.2. Волатильность на реальных рынках

Другая «неэффективность» реальных рынков состоит в случайном характере волатильности цены актива. Формула Блэка—Шоулса оценивания опциона для европейских опционов, торгуемых на идеализированном рынке, зависит только от пяти параметров:

- (I) цены акции Y в момент t ,
- (II) цены исполнения опциона K ,
- (III) безрисковой процентной ставки r ,
- (IV) степени волатильности актива σ ,
- (V) срока истечения опциона T .

В числе этих параметров K и T устанавливаются контрактом, а Y и r известны из рынка. Таким образом есть только один параметр, который необходимо определить, — это степень волатильности σ .

Заметим, что степень волатильности, необходимая в формуле оценивания опциона Блэка—Шоулса, есть волатильность лежащей в основе опциона ценной бумаги, которая будет наблюдаться в будущем временном интервале от $t=0$ до $t=T$. Подобное утверждение может быть сделано относительно безрисковой процентной ставки r , которая может совершить скачок в будущем времени.

Мы знаем из предыдущего анализа, что волатильность ценных бумаг есть случайный процесс. Оценка волатильности — непростая процедура.

15.2.1. Историческая волатильность

Первый подход состоит в определении волатильности исторических рыночных данных. Эмпирические тесты показывают, что подобные оценки зависят от временного интервала, используемого для определения волатильности. Можно предположить, что чем длиннее временной интервал, тем лучше должны быть оценки. Однако локальная нестационарность волатильности во времени означает, что безусловная волатильность, оценённая посредством использования очень длинных временных периодов, может быть совершенно отличной от волатильности, наблюдаемой в продолжение жизни опциона.

Эмпирическое правило утверждает, что наилучшая оценка степени волатильности получается при рассмотрении исторических данных во временном интервале $t_1 - t_2$, равном времени истечения опциона (рис. 15.1).

15.2.2. Подразумеваемая волатильность

Второй альтернативный подход к определению волатильности состоит в оценке ожидаемой волатильности σ_{imp} , которая оценивается с использованием цены опциона на рынке и формулы оценивания Блэка—Шоулса (14.20). Ожидаемая волатильность ориентирует трейдеров относительно уровня волатильности опциона. Величина σ_{imp} получается посредством использования рыночных величин $C(Y, t)$ и численного решения уравнения

$$C(Y, T-t) = YN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2), \quad (15.1)$$

где время теперь выражается в днях до срока платежа, и

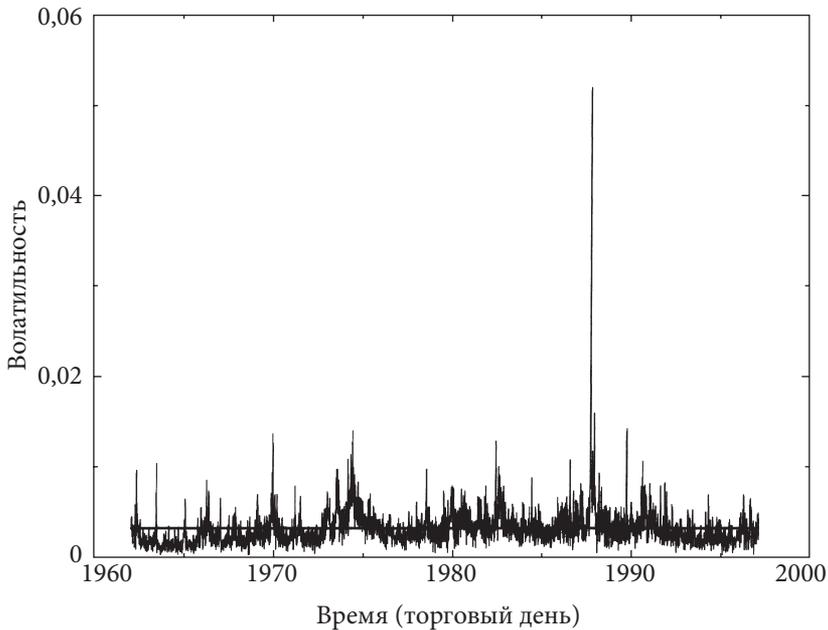


Рис. 15.1. Схематическая иллюстрация к проблеме, связанной с определением исторической волатильности. Нестационарное поведение волатильности делает определение средней волатильности зависящим от исследуемого периода времени. При рассмотрении длинных периодов видно, что дневная волатильность совершенно отлична от средней асимптотической величины (сплошная линия)

$$d_1 \equiv \frac{\ln\left(\frac{Y}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma_{imp}^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma_{imp}\sqrt{T-t}} \quad (15.2)$$

и

$$d \equiv d_1 - \sigma_{imp}\sqrt{T-t}. \quad (15.3)$$

На рынке Блэка и Шоулса определение ожидаемой степени волатильности должно дать постоянную величину σ для опционов с разными ценами исполнения и разными сроками истечения. Более того, это значение должно совпадать с волатильностью, определенной из исторических данных.

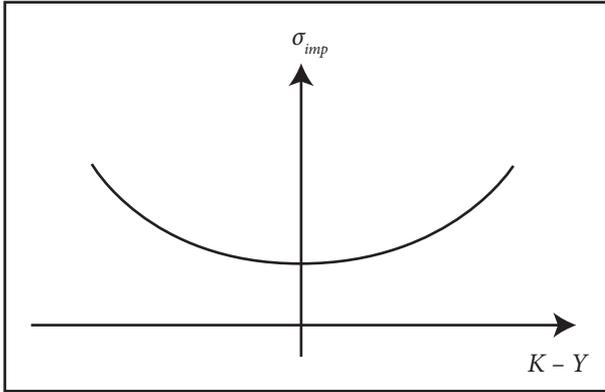


Рис.15.2. Схематическая иллюстрация ожидаемой волатильности как функции разности между ценой исполнения K и ценой акции Y . Её специфическая форма отражается в названии «улыбка волатильности»

На реальных рынках эти две оценки в общем случае не совпадают. Ожидаемая волатильность обеспечивает лучшую оценку σ .

Эмпирический анализ показывает, что σ_{imp} есть функция цены исполнения опциона и даты его истечения. В частности, σ_{imp} минимальна, когда цена исполнения K равна начальной цене акции Y («опциона по текущей цене») и увеличивается для более низкой или более высокой цены исполнения K . Это явление часто называют «улыбкой волатильности» (рис.15.2). Ожидаемая волатильность увеличивается, когда срок оплаты увеличивается. Эти эмпирические данные подтверждают, что модель Блэка—Шоулса базируется на предположениях, которые лишь частично проверяемы на реальных финансовых рынках.

Когда имеет место случайная волатильность, в общем случае нет возможности определить цену опциона посредством простого предположения об отсутствии арбитражных возможностей. В некоторых моделях, например, рыночная цена волатильностного риска должна быть оценена перед тем как получить дифференциальное уравнение в частных производных.

15.3. Хеджирование на реальных рынках

На идеализированных финансовых рынках стратегия рационального хеджирования портфеля, состоящего как из безрисковых, так и рискованных активов, известна.

На реальных рынках некоторые факты могут сделать эту стратегию нереалистичной: (I) переформирование хеджированного портфеля не производится непрерывно; (II) существуют транзакционные комиссии на реальных рынках; (III) финансовые активы часто торгуются в лотах, кратных 100, и предполагают неделимость лотов.

Было показано, что представление этих неискл­ю­чи­мых рыночных неэф­фек­тив­но­стей подразумевает, что совершенное хеджирование портфеля не может быть гарантированно на реальном рынке, даже если предполагается, что динамика актива хорошо описывается геометрическим броуновским движением [58]. Когда мы рассматриваем реальные рынки, сложность моделирования возрастает, количество предположений возрастает и общность решений снижается.

15.4. Расширение модели Блэка—Шоулса

Существует общий подход в науке — использование модели системы для понимания основного аспекта научной проблемы. Идеализированная модель не способна описать все события, наблюдаемые в реальных системах, но она способна описать наиболее существенные из них. Поскольку применимость идеализированной модели ограничена, предпринимаются попытки для расширения и обобщения этой модели с целью улучшить описание рассматриваемой реальной системы. Некоторые расширения не изменяют существа выводов, получаемых с использованием модели, другие же могут изменять.

Модель Блэка—Шоулса — это одна из наиболее успешных идеализированных моделей, используемых в настоящее время. С момента её введения в 1973 г. появилось огромное количество литературы, имеющей дело с расширениями модели Блэка—Шоулса. Эти расширения имеют цель ослабить предположения, которые не являются реалистичными для действующих финансовых рынков. Примеры включают:

- оценивание опционов со стохастической процентной ставкой [4, 20],
- оценивание опционов с прерывисто-диффузионным или чисто прерывистым стохастическим процессом цены акции [13, 121],
- оценивание опциона со стохастической волатильностью [71, 72] и
- оценивание опционов с негауссовским распределением логарифмов цен [7, 21] и с усечённым распределением Леви [118].

Мы коротко прокомментируем общие уравнения, описывающие временную эволюцию цены акции и волатильность [12], которые намного более общи, чем предположение Блэка и Шоулса о геометрическом броуновском движении. Наша цель состоит в том, чтобы показать, как сложность уравнений увеличивается, когда одно или несколько предположений Блэка и Шоулса ослаблены. Вот эти общие уравнения:

$$\frac{dY(t)}{Y(t)} = [r(t) - \lambda\mu_j]dt + \sigma(t)dW_Y(t) + S(t)dq(t) \quad (15.4)$$

и

$$d\sigma^2(t) = [\theta_v - K_v\sigma^2(t)]dt + \sigma_v\sigma(t)dW_v(t), \quad (15.5)$$

а предположение Блэка и Шоулса о геометрическом броуновском движении (из (14.5)) имеет вид

$$\frac{dY(t)}{Y(t)} = \mu dt + \sigma dW(t); \quad \sigma = \text{const.} \quad (15.6)$$

Здесь $r(t)$ — мгновенная процентная ставка, λ — частота скачков в расчёте на год, $\sigma^2(t)$ — диффузионная компонента дисперсии прибыли, $W_Y(t)$ и $W_v(t)$ — стандартные винеровские процессы с ковариацией, $\text{cov}[dW_Y(t), dW_v(t)] = \rho dt$, $J(t)$ — процентный размер скачка с безусловным средним значением μ_j , $q(t)$ — пуассоновский процесс с интенсивностью λ , и K_v , θ_v , σ_v — параметры диффузионной компоненты дисперсии прибыли $\sigma^2(t)$.

Стоит отметить, что увеличение в сложности носит не только технический, но концептуальный характер. Это происходит потому, что процесс столь общий, что невозможно более построить простой воспроизводящий цену опциона портфель или рационально хеджированный «оптимальный» портфель. Элегантность решения Блэка—Шоулса теряется на реальных рынках.

15.5. Выводы

Полное знание о динамике статистических свойств прибыли актива — вот главное для функциональных и прикладных целей. Такое знание является решающим для построения и тестирования

статистических моделей финансового рынка. Несмотря на более чем 50 лет усилий, цель до сих пор не достигнута.

Практическая релевантность разрешения проблемы статистических свойств динамики прибылей актива относится к оптимальному решению задачи рационального оценивания опциона. Это и есть финансовая активность, которая исключительно важна для текущего состояния финансового рынка. Мы видели, что динамические свойства прибыли актива — такие как прерывность или непрерывность природы изменений, случайный характер волатильности и знание функции плотности вероятностей прибыли актива — всё это необходимо знать для адекватной постановки и возможного решения проблемы оценивания опциона.

Статистическая и теоретическая физика может внести вклад в решение этой научной проблемы — совместно с результатами исследований других смежных дисциплин — теории критических явлений, теории неупорядоченных систем, скейлинга и универсальности, которые развились за последние 30 лет.

Приложение А

Принятые обозначения

Глава 1

x	индивидуальный доход
y	количество людей, имеющих доход x или больше чем x
ν	показатель закона Парето
x_i	случайная переменная
S_n	сумма n случайных переменных
$P(x)$	функция плотности вероятности случайной переменной x
α	индекс устойчивого распределения Леви
d	размерность хаотического аттрактора
\sim	символ для обозначения асимптотического равенства

Глава 2

t	время
Y_t	цена финансового актива в момент времени t
$E\{x\}$	ожидаемая величина переменной x
$E\{x y_1, y_2, y_3, \dots\}$	ожидаемая величина x , условно зависящая от сочетания величин y_1, y_2, y_3, \dots
$K^{(n)}$	битовая длина кратчайшей компьютерной программы, способной напечатать последовательность символов длиной n

Глава 3

x_i	случайная величина
n	номер случайной величины
S_n	сумма n случайных величин
$E\{f(x)\}$	средняя $f(x)$
δ_{ij}	символ Кронекера
Δt	временной шаг

$x(n\Delta t)$	сумма n случайных величин, каждая из которых реализуется после временного шага Δt
s^2	второй момент дихотомической случайной величины x_i
D	константа диффузии
\otimes	символ свертки
σ_n	стандартное отклонение S_n
U_i	усеченная случайная величина
ε	малое число
\tilde{x}	масштабированная величина
$P(x)$	функция плотности вероятности
$\tilde{P}(\tilde{x})$	масштабированная функция плотности вероятности
π	число «пи»
$F_n(S)$	масштабированная функция распределения S_n
$\Phi(S)$	функция распределения гауссовского процесса
$Q_j(S)$	полином по S в исследованиях сходимости
r_i	третий момент абсолютной величины x_i

Глава 4

$P(x)$	функция плотности вероятности
$\varphi(q)$	характеристическая функция
$F[f(x)]$	оператор, обозначающий Фурье-преобразование свертки двух функций
$F(q)$	Фурье-преобразование $f(x)$
$\varphi_n(q)$	характеристическая функция случайного числа S_n
$P_L(x)$	симметричное устойчивое распределение Леви
γ	масштабный фактор распределения Леви
μ	средняя величина случайного числа
β	параметр асимметрии распределения Леви
$\Gamma(x)$	гамма-функция
\tilde{S}_n	масштабированное случайное число
$\tilde{P}(\tilde{S}_n)$	масштабированная функция плотности вероятности
$\varphi_k(q)$	характеристическая функция элементарного случайного числа бесконечно делимого случайного процесса
ℓ	длина
k	целое число
$Z(t)$	изменение цены в момент времени t

Глава 5

$Y(t)$	цена финансового актива в момент времени t
--------	--

$Z(t)$	изменение цены в момент времени t
$Z_D(t)$	дефлированное или дисконтированное изменение цены
$D(t)$	дефлирование или дисконтирование временного ряда
$R(t)$	прибыль (возврат) в момент времени t
$S(t)$	последовательные разности натурального логарифма цены

Главы 6 и 7

$E\{f(x)\}$	ожидаемая величина $f(x)$
$f(x, t)$	плотность вероятности наблюдаемого x в момент времени t
$f(x_1, x_2; t_1, t_2)$	совместная плотность вероятности того, что x_1 наблюдается в момент t_1 и $1/f^\eta$ наблюдается в момент $t_2 = 1 - \gamma \approx 0.7$
$f(x_1; t_1 x_2; t_2)$	условная плотность вероятности наблюдения x_2 в момент времени t_2 после наблюдения x_1 в момент времени t_1
μ	средняя величина случайного процесса
$R(t_1, t_2)$	автокорреляционная функция
$\tau \equiv t_2 - t_1$	временной лаг
$C(t_1, t_2)$	автоковариация
τ_c	характеристическое время
τ_0	временная шкала (масштаб)
ν	показатель степени
η	показатель степени
τ^*	типическое время
σ^2	дисперсия
f	частота
$S(f)$	спектр мощности
$\sigma(t)$	стандартное отклонение на различных временных горизонтах

Главы 8 и 9

$Y(t)$	цена финансового актива в момент времени t
$S(t)$	разность логарифмов цены
x	случайное число
y_i	случайное число
Z	случайное число
$P(Z)$	функция плотности вероятности
n, k, m	целые числа
C_n	константа

$\Gamma(x)$	гамма-функция
$\Omega(t)$	направленный процесс
$P_L(x)$	распределение Леви
ℓ	длина пересечения
$P_G(x)$	гауссовское распределение
α	индекс распределения Леви
γ	масштабный фактор распределения Леви
c	константа
n_x	количество независимых идентично распределенных случайных чисел, необходимых для наблюдения перехода между Леви и гауссовским режимами
\tilde{S}	масштабированное случайное число
$\tilde{P}(\tilde{S})$	масштабированное распределение плотности вероятности
$\varphi(q)$	характеристическая функция
$Z(t)$	индексные изменения
σ	стандартное отклонение
g_i	нормализованная разность логарифма цены компании i
$F(g)$	кумулятивное распределение
σ_i	волатильность (стандартное отклонение) компании i

Глава 10

x_t	дискретная случайная величина
$f_t(x)$	условное (в зависимости от t) распределение плотности вероятности
σ_t^2	дисперсия случайной величины x_t на временном интервале t
p	целое число
$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_q$	параметры
κ	эксцесс стохастического процесса
$P(x)$	асимптотическая функция плотности вероятности
$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$	параметры
η_t	случайная величина
$R(\tau)$	автокорреляционная функция
τ	характеристический временной масштаб
$M(t, k)$	полиномы случайной величины η_t
n	целое число
$\text{cov}(x, y)$	ковариация случайных чисел x и y
$\langle x \rangle$	среднее случайного числа x
$S_t^{(m)}$	«временное агрегирование» GARCH (1,1)-процесса

$\alpha_0^{(m)}, \alpha_1^{(m)}$	параметры m агрегации GARCH (1,1)-процесса
$\beta^{(m)}$	параметр m агрегации GARCH (1,1)-процесса
Δt	временной горизонт

Глава 11

L	характеристическая длина
∇	набла-оператор, гамильтониан
V	характеристическая скорость потока
ν	кинетическая вязкость
P	давление
r	позиция вектора скорости
$\Delta V(\ell)$	приращение скорости
η	показатель степени спектра мощности
$P_G(0)$	гауссовская вероятность возврата к началу
$P_{\Delta t}(V=0)$	вероятность возврата к началу на временном горизонте Δt
ε	средняя скоростью рассеяния энергии на единицу массы
ℓ	масштаб длины
$[x]$	физическая размерность наблюдаемого x
a, b	показатели степени

Главы 12 и 13

S_i	изменение логарифма цены акции i за один день
ρ_{ij}	коэффициент корреляции между акциями i и j
σ	стандартное отклонение ρ_{ij}
$\langle \rho_{ij} \rangle$	среднее значение ρ_{ij}
δ_{ij}	отклонение ρ_i от среднего значения
\tilde{d}_{ij}	евклидово расстояние между акциями i и j
d_{ij}	многомерное расстояние между акциями i и j
R_n	однопериодная прибыль актива n
R_{n0}	безрисковые и рисковые премиальные средние прибыли.
B	матрица весов размерностью $n \times k$
ξ_k	временной ряд k факторов
ε_n	риск актива

Глава 14

Y	цена финансового актива
K	цена «страйк» (цена исполнения опциона)
T	дата поставки
$C(Y, t)$	цена опциона во время заключения контракта
Δ_h	количество акций для каждого опциона в безрисковом портфеле
ϕ	величина портфеля
μ	ожидаемая прибыль в единицу времени
σ^2	дисперсия в единицу времени
W	винеровский процесс
r	рыночная ставка процента
$C(Y, t)$	формула Блэка—Шоулса
d_1, d_2	переменные Блэка—Шоулса

Глава 15

σ_{imp}	подразумеваемая волатильность
$r(t)$	мгновенная ставка процента
$\sigma^2(t)$	диффузионная компонента дисперсии прибыли
λ	частота скачков в расчёте на год
$K, \theta, \sigma, \sigma_v$	параметры диффузионной компоненты дисперсии прибыли $\sigma^2(t)$

Приложение В

Мартингалы

Концепция мартингалов была введена в теорию вероятностей около полувека назад. Этот термин ввёл Дж. Уилли, но его корни уходят к П. Леви, к 1934 г. (см. [77]). Первая полная теория мартингалов была сформулирована Дубом [42].

Рассмотрим процесс, обозначенный через S_n . Положим \mathcal{F}_n представляет собой семейство информационных множеств («фильтрацию»). Используя данное множество информации \mathcal{F}_n , можно сгенерировать «предсказание» выхода S_n

$$E\{S_n | \mathcal{F}_{n-1}\}.$$

S_n есть мартингал относительно $(\{\mathcal{F}_{n-1} | \mathcal{P}\})$, если

(I) S_n известно заданием \mathcal{F}_n (S_n «адаптировано»);

(II) $E\{|S_n|\} < \infty, \forall n$ (безусловные предсказания конечны);

(III) $E\{S_n | \mathcal{F}_{n-1}\} = S_{n-1}$ при $n \geq 1$ (т. е. наилучшее предсказание будущих величин есть последнее наблюдение S_{n-1}).

Здесь \mathcal{P} есть вероятностная мера и все ожидания $E\{\cdot\}$ предполагаются взятыми в отношении \mathcal{P} . Мартингал определён относительно заданной фильтрации и вероятностной меры. Сущность мартингала есть стохастический процесс (с нулевым сносом).

Эта концепция является фундаментальной в математике финансов, потому что, например, в мире, в котором процентные ставки нулевые и не существует арбитражных возможностей, существует единственный эквивалент мартингальной меры, при котором цена некоторой бездоходной ценной бумаги равна её ожидаемой будущей цене [70].

Список литературы

- [1] V. Akgiray, 'Conditional Heteroskedasticity in Time Series of Stock Returns: Evidence and Forecasts', *J. Business* 62, 55—80 (1989).
- [2] L. A. N. Amaral, S. V. Buldyrev, S. Havlin, H. Leschhorn, P. Maass, M. A. Salinger, H. E. Stanley, and M. H. R. Stanley, 'Scaling Behavior in Economics: I. Empirical Results for Company Growth', *J. Phys. I France* 7 621—633 (1997).
- [3] L. A. N. Amaral, S. V. Buldyrev, S. Havlin, M. A. Salinger, and H. E. Stanley, 'Power Law Scaling for a System of Interacting Units with Complex Internal Structure', *Phys. Rev. Lett.* 80, 1385—1388 (1998).
- [4] K. Amin and R. Jarrow, 'Pricing Options on Risky Assets in a Stochastic Interest Rate Economy', *Mathematical Finance* 2, 217—237 (1992).
- [5] P. W. Anderson, J. K. Arrow and D. Pines, eds., *The Economy as an Evolving Complex System* (Addison-Wesley, Redwood City, 1988).
- [6] A. Arneodo, J. F. Muzy, and D. Sornette, «Direct» Causal Cascade in the Stock Market', *Eur. Phys. J. B* 2, 277—282 (1998).
- [7] E. Aurell, R. Baviera, O. Hammarlid, M. Serva, and A. Vulpiani, 'A General Methodology to Price and Hedge Derivatives in Incomplete Markets', *Int. J. Theor. Appl. Finance* (in press).
- [8] L. Bachelier, 'Theorie de la speculation' [Ph.D. thesis in mathematics], *Annales Scientifiques de VEcole Normale Superieure* 111—17, 21—86 (1900).
- [9] R. T. Baillie and T. Bollerslev, 'Conditional Forecast Densities from Dynamics Models with GARCH Innovations', *J. Econometrics* 52, 91—113 (1992).
- [10] P. Bak, K. Chen, J. Scheinkman, and M. Woodford, 'Aggregate Fluctuations from Independent Sectoral Shocks: Self-Organized Criticality in a Model of Production and Inventory Dynamics', *Ricerche Economiche* 47, 3—30 (1993).
- [11] P. Bak, M. Paczuski, and M. Shubik, 'Price Variations in a Stock Market with Many Agents', *Physica A* 246, 430—453 (1997).
- [12] G. Bakshi, C. Cao, and Z. Chen, 'Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models', *J. Finance* 52, 2003—2049 (1997).
- [13] D. Bates, 'The Crash of 87: Was it Expected? The Evidence from Options Markets', *J. Finance* 46, 1009—1044 (1991).

- [14] R. Baviera, M. Pasquini, M. Serva, and A. Vulpiani, 'Optimal Strategies for Prudent Investors', *Int. J. Theor. Appl. Finance* 1, 473—486 (1998).
- [15] J. P. Benzecri, *L'analyse des donnees* 1, La Taxinomie (Dunod, Paris, 1984).
- [16] H. Bergstrom, 'On Some Expansions of Stable Посвящается Франческе и Идалии Distributions', *Ark. Mathematicae II* 18, 375—378 (1952).
- [17] A. C. Berry, 'The Accuracy of the Gaussian Approximation to the Sum of Independent Variates', *Trans. Amer. Math. Soc.* 49, 122—136 (1941).
- [18] F. Black and M. Scholes, 'The Pricing of Options and Corporate Liabilities', *J. Polit. Econ.* 81, 637—654 (1973).
- [19] R. C. Blattberg and N. J. Gonedes, 'A Comparison of the Stable and Student Distributions as Statistical Model for Stock Prices', *J. Business* 47, 244—280 (1974).
- [20] T. Bollerslev, 'Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity', *J. Econometrics* 31, 307—327 (1986).
- [21] J.-P. Bouchaud and D. Sornette, 'The Black & Scholes Option Pricing Problem in Mathematical Finance: Generalization and Extensions for a Large Class of Stochastic Processes', *J. Phys. I France* 4, 863—881 (1994).
- [22] J.-P. Bouchaud and M. Potters, *Theories des Risques Financiers* (Eyrolles, Alea-Saclay, 1997).
- [23] J.-P. Bouchaud and R. Cont, 'A Langevin Approach to Stock Market Fluctuations and Crashes', *Eur. Phys. J. B* 6, 543—550 (1998).
- [24] S. J. Brown, 'The Number of Factors in Security Returns', *J. Finance* 44, 1247—1262 (1989).
- [25] G. Caldarelli, M. Marsili, and Y.-C. Zhang, 'A Prototype Model of Stock Exchange', *Europhys. Lett.* 40, 479—483 (1997).
- [26] J. Y. Campbell, A. W. Lo, and A. C. MacKinlay, *The Econometrics of Financial Markets* (Princeton University Press, Princeton, 1997).
- [27] M. Cassandro and G. Jona-Lasinio, 'Critical Point Behaviour and Probability Theory', *Adv. Phys.* 27, 913—941 (1978).
- [28] G. J. Chaitin, 'On the Length of Programs for Computing Finite Binary Sequences', *J. Assoc. Comp. Math.* 13, 547—569 (1966).
- [29] D. Challet and Y. C. Zhang, 'On the Minority Game: Analytical and Numerical Studies', *Physica A* 256, 514—532 (1998).
- [30] P. L. Chebyshev, 'Sur deux theoremes relatifs aux probabihtes', *Acta Math.* 14, 305—315 (1890).
- [31] P. Cizeau, Y. Liu, M. Meyer, C.-K. Peng, and H. E. Stanley, 'Volatility Distribution in the S&P 500 Stock Index', *Physica A* 245, 441—445 (1997).
- [32] P. K. Clark, 'A Subordinated Stochastic Process Model with Finite Variance for Speculative Prices', *Econometrica* 41, 135—256 (1973).

- [33] E. R. Cohen and B. N. Taylor, 'The 1986 Adjustment of the Fundamental Physical Constants', *Rev. Mod. Phys.* 59, 1121—1148 (1987).
- [34] G. Connor and R. A. Korajczyk, 'A Test for the Number of Factors in an Approximate Factor Model', *J. Finance* 48, 1263—1291 (1993).
- [35] R. Cont, M. Potters, and J.-P. Bouchaud, 'Scaling in Stock Market Data: and Beyond', in *Scale Invariance and Beyond*, edited by B. Dubrulle, F. Graner, and D. Sornette (Springer, Berlin, 1997).
- [36] R. Cont, 'Scaling and Correlation in Financial Data', *Cond.-Mat. preprint server* 9705075.
- [37] J. C. Cox, S. A. Ross, and M. Rubinstein, 'Option Pricing: A Simplified Approach', *J. Financial Econ.* 7, 229—263 (1979).
- [38] P. H. Cootner, ed., *The Random Character of Stock Market Prices* (MIT Press, Cambridge MA, 1964).
- [39] A. Crisanti, G. Paladin, and A. Vulpiani, *Products of Random Matrices in Statistical Physics* (Springer-Verlag, Berlin, 1993).
- [40] L. Crovini and T. J. Quinn, eds., *Metrology at the Frontiers of Physics and Technology* (North-Holland, Amsterdam, 1992).
- [41] M. M. Dacorogna, U. A. Miiller, R. J. Nagler, R. B. Olsen and O. V. Pictet, 'A Geographical Model for the Daily and Weekly Seasonal Volatility in the Foreign Exchange Market', *J. Intl Money and Finance* 12, 413—438 (1993).
- [42] J. L. Doob, *Stochastic Processes* (J. Wiley & Sons, New York, 1953).
- [43] F. C. Drost and T. E. Nijman, 'Temporal Aggregation of GARCH Processes', *Econometrica* 61, 909—927 (1993).
- [44] D. Duffie and C. Huang, 'Implementing Arrow-Debreu Equilibria by Continuous Trading of a Few Long-Lived Securities', *Econometrica* 53, 1337—1356 (1985).
- [45] D. Duffie, *Dynamic Asset Pricing Theory, Second edition* (Princeton University Press, Princeton, 1996).
- [46] P. Dutta and P. M. Horn, 'Low-Frequency Fluctuations in Solids: 1/f Noise', *Rev. Mod. Phys.* 53, 497—516 (1981).
- [47] E. Eberlein and U. Keller, 'Hyperbolic Distributions in Finance', *Bernoulli* 1, 281—299 (1995).
- [48] A. Einstein, 'On the Movement of Small Particles Suspended in a Stationary Liquid Demanded by the Molecular-Kinetic Theory of Heat', *Ann. Physik* 17, 549—560 (1905).
- [49] E. J. Elton and M. J. Gruber, *Modern Portfolio Theory and investment Analysis* (J. Wiley and Sons, New York, 1995).
- [50] R. F. Engle, 'Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of U. K. Inflation', *Econometrica* 50, 987—1002 (1982).
- [51] C. G. Esseen, 'Fourier Analysis of Distributions Functions. A Mathematical Study of the Laplace-Gaussian Law', *Acta Math.* 77, 1—125 (1945).

- [52] E. F. Fama, 'The Behavior of Stock Market Prices', *J. Business* 38, 34—105 (1965).
- [53] E. F. Fama, 'Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work', *J. Finance* 25, 383—417 (1970).
- [54] E. F. Fama, 'Efficient Capital Markets: II', *J. Finance* 46, 1575—1617 (1991).
- [55] J. D. Farmer, 'Market Force, Ecology, and Evolution', Adap-Org preprint server 9812005.
- [56] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. I Third edition* (J. Wiley & Sons, New York, 1968).
- [57] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. 2, Second edition* (J. Wiley & Sons, New York, 1971).
- [58] S. Figlewski, 'Options Arbitrage in Imperfect Markets', *J. Finance* 64, 1289—1311 (1989).
- [59] M. E. Fisher, 'The Theory of Critical Point Singularities', in *Proc. Enrico Fermi School on Critical Phenomena*, edited by M. S. Green (Academic Press, London and New York, 1971), pp. 1—99.
- [60] K. R. French, 'Stock Returns and the Weekend Effect', *J. Financial Econ.* 8, 55—69 (1980).
- [61] U. Frisch, *Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
- [62] S. Galluccio and Y. C. Zhang, 'Products of Random Matrices and Investment Strategies', *Phys. Rev. E* 54, R4516-R4519 (1996).
- [63] S. Galluccio, J.-P. Bouchaud, and M. Potters, 'Rational Decisions, Random Matrices and Spin Glasses', *Physica A* 259, 449—456 (1998).
- [64] S. Ghashghaie, W. Breymann, J. Peinke, P. Talkner, and Y. Dodge, 'Turbulent Cascades in Foreign Exchange Markets', *Nature* 381, 767—770 (1996).
- [65] B. V. Gnedenko, 'On the Theory of Domains of Attraction of Stable Laws', *Uchenye Zapiski Moskov. Gos. Univ. Matematika* 45, 61—72 (1940).
- [66] B. V. Gnedenko and A. N. Kolmogorov, *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables* (Addison-Wesley, Cambridge MA, 1954).
- [67] P. Gopikrishnan, M. Meyer, L. A. N. Amaral, and H. E. Stanley, 'Inverse Cubic Law for the Distribution of Stock Price Variations', *Eur. Phys. J. B* 3, 139—140 (1998).
- [68] P. Gopikrishnan, M. Meyer, L. A. N. Amaral, V. Plerou, and H. E. Stanley, 'Scaling and Volatility Correlations in the Stock Market', Cond.-Mat. preprint server 9905305; *Phys. Rev. E* (in press).
- [69] T. Guhr, A. Muller-Groeling, and H. A. Weidenmüller, 'Random-Matrix Theories in Quantum Physics: Common Concepts', *Phys. Reports* 299, 189—425 (1998).
- [70] J. M. Harrison and D. M. Kreps, 'Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets', *J. Econ. Theor.* 20, 381[^]08 (1979).

- [71] S. Heston, 'A Closed-form Solution for Options with Stochastic Volatility with Application to Bond and Currency Options', *Rev. Financial Studies* 6, 327–343 (1993).
- [72] J. Hull and A. White, 'The Pricing of Options with Stochastic Volatilities', *J. Finance* 42, 281–300 (1987).
- [73] J. C. Hull, *Options, Futures, and Other Derivatives, Third edition* (Prentice-Hall, Upper Saddle River NJ, 1997).
- [74] J. E. Ingersoll, Jr, *Theory of Financial Decision Making* (Rowman & Littlefield, Savage MD, 1987).
- [75] K. Ito, 'On Stochastic Differential Equations', *Mem. Amer. Math. Soc.* 4, 1–51 (1951).
- [76] L. P. Kadanoff, 'From Simulation Model to Public Policy: An examination of Forrester's Urban Dynamics', *Simulation* 16, 261–268 (1971).
- [77] I. Karatzas and S. E. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus* (Springer-Verlag, Berlin, 1988).
- [78] J. Kertesz and I. Kondor, eds., *Econophysics: Proc. of the Budapest Workshop* (Kluwer Academic Press, Dordrecht, 1999).
- [79] M. S. Keshner, '1/f Noise', *Proc. IEEE* 70, 212–218 (1982).
- [80] A. Ya. Khintchine and P. Levy, 'Sur les loi stables', *C. R. Acad. Sci. Paris* 202, 374–376 (1936).
- [81] A. Ya. Khintchine, 'Zur Theorie der unbeschränkt teilbaren Verteilungsgesetze', *Rec. Math. [Mat. Sbornik]* N S. 2, 79–120 (1937).
- [82] A. N. Kolmogorov, 'The Local Structure of Turbulence in Incompressible Viscous Fluid for Very Large Reynolds Number', *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* 30, 9–13 (1941) [reprinted in *Proc. R. Soc. Lond. A* 434, 9–13 (1991)].
- [83] A. N. Kolmogorov, 'On Degeneration of Isotropic Turbulence in an Incompressible Viscous Liquid', *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* 31, 9538–9540 (1941).
- [84] A. N. Kolmogorov, 'Dissipation of Energy in Locally Isotropic Turbulence', *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* 32, 16–18 (1941) [reprinted in *Proc. R. Soc. Lond. A* 434 15–17 (1991)].
- [85] A. N. Kolmogorov, 'Three Approaches to the Quantitative Definition of Information', *Problems of Information Transmission* X, 4 (1965).
- [86] I. Koponen, 'Analytic Approach to the Problem of Convergence of Truncated Levy Flights towards the Gaussian Stochastic Process', *Phys. Rev. E* 52, 1197–1199 (1995).
- [87] L. Laloux, P. Cizeau, J.-P. Bouchaud, and M. Potters, 'Noise Dressing of Financial Correlation Matrices', *Phys. Rev. Lett.* 83, 1467–1470 (1999).
- [88] K. Lauritsen, P. Alstrom, and J.-P. Bouchaud, eda. Application of Physics in Financial Analysis, *Int. J. Theor. Appl. Finance* [special issue] (in press).

- [89] Y. Lee, L. A. N. Amaral, D. Canning, M. Meyer, and H. E. Stanley, 'Universal Features in the Growth Dynamics of Complex Organizations', *Phys. Rev. Lett.* 81, 3275—3278 (1998).
- [90] M. Levy, H. Levy, and S. Solomon, 'Microscopic Simulation of the Stock Market — The Effect of Microscopic Diversity', *J. Phys. I* 5, 1087—1107 (1995).
- [91] M. Levy and S. Solomon, 'Power Laws Are Logarithmic Boltzmann Laws', *Intl J. Mod. Phys. C* 7, 595—601 (1996).
- [92] P. Levy, *Calcul des probability* (Gauthier-Villars, Paris, 1925).
- [93] W. Li, 'Absence of $1/f$ Spectra in Dow Jones Daily Average'. *Intl J. Bifurcations and Chaos* 1, 583—597 (1991).
- [94] J. W. Lindeberg, 'Eine neue Herleitung des Exponentialgesetzes in der Wahrscheinlichkeitsrechnung', *Mathematische Zeitschrift* 15, 211—225 (1922).
- [95] Y. Liu, P. Cizeau, M. Meyer, C.-K. Peng, and H. E. Stanley, 'Quantification of Correlations in Economic Time Series', *Physica A* 245, 437—440 (1997).
- [96] Y. Liu, P. Gopikrishnan, P. Cizeau, M. Meyer, C.-K. Peng, and H. E. Stanley, 'The Statistical Properties of the Volatility of Price Fluctuations', *Phys. Rev. E* 59, 1390—1400 (1999).
- [97] A. W. Lo and A. C. Mackinlay, 'When Are Contrarian Profits Due to Stock Market Overreaction?' *Rev. Financial Stud.* 3, 175—205 (1990).
- [98] T. Lux, 'Time Variation of Second Moments from a Noise Trader Infection Model', *J. Econ. Dyn. Control* 22, 1—38 (1997).
- [99] T. Lux, 'The Socio-Economic Dynamics of Speculative Markets: Interacting Agents, Chaos, and the Fat Tails of Return Distributions', *J. Econ. Behav. Organ* 33, 143—165 (1998).
- [100] T. Lux and M. Marchesi, 'Scaling and Criticality in a Stochastic Multi-Agent Model of a Financial Market', *Nature* 397, 498—500 (1999).
- [101] E. Majorana, 'Il valore delle leggi statistiche nella fisica e nelle scienze sociali', *Scientia* 36, 58—66 (1942).
- [102] B. B. Mandelbrot, 'The Variation of Certain Speculative Prices', *J. Business* 36, 394—419 (1963).
- [103] B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature* (W. H. Freeman, San Francisco, 1982).
- [104] B. B. Mandelbrot, *Fractals and Scaling in Finance* (Springer-Verlag, New York, 1997).
- [105] R. N. Mantegna, 'Levy Walks and Enhanced Diffusion in Milan Stock Exchange', *Physica A* 179, 232—242 (1991).
- [106] R. N. Mantegna, 'Fast, Accurate Algorithm for Numerical Simulation of Levy Stable Stochastic Processes', *Phys. Rev. E* 49, 4677—4683 (1994).

- [107] R. N. Mantegna, 'Degree of Correlation Inside a Financial Market', in *Applied Nonlinear Dynamics and Stochastic Systems near the Millennium*, edited by J. B. Kadtko and A. Bulsara (AIP Press, New York, 1997), pp. 197—202.
- [108] R. N. Mantegna, 'Hierarchical Structure in Financial Markets', Cond.-Mat. preprint server 9802256; *Eur. Phys. J. B* 11, 193—197 (1999).
- [109] R. N. Mantegna, ed., *Proceedings of the International Workshop on Econophysics and Statistical Finance, Physica A* [special issue] 269, (1999).
- [110] R. N. Mantegna and H. E. Stanley, 'Stochastic Process with Ultraslow Convergence to a Gaussian: the Truncated Levy Flight', *Phys. Rev. Lett.* 73, 2946—2949 (1994).
- [111] R. N. Mantegna and H. E. Stanley, 'Scaling Behavior in the Dynamics of an Economic Index', *Nature* 376, 46—49 (1995).
- [112] R. N. Mantegna and H. E. Stanley, 'Turbulence and Financial Markets', *Nature* 383, 587—588 (1996).
- [113] R. N. Mantegna and H. E. Stanley, 'Stock Market Dynamics and Turbulence: Parallel Analysis of Fluctuation Phenomena', *Physica A* 239, 255—266(1997).
- [114] R. R. Mantegna and H. E. Stanley, 'Physics Investigation of Financial Markets', in *Proceedings of the International School of Physics 'Enrico Fermi', Course CXXXIV*, edited by F. Mallamace and H. E. Stanley (IOS Press, Amsterdam, 1997).
- [115] H. Markowitz, *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment* (J. Wiley, New York, 1959).
- [116] M. Marsili, S. Maslov, and Y.-C. Zhang, 'Dynamical Optimization Theory of a Diversified Portfolio', *Physica A* 253, 403—418 (1998).
- [117] S. Maslov and Y.-C. Zhang, 'Probability Distribution of Drawdowns in Risky Investments', *Physica* 262, 232—241 (1999).
- [118] A. Matacz, 'Financial Modeling on Option Theory with the Truncated Levy Process', Working Paper, School of Mathematics and Statistics, University of Sydney, Report 97—28 (1997).
- [119] M. Mehta, *Random Matrices* (Academic Press, New York, 1995).
- [120] R. C. Merton, 'Theory of Rational Option Pricing', *Bell J. Econ. Management Sci.* 4, 141—183 (1973).
- [121] R. C. Merton, 'Option Pricing When Underlying Stock Returns Are Discontinuous', *J. Financial Econ.* 3, 125—144 (1976).
- [122] R. C. Merton, *Continuous-Time Finance* (Blackwell, Cambridge MA, 1990).
- [123] M. Mezard, G. Parisi, and M. A. Virasoro, *Spin Glass Theory and Beyond* (World Scientific, Singapore, 1987).
- [124] A. S. Monin and A. M. Yaglom, *Statistical Fluid Mechanics: Mechanics of Turbulence, Vol. 1* (The MIT Press, Cambridge, 1971).
- [125] E. W. Montroll and W. W. Badger, *Introduction to Quantitative Aspects of Social Phenomena* (Gordon and Breach, New York, 1974).

- [126] U. A. Muller, M. M. Dacorogna, R. B. Olsen, O. V. Pictel, M. Schwarz, and C. Morgenegg, 'Statistical Study of Foreign Exchange Rates, Empirical Evidence of a Price Change Scaling Law and Intraday Analysis', *J. Banking and Finance* 14, 1189—1208 (1995).
- [127] M. Musiela and M. Rutkowski, *Martingale Methods in Financial Modeling* (Springer, Berlin, 1997).
- [128] M. M. Navier, 'Memoire sur les Loix du Mouvement des Fluides', *Mem. Acad. Roy. Sci.* 6, 389—440 (1923).
- [J29] A. Pagan, 'The Econometrics of Financial Markets', *J. Empirical Finance* 3, 15—102 (1996). [130] C. H. Papadimitriou and K. Steigitz, *Combinatorial Optimization* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs NJ, 1982).
- [131] A. Papoulis, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes, second edition* (McGraw-Hill, New York, 1984).
- [132] V. Pareto, *Cows d'Economie Politique* (Lausanne and Paris, 1897).
- [133] M. Pasquini and M. Serva, 'Clustering of Volatility as a Multiscale Phenomenon', *Cond.-Mat. preprint server* 9903334.
- [134] V. Plerou, P. Gopikrishnan, B. Rosenow, L. A. N. Amaral, and H. E. Stanley, 'Universal and Non-Universal Properties of Cross-Correlations in Financial Time Series', *Phys. Rev. Lett.* 83, 1471—1474 (1999).
- [135] M. Potters, R. Cont, and J.-P. Bouchaud, 'Financial Markets as Adaptive Ecosystems', *Europhys. Lett.* 41, 239—242 (1998).
- [136] W. H. Press, 'Flicker Noise in Astronomy and Elsewhere', *Comments Astrophys.* 7, 103—119 (1978).
- [137] M. Raberto, E. Scalas, G. Cuniberti, and M. Riani, 'Volatility in the Italian Stock Market: An Empirical Study', *Physica A* 269, 148—155 (1999).
- [138] R. Rammal, G. Toulouse, and M. A. Virasoro, 'Ultrametricity for Physicists', *Rev. Mod. Phys.* 58, 765—788 (1986).
- [139] S. Ross, 'The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing', *J. Econ. Theory* 13, 341—360 (1976).
- [140] G. Samorodnitsky and M. S. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with Infinite Variance* (Chapman and Hall, New York, 1994).
- [141] P. A. Samuelson, 'Proof that Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly', *Industrial Management Rev.* 6, 41—45 (1965).
- [142] A. H. Sato and H. Takayasu, 'Dynamic Numerical Models of Stock Market Price: From Microscopic Determinism to Macroscopic Randomness', *Physica A* 250, 231—252 (1998).
- [143] G. W. Schwert, 'Why Does Stock Market Volatility Change over Time?', *J. Finance* 44, 1115—1153 (1989).
- [144] M. F. Shlesinger, 'Comment on «Stochastic Process with Ultraslow Convergence to a Gaussian: The Truncated Levy Flight»,', *Phys. Rev. Lett.* 74, 4959 (1995).

- [145] D. Sornette, 'Large Deviations and Portfolio Optimization', *Physica A* 256, 251—283 (1998).
- [146] D. Sornette and A. Johansen, 'A Hierarchical Model of Financial Crashes', *Physica A* 261, 581—598 (1998).
- [147] H. E. Stanley, *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena* (Oxford University Press, Oxford, 1971).
- [148] M. H. R. Stanley, L. A. N. Amaral, S. V. Buldyrev, S. Havlin, H. Leschhorn, P. Maass, M. A. Salinger, and H. E. Stanley, 'Scaling Behavior in the Growth of Companies', *Nature* 379, 804—806 (1996).
- [149] D. Stauffer, 'Can Percolation Theory be Applied to the Stock Market?', *Ann. Phys.-Berlin* 7, 529—538 (1998).
- [150] D. Stauffer and T. J. P. Penna, 'Crossover in the Cont-Bouchaud Percolation Model for Market Fluctuations', *Physica A* 256, 284—290 (1998).
- [151] H. Takayasu, H. Miura, T. Hirabayashi, and K. Hamada, 'Statistical Properties of Deterministic Threshold Elements — The Case of Market Price', *Physica A* 184, 127—134 (1992).
- [152] H. Takayasu, A. H. Sato, and M. Takayasu, 'Stable Infinite Variance Fluctuations in Randomly Amplified Langevin Systems', *Phys. Rev. Lett.* 79, 966—969 (1997).
- [153] H. Takayasu and K. Okuyama, 'Country Dependence on Company Size Distributions and a Numerical Model Based on Competition and Cooperation', *Fractals* 6, 67—79 (1998).
- [154] C. Trzcinka, 'On the Number of Factors in the Arbitrage Pricing Model', *J. Finance* 41, 347—368 (1986).
- [155] N. Vandewalle and M. Ausloos, 'Coherent and Random Sequences in Financial Fluctuations', *Physica A* 246, 454—459 (1997).
- [156] M. B. Weissman, '1// Noise and Other Slow, Nonexponential Kinetics in Condensed Matter', *Rev. Mod. Phys.* 60, 537—571 (1988).
- [157] D. B. West, *Introduction to Graph Theory* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs NJ, 1996).
- [158] N. Wiener, 'Differential Space', *J. Math. Phys.* 2, 131—174 (1923).

Работы из списка литературы, имеющиеся на русском языке

- [42] Дуб Д. Л. Стохастические процессы. М. Мир. 1965.
- [56, 57] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М. Мир. 1984
- [65] Гнеденко Б. В. «К теории областей притяжения устойчивых законов». Ученые записки Московского Государственного Университета. Математика, 45, 1940.

- [66] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных переменных. Гостехиздат, 1949.
- [82] Колмогоров А. Н. «Локальные структуры турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости для больших чисел Рейнольдса». Доклады Академии Наук СССР, 30, 1941.
- [83] Колмогоров А. Н. «К вырождению изотропической турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости». Доклады Академии Наук СССР, 31, 1941.
- [84] Колмогоров А. Н. «Рассеяние энергии в локальной изотропической турбулентности». Доклады Академии Наук СССР 32, 1941.
- [85] Колмогоров А. Н. «Три подхода к количественному определению информации». Проблемы передачи информации, 10, М. 1965
- [104] Мандельброт Б. Б. Фрактальная геометрия природы. М. Институт компьютерных исследований, 2002.

Список дополнительной литературы на русском языке

1. Арнольд В. И. Теория катастроф. — М.: Наука, 1990.
2. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.
3. Берже П., Помо П., Видаль К. Порядок в хаосе. О детерминистическом подходе к турбулентности. — М.: Мир, 1991.
4. Бэстенс Д.-Э., Ван Ден Берг В.-М., Вуд Д. Нейронные сети и финансовые рынки. — М.: ТВП Научное издательство, 1998.
5. Ежов А. А., Шуйский С. А. Нейрокомпьютинг и его применение в экономике и бизнесе. — М.: ЭАИ МИФИ, 1998.
6. Занг В.-Б. Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории. — М.: Мир, 1999.
7. Золотарев В. М. Одномерные устойчивые распределения. — М.: Наука, 1983.
8. Курдюмов С. П. Законы эволюции и самоорганизации сложных систем. Препринт. — М.: ИПМ, N 45, 1990.
9. Лебедев В. В. Математическое моделирование социально-экономических процессов. — М.: Изограф, 1997.
10. Леви П. Стохастические процессы и броуновское движение. — М.: Наука, 1972.
11. Лоскутов А. Ю., Михайлов А. С. Введение в синергетику. — М.: Наука, 1990.
12. Николис Д. С. Динамика иерархических систем. Эволюционное представление. — М.: Мир, 1989.
13. Палис Ж., Мелу Ди В. Геометрическая теория динамических систем. — М.: Мир, 1986; Платон, 1998.

14. Пантелеев А. В., Якимова А. С, Босов А. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения в приложениях к анализу динамических систем. — М.: Изд-во МАИ, 1997.
15. Петерс Э. Хаос и порядок на рынках капитала. — М.: Мир, 2000.
16. Пределы предсказуемости. Сб. статей под ред. Кравцова Ю. А. — М.: Центр-Ком, 1997.
17. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения. — М.: Мир, 1980.
18. Пригожин И., Стенгерс И. Время, хаос, квант. К решению парадокса времени. — М.: Прогресс, 1994.
19. Странные аттракторы. Сб. статей. — М.: Мир, 1981.
20. Тоффоли Т., Марголюс Н. Машины клеточных автоматов. — М.: Мир, 1991.
21. Трубецков Д. И. Колебания и волны для гуманитариев. — Саратов: ГосУНЦ «Колледж», 1997.
22. Федер Е. Фракталы. — М.: Мир, 1991.
23. Фракталы в физике (под ред. Л. Пьетронеро, Э. Тозатти). — М.: Мир, 1988.
24. Хакен Г. Синергетика. — М.: Мир, 1980.
25. Хакен Г. Синергетика. Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. — М.: Мир, 1985.
26. Хакен Г. Информация и самоорганизация. Макроскопический подход к сложным системам. — М.: Мир, 1991.
27. Холодниок М., Клич А., Кубичек М., Марек М. Методы анализа нелинейных динамических моделей. — М.: Мир, 1991.
28. Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла. — М.: Мир, 1985.
29. Шустер Г. Детерминированный хаос. — М.: Мир, 1988.
30. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. — М.: Мир, 1982, Платон, 1997.

Алфавитный указатель

А

- Автоковариация 67, 110
- Автокорреляционная функция 65, 67, 70, 71, 73, 80, 109
- Алгоритмическая теория сложности 26, 27
- Алгоритм Крускала 138
- Арбитраж 23, 24
- Аттрактор 87, 112
 - Гауссовский аттрактор 39, 46
 - Негауссовский аттрактор 46
 - Странный аттрактор 18

Б

- Башелье 16, 25
- Бензеци 137
- Бернулли 47
- Бесконечно делимые случайные процессы 50, 52
- Блэк—Шоулс 14, 16, 21, 150, 151, 158, 161, 162
 - Формула Блэка—Шоулса 152
- Броуновское движение 16
 - Геометрическое броуновское движение 17, 84, 150, 161
- Берри—Эссена теорема 37, 93
 - Вторая теорема Берри—Эссена 38
 - Первая теорема Берри—Эссена 37

В

- Винеровский процесс 16, 31, 71, 106
- Волатильность 61, 62, 79, 80, 82, 99, 103, 121, 126, 157, 158, 162
 - Историческая волатильность 158
 - Подразумеваемая волатильность 158
- Временная корреляция 65

Г

- Гамма-распределение 51
 - Гамма-распределенные случайные величины 51
- Гасшхай 123
- Гауссиан 43
- Гауссовское блуждание 31
- Гауссовское распределение 32, 42, 45
- Гипотеза эффективного рынка 24, 25, 91, 134
- Гипотезы Тейлора 119
- Гнеденко 37

Д

- Дельта-распределение 32
- Дефлятор 58
- Дисконтирование 58
- Длиннодиапазонно коррелированные случайные величины 70, 72
- Длиннодиапазонные корреляции 77, 78
- Дроет 112
- Дуб 170

И

- Ингл 103
- Индекс S&P500 76, 79, 94, 123, 129
- Индекс Доу-Джонса 130, 141

К

- Кларк 88
- Клиринговый центр 145
- Колмогоров 26, 37, 119, 126, 127
- Коронен 92
- Корреляционная матрица 132
- Корреляционное время процесса 68
- Краткодиапазонно коррелированные 70
- Критические явления 49
- Кумулятивное распределение вероятности 101

Л

- Леви 15, 43, 161, 170
 - «Усеченный полет» Леви 85, 89, 126
 - Устойчивые процессы Леви 44
 - Стохастические процессы Леви 40
 - Устойчивое распределение Леви 17, 43
 - Устойчивое негауссовское распределение Леви 89
 - Устойчивый стохастический процесс Леви 90
- Лептоэксцесные распределения 84
- Локализационная теория Андерсона 134
- Лоренцево распределение 42
- Лоренциан 43

М

- Майоран 20
- Мандельброт 15, 17, 47, 55, 86
- Марковский процесс 74, 110
- Мартингалы 25, 26, 170
- Матрицы 128
- Многомерное расстояние 137
- Многомерные пространства 136

Н

Негауссовские аттракторы 46
Ньюмен 112

О

Обратное преобразование Фурье 42
Опцион 55, 144, 145, 156
 Американский опцион 146
 Европейский опцион 146
 Колл-опцион 146, 148
 Пут-опцион 146

П

Парето 15, 47
Портфель акций 55
 Портфель акций индекса S&P 500 132
Портфель финансовых активов 128
Предельная теорема 40, 46, 49, 87
 Предельная теорема для устойчивых распределений 45
Производные финансовых инструментов 84, 144
Пуанкаре 16
Пуассоновский процесс 51

Р

Раммах 137
Распределение 46
 Равномерное распределение 32
 Распределение Коши 32
 Распределение Леви 44, 96
 Распределение Леви—Смирнова 43
 Распределение Лоренца 87
 Распределение по степенному закону 47
 Смесь гауссовских распределений 88
Расстояние между акциями 135
Редкие события 100
Росс 133

С

Самоподобие 44, 86, 94, 96
Самуэльсон 25
Санкт-Петербургский парадокс 47
Свёртка 32
Свопы 144
Скейлинг 15, 20, 44, 48, 88, 94, 97, 115, 124, 126 127, 163
Случайная величина 30, 33, 34, 36, 41, 46, 49
Случайное блуждание 16, 25, 30, 31, 82
Случайные матрицы 133, 134
Смесь гауссовских распределений 88

- Сорнетт Д. 136
- Спектральная плотность 72, 76, 123
- Спектр мощности 71, 72, 80, 123
- Спекуляция 147
- Спиновые стекла 137
- Сравнение краткодиапазонно и длиннодиапазонно коррелированных шумов 74
- Стационарность 65
- Стационарные стохастические процессы 66
- Степенное распределение 18
- Степенной закон 46, 48
 - Степенной закон распределения 44
- Стохастический процесс 18, 19, 21, 31, 70, 74, 94, 103, 104
 - Стохастические процессы Леви 40
 - Стохастический процесс ценовых изменений 52
 - Стохастический процесс Ито 150
- Субдоминантная многомерность 138
- Субдоминантное многомерное пространство 143

Т

- Таксономия портфеля акций 135
- Теорема Берри—Эссена 37, 93
- Теория критических явлений 163
- Теория неупорядоченных систем 163
- Теория спиновых стекол 134
- Теория хаоса 18
- Технический анализ 21
- «Тиковые» данные 63
- Транзакции 56, 60, 63
- Турбулентность 21, 117, 118, 119, 123

У

- Уилли Дж. 170
- Уравнение Чепмена—Колмогорова 16
- Уравнения Навье—Стокса 118
- Усеченные полеты Леви 126
- Условие Линдеберга 33
- Устойчивое распределение 40, 46
 - Устойчивое распределение Леви 17, 43
- Устойчивые негауссовские распределения 49
 - Устойчивое негауссовское распределение Леви 89
- Устойчивые процессы 50
 - Устойчивые процессы Леви 44
 - Устойчивый стохастический процесс Леви 90
 - Устойчивые случайные процессы 52

Ф

- Фаме 86
- Феллер 34
- Финансовый актив 54, 57, 59, 84
- Финансовые временные ряды 75
- Финансовые инструменты 56, 75
- Форвардные контракты 144, 148
- Форекс 60
- Формула Блэка—Шоулса 152
- Функция плотности вероятности 31, 32, 34, 41, 42, 66
- Фурье-преобразование 71
- Фьючерсы 144, 145

Х

- Характеристическая функция 41, 43
- Хеджирование 147, 160
- Хинчин 43, 52, 53

Ц

- Центральная предельная теорема 30, 34, 45

Ч

- Чебышев 37
- Чейтин 26
- Число Рейнольдса 118

Э

- Эйлеровская гамма-функция 43
- Эйнштейн 16
- Экссесс 84, 105, 106

А

- ARCH- и GARCH-процессы 103
- ARCH-модели 103
- ARCH-процесс 85, 103, 104

D

- DJIA 129, 142

F

- 1/f-шум 72—74

G

- GARCH(1,1) 109, 110, 112, 113, 114, 115
- GARCH-процессы 85, 107

N

NYSE 129

S

S&P 500 97, 98, 113, 114, 119, 122, 129, 142

T

T-распределение Стьюдента 85, 87, 89

TLF-распределение 98

TLF-смещения 99

Научное издание

Росарио Н. Мантенья, Х. Юджин Стенли

**ВВЕДЕНИЕ В ЭКОНОФИЗИКУ
Корреляции и сложность в финансах**

Редактор *А. С. Попов*
Компьютерная верстка *О. К. Макаренко*

Подписано в печать
Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Объем 5,875 бум. л. . Печ. л. 11,75.
Изд. № . Тираж экз. Заказ
