

На правах рукописи

Старченко Николай Викторович

**ИНДЕКС ФРАКТАЛЬНОСТИ И ЛОКАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ХАОТИЧЕСКИХ
ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ**

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

01.01.03 – математическая физика

диссертация на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва - 2005

Работа выполнена в Московском инженерно-физическом институте (государственном университете),

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор

Крянев Александр Витальевич

кандидат физико-математических наук

Дубовиков Михаил Михайлович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор

Чернавский Дмитрий Сергеевич

доктор физико-математических наук

Романовский Михаил

Ведущая организация: Российская финансовая академия при правительстве

Российской Федерации, кафедра математики и финансовых приложений.

Защита диссертации состоится «15» февраля 2006 г. в 15 часов 00 мин. на заседании Диссертационного совета Д212.130.09 при Московском инженерно-физическом институте (государственном университете) по адресу: г. Москва, Каширское шоссе, д.31.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского инженерно-физического института (государственного университета)

Автореферат разослан «___»_____ 2005 г.

Ученый секретарь диссертационного совета

доктор физико-математических наук, профессор

Леонов А.С.

Оглавление

Введение	1
1. Фрактальные структуры	11
1.1. Модельные фракталы	13
1.2. Природные фракталы	17
1.3. Фрактальность временных рядов	21
2. Фрактальный анализ временных рядов	34
2.1. Минимальные покрытия и индекс фрактальности	34
2.2. Общий анализ финансовых временных рядов	39
2.3. Сравнение точности вычисления различных фрактальных показателей для финансовых временных рядов	46
2.4. Сравнение индекса фрактальности с показателем Херста	47
2.5. Локальная фрактальная структура и устойчивость временных рядов	53
3. Локальный фрактальный анализ в задачах идентификации и разладки	64
3.1. Локальные фрактальные характеристики модельных хаотических временных рядов и задача идентификации	64

3.2.	Локальный фрактальный анализ и тестирование гипотезы эффективного рынка	73
3.3.	Локальные фрактальные характеристики и задача о разладке	86
4.	Локальный фрактальный анализ и прогнозирование	90
4.1.	Прогнозирование значений временного ряда	91
4.2.	Оценка риска вложений в финансовые активы	93
4.3.	Флуктуации фрактальной структуры и эволюция временного ряда	99
4.4.	Критическое поведение временных рядов	105
5.	Заключение	110
6.	Литература	113

Введение.

Актуальность темы.

Фракталы – это структуры, которые, несмотря на свою крайнюю нерегулярность на разных масштабах, выглядят примерно одинаково. Фракталы окружают нас повсюду. Во многом благодаря Бенуа Мандельброту, основоположнику науки о фракталах, мы теперь знаем, что «фракталы вокруг нас повсюду, и в очертаниях гор, и в извилистой линии морского берега. Некоторые из фракталов непрерывно меняются, подобно движущимся облакам или мерцающему пламени, в то время как другие, подобно деревьям или нашим сосудистым системам, сохраняют структуру, приобретенную в процессе эволюции» [56]. Диапазон масштабов, где наблюдаются фрактальные структуры, простирается от расстояний между атомами в веществе до расстояний между скоплениями галактик во вселенной. Можно предположить, что любые достаточно сильные нерегулярности в природе стремятся обрести фрактальную структуру. Поэтому совсем неудивительно, что многие, отвечающие реальности нелинейные динамические системы имеют фрактальные аттракторы (например, аттрактор Лоренца или Ресслера). Это означает, что крайне неустойчивые фазовые траектории таких систем с течением времени стремятся стать фракталами. Заметим, что для большинства реально существующих в природе и обществе динамических процессов серьезные трудности обычно возникают еще на этапе описания их в виде дифференциальных уравнений или дискретных отображений. Между тем фрактальная геометрия наблюдаемых реализаций таких процессов является так же хорошо известной [24],[41],[49],[73],[79]. Таким образом, огромное количество естественных систем, поведение которых внешне воспринимается как хаотическое, объединяет одно общее свойство. Это

свойство – самоподобие (инвариантность относительно изменения масштаба), или, что то же самое, фрактальность.

Описанию самоподобия в природе и науке посвящена обширная литература. Во-первых, это ставшие классическими монографии основоположника науки о фракталах Бенуа Мандельброта [56] и его последователей [41],[79]. Во-вторых, регулярные обзоры в общенаучных журналах [2],[13],[17],[21]. В-третьих, постоянно публикующиеся работы, посвященные фрактальным свойствам систем, возникающих в совершенно различных областях естествознания: ядерной физике [2], астрономии [69], геофизике [24],[88], биологии и медицине [31], компьютерной графике [30], экономике и финансах [18], [49], [62] и т.д. Регулярно издается специализированный журнал *Fractals*, полностью посвященный фракталам.

Отдельной, важной областью применения фракталов является анализ временных рядов: последовательностей измерения физических величин, упорядоченных по времени. Как правило, информация о поведении сложных систем получается в виде именно таких экспериментальных данных. На сегодняшний день хорошо известно, что фракталами являются графики реализаций чрезвычайно различных процессов, как стохастических (например, броуновское движение), так и детерминированных (например, реализация решений логистического уравнения при определенных значениях параметра). Фрактальные временные ряды возникают, в частности, при измерениях различных естественных процессов: солнечной активности [84], уровня разливов рек [24], шумов электронных приборов [87], геофизической и геомагнитной активности [88], физиологических характеристик организма человека [33] и т.д.

Столь широкая распространенность фрактальных свойств временных рядов позволяет надеяться на наличие единого универсального механизма, приводящего к возникновению фрактальности в совершенно различных естественных системах. Поиск такого механизма является одной из актуальнейших задач современной науки.

В последние десятилетия внимание физиков все больше и больше привлекают экономические и социальные системы. Причин для этого много. Очевидно, что изучение этих систем является крайне важным, поскольку экономика и социальные процессы играют сегодня основную роль, как в жизни отдельного человека, так и в жизни государств в целом. Одновременно с этим оказалось, что именно они являются наиболее сложным из всего, что известно науке. На такие системы действует множество факторов, как внешних, так и внутренних, вследствие чего их поведение оказывается причудливой смесью стохастики и детерминированности. Поэтому можно надеяться, что открытие общих законов эволюции сложных систем возможно именно в этой области.

В настоящее время идет оформление новой науки – эконофизики (экономической физики) [22], [61], в рамках которой, на основе анализа и моделирования социальной и экономической динамики, делается попытка обобщить физические знания о поведении сложных систем и создать новые инструменты их анализа. Результатам этой деятельности посвящается ежеквартальный номер известного и уважаемого физического журнала PHYSICA A, выходящий с названием ECONOPHYSICS. Неисчерпаемым источником экспериментальной информации для эконофизики является поведение экономических временных рядов, в частности, поведение цен акций и валют на мировых финансовых рынках.

Современный финансовый рынок представляет собой идеальный пример «естественной» сложной системы. С одной стороны он достаточно хаотичен, поскольку его эволюция определяется волей большого количества людей, а с другой в нем действуют устойчивые механизмы, определяемые коллективным поведением участников. Одной из задач эконофизики является описание механизмов коллективного взаимодействия, которые могут привести к возникновению ценовой динамики, подобной наблюдаемой на бирже. При этом крайне важным оказывается определение и описание специфических свойств ценовых рядов, отличающих их от других известных

естественных процессов. В настоящее время можно считать установленным, что ряды цен являются фракталами в широком диапазоне масштабов (от нескольких минут, до нескольких лет) [57]. Однако их поведение является гораздо более сложным, чем поведение большинства модельных и естественных процессов [62-63]. Поэтому необходим инструмент количественного анализа таких рядов, который позволил бы детально исследовать их динамику. Основной количественной характеристикой фракталов является размерность D , введенная Хаусдорфом еще в 1919 году для компактного множества в произвольном метрическом пространстве по формуле:

$$D = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\ln N(d)}{\ln(1/d)} \quad (1)$$

где $N(d)$ - минимальное количество шаров радиуса d , покрывающих это множество.

Основанием для введения этого определения является асимптотика для $N(d)$, которая в случае фрактальных множеств определяется выражением:

$$(1/d)^D \sim N(d) \quad (2)$$

Для большинства естественных временных рядов, аналитическое нахождение фрактальной размерности невозможно, поэтому D определяют численно: либо непосредственно (например, с помощью алгоритма Гросбергера-Прокаччи [45]), либо через величины, связанные с ней простым соотношением (например, через показатель Херста H). Для получения надежной численной оценки D с помощью существующих на сегодняшний день алгоритмов требуется большое количество данных (порядка 10^3 - 10^4 значений) [41], поэтому полученные результаты дают представление только об общих свойствах ряда на больших масштабах, внутри которых временной ряд может несколько раз изменить характер своего поведения. Для

детального изучения свойств временных рядов необходимо определить D локально в каждой точке ряда. В настоящей работе разработан численный алгоритм определения локальной фрактальной размерности ряда и с его помощью исследованы свойства различных хаотических временных рядов, в частности цен акций.

Цель диссертационной работы.

Целью диссертационной работы является разработка алгоритма вычисления локальной фрактальной размерности и его использование для анализа хаотических временных рядов. Достижение цели осуществляется решением следующих задач:

1. Изучением существующих методов определения фрактальной размерности и выявлением свойств необходимых для ее точного определения по небольшому количеству экспериментальных данных.
2. Разработкой алгоритма определения фрактальной размерности на основе асимптотики для площади покрытий
3. Сравнением эффективности предложенного алгоритма с эффективностью существующих алгоритмов.
4. Выявлением связи полученных численных значений локальной фрактальной размерности с другими характеристиками реальных хаотических временных рядов.
5. Тестированием с помощью предложенного алгоритма реальных временных рядов на наличие в них хаотической компоненты и определением ее доли.
6. Разработкой возможных методов прогнозирования хаотических временных рядов с использованием информации о локальных фрактальных свойствах временного ряда.

Научная новизна.

1. На основе минимальных покрытий предложен новый алгоритм вычисления фрактальной размерности, который имеет быстрый выход на степенную асимптотику и поэтому требует существенно меньше данных, чем ранее применяемые алгоритмы.
2. С помощью предложенного алгоритма на примере финансовых рядов удалось показать, что степенной закон вида (1) с большой точностью выявляется даже на достаточно малых интервалах, содержащих всего несколько десятков значений.
3. Разработан метод локального фрактального анализа, который позволяет вполне удовлетворительно решать задачу идентификации локального состояния исследуемого временного ряда.
4. Предложены новые подходы к прогнозированию хаотических временных рядов, с учетом информации о локальном фрактальном состоянии ряда.

Практическая ценность.

Алгоритм численного определения фрактальной размерности временного ряда и разработанный на его основе локальный фрактальный анализ временных рядов цен акций успешно используется для принятия решений о покупке и продаже акций в автоматическом торговом комплексе, реализованном в ЗАО «Финансовая компания «Интраст»

Основные результаты, выносимые на защиту.

1. Алгоритм вычисления локальных фрактальных характеристик (индекса фрактальности и размерности минимальных покрытий) временных рядов.

2. Результаты исследования хаотических временных рядов с помощью индекса фрактальности.
3. Экспериментальное обнаружение эффекта увеличения крупномасштабных флуктуаций при подавлении мелкомасштабных.

Апробация работы.

Полученные в диссертации результаты докладывались на трех научных сессиях МИФИ (в 2003, 2004 и 2005 году), международной конференции по математическому моделированию социальной и экономической динамики (MMSED-2004), семинаре академика РАН, профессора Д.С. Чернавского по математическому моделированию развивающихся систем в теоретическом отделе ФИАН (Москва 2004 г.), семинаре по обратным задачам в математической физике в МГУ (Москва 2004 г.), семинаре по финансовой математике в Финансовой Академии при Правительстве РФ (Москва, 2004 г.), семинаре по математическому моделированию в институте системного анализа (Москва 2005 г.).

Публикации.

Полученные в диссертации результаты опубликованы в 8 работах [8-12] и [35,36].

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, четырех глав и заключения, содержит 30 рисунков, 5 таблиц, список цитированной литературы из 88 наименований. Объем диссертации 119 страниц.

Основное содержание работы.

Настоящая работа посвящена анализу фрактальной геометрии графиков временных функций (временных рядов) реальных хаотических процессов. Если в качестве аппроксимации таких графиков рассматривать комплексы, состоящие из двумерных простых фигур (например, клеток), с геометрическим фактором d , то основная численная характеристика фрактальных графиков – фрактальная размерность D определяется из соотношения

$$S(d) \sim d^{2-D} \text{ при } d \rightarrow 0 \quad (3)$$

где $S(d)$ - полная площадь комплекса, с фактором разбиения d .

Между тем, на практике при попытке вычислить D , непосредственно из формулы (3) возникает определенная проблема. Она связана с тем, что, с одной стороны, реальные временные ряды всегда имеют минимальный масштаб структуры d_0 , с другой же стороны, для всех известных аппроксимаций приближение к асимптотическому режиму (1) является слишком медленным. По этой причине для определения D обычно вычисляют показатель Херста H , который для гауссовых процессов связан с D соотношением $H=2-D$. Однако, для надежного вычисления H требуется слишком большой репрезентативный масштаб, содержащий несколько тысяч данных [41]. Внутри этого масштаба временной ряд, как правило, много раз меняет характер своего динамического поведения. Чтобы связать локальную динамику соответствующего процесса с фрактальной размерностью временного ряда необходимо определить размерность D локально (т.е. на масштабах, порядка характерного масштаба основных динамических состояний процесса). Для этого необходимо найти последовательность аппроксимаций, которая давала бы достаточно быстрый выход функции $S(d)$ на асимптотический режим (3). Чтобы понять, как может быть устроена эта последовательность, в первой главе работы рассматриваются некоторые

модельные фракталы, например, такие как множество Кантора и кривая Кох. Соответствующие аппроксимации для таких фракталов представляют собой минимальные покрытия. В этой главе помимо модельных фрактальных структур анализируются так же и природные фракталы. Как те, так и другие имеют свою особую специфику, которая проявляется на этих примерах. Особенное внимание уделяется фрактальности временных рядов и существующим способам численного определения их фрактальных характеристик. Данная глава носит вспомогательный характер и вводит в круг тех представлений, которые позволяют понять основную часть работы.

Во второй главе на основе минимальных покрытий вводится амплитудная вариация $V_f(d)$, а также новые фрактальные характеристики – индекс фрактальности m и размерность минимального покрытия D_m , тесно связанная с m . Доказывается, что для функции одной скалярной переменной, имеющей не более конечного числа точек разрыва первого рода, размерность D_m совпадает с клеточной размерностью D_C . Далее на основе амплитудной вариации $V_f(d)$ и индекса m анализируются ценовые ряды акций компаний, входящих в индекс Доу-Джонса. В результате оказывается, что $V_f(d)$ для этих рядов имеет быстрый выход на асимптотику. Это приводит к тому, что для определения m с приемлемой точностью требуется данных на два порядка меньше, чем для определения, например, показателя Херста H . Для численного подтверждения этого факта точность определения показателей m и H сравнивается на основе одних и тех же данных и показывается, что m определяется намного более точно. Это естественным образом приводит к тому, что индекс фрактальности m может рассматриваться как локальный фрактальный показатель, характеризующий состояние исходного процесса. Далее вводится функция $m(t)$ и на основе численных данных устанавливается эмпирическая зависимость между локальным значением m и стабильностью процесса в этой области. Теоретическое обоснование этой зависимости приводится для случая гауссовских случайных процессов.

В третьей главе свойство локальности m используется для детального анализа временных рядов. Демонстрируется возможность эффективного применения локального фрактального анализа в задаче идентификации и задаче о скорейшем обнаружении разладки. Финансовые временные ряды тестируются на наличие в них броуновской компоненты и вычисляется ее доля. Полученные результаты дают оценку обоснованности гипотезы эффективного рынка (ЕМН). Дается феноменологическое описание механизмов, приводящих к отклонению структуры временных рядов от предполагаемой в рамках ЕМН.

В четвертой главе возможности использования локального фрактального анализа демонстрируются на трех примерах задач о прогнозировании поведения фрактальных временных рядов: задаче прогнозирования значений ряда, задаче определения квантильных мер риска и задаче об определении вероятности критического поведения временных рядов. Также показывается, что флуктуации фрактальной структуры играют важную роль в поведении рядов. Так, в частности, стабильность поведения ряда в целом определяется интенсивностью его колебаний на малых масштабах.

В заключении подводятся основные итоги, а также перечисляются пути дальнейшего развития и области возможного применения изложенных в работе идей.

1. Фрактальные структуры.

Согласно одному из определений Бенуа Мандельброта [56] «Фракталом называется множество, хаусдорфова размерность которого строго больше его топологической размерности». Чтобы раскрыть это определение напомним о двух принципиально различных подходах к понятию размерности. С точки зрения первого размерность геометрической фигуры – это минимальное число координат, необходимых для определения положения лежащей на этой фигуре точки при сохранении структуры естественной близости: например положение точки на линии определяется одной координатой, на поверхности двумя, в объёме тремя координатами. Поскольку эта размерность является топологическим инвариантом (т.е. сохраняется при взаимно однозначном и непрерывном в обе стороны отображении), то ее называют **топологической** размерностью и обозначают D_T . Этот подход отражен в известных работах Пуанкаре, Брауэра, Менгера, Урысона, Лебега и др. Его вершиной стала гомологическая теория размерности Александрова [1]. С точки зрения второго подхода, размерность – это число D , выражающее связь естественной меры геометрической фигуры (например, длины, площади или объема) с величиной (в данном случае длиной), положенной в основу исходной метрической системы. Если метрический эталон такой величины, принятый за единицу, увеличить (уменьшить) в b раз, то указанная мера уменьшится (увеличится) в b^D раз. Эту размерность называют **метрической**. Источником такого определения является следующее выражение для обычной меры M (длины, площади или объема) произвольной геометрической кривой, поверхности или тела:

$$M = \lim_{d \rightarrow 0} [N(d)d^D], (D=1,2,3), \quad (4)$$

где $N(d)$ - число симплексов (отрезков, клеток или кубов) с геометрическим фактором (линейным размером) d , определяющих аппроксимацию исходного множества. На основе именно этого выражения Хаусдорф в 1919 г. предложил свое знаменитое определение размерности для случая компактного множества в произвольном метрическом пространстве [47]:

$$D = \lim_{d \rightarrow 0} [\ln N(d) / \ln(1/d)] \quad (5)$$

где $N(d)$ - минимальное количество шаров радиуса d , покрывающих это множество.

Чтобы понять мотивацию этого определения, умножим обе части (5) на $\ln(1/d)$ и введем D под знак логарифма. В результате получим: $(1/d)^D \sim N(d)$. Поскольку для покрытия, например, единичного отрезка, квадрата или куба его копиями размера d , их потребуется соответственно $1/d$, $1/d^2$ и $1/d^3$, то соответствующий показатель степени можно понимать как размерность, что и отражает формула (5). Первоначально хаусдорфово определение было предназначено для классификации различных «монстров», имеющих, как правило, нецелую размерность D , типа функций Вейерштрасса, кривых Пеано и их многочисленных разновидностей. Эти структуры возникали обычно как «контрпримеры», когда речь заходила о критике исходных принципов «классического» анализа с позиций современной математики, основанной на канторовской теории множеств. По мнению большинства математиков, такие структуры следовало рассматривать как «патологические», вроде живописи Пикассо или музыки Шёнберга, само существование которых в то время бросало вызов установленным стандартам хорошего вкуса. Однако, как оказалось, подобные структуры всегда были присущи окружающим нас объектам.

Заметим, что для обычных регулярных геометрических фигур $D = D_T$. Однако для более экзотических множеств (а именно фракталов) $D > D_T$. Следует отметить, что если исходное множество погружено в евклидово пространство, то в определении (5) вместо покрытий этого множества шарами, можно брать любые другие его аппроксимации простыми фигурами (например, клетками) с геометрическим фактором d . При этом, в зависимости от выбранного набора аппроксимаций, наряду с исходной сферической размерностью D появляются новые фрактальные размерности (клеточная, внутренняя и т.д.), которые, как предельные значения при $d \rightarrow 0$, обычно совпадают. Однако скорость сходимости к этому пределу для таких размерностей может быть весьма различной. Поскольку на практике размерность вычисляется на основе конечного числа покрытий или других аппроксимаций, то правильный выбор последних может иметь принципиальное значение.

Рассмотрим простейшие примеры фрактальных множеств, чтобы на этих примерах пояснить идею, которая станет основной при исследовании временных рядов.

1.1. Модельные фракталы.

Первый пример – это множество Кантора. Строится оно с помощью итеративной (повторяющейся) процедуры. На нулевом шаге берется единичный отрезок (рис. 1). На первом – этот отрезок делится на три равные части и выбрасывается середина. И далее на каждом следующем шаге эта процедура повторяется со всеми оставшимися отрезками. Множество, которое получается в пределе такой итеративной процедуры, называется множеством Кантора или канторовской «пылью». Для вычисления фрактальной размерности этого множества в качестве последовательности покрытий или аппроксимаций используем его представление на n -м шаге итерации. В этом случае оно будет покрыто 2^n отрезками, уменьшенными в

3^n раз. Если теперь взять $d=(1/3)^n$, то $N(d)=2^n$. Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ по формуле (1) получаем $D=\ln 2/\ln 3$ ($\approx 0,63$).

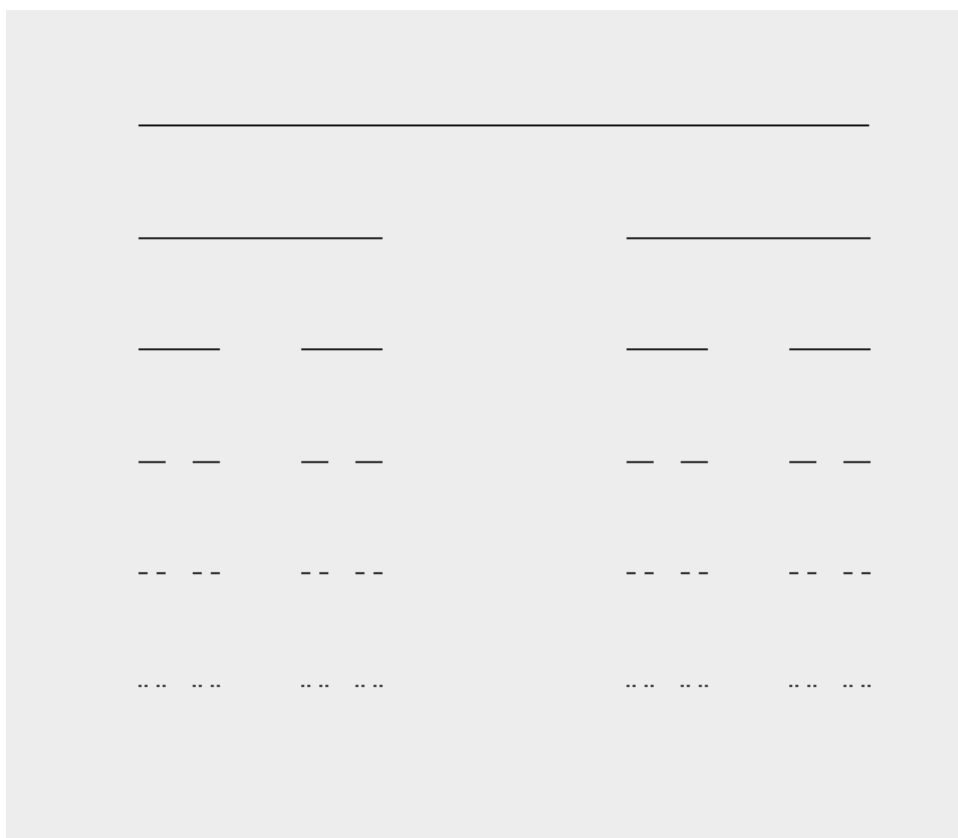


Рис. 1. Построение множества Кантора

Второй пример – это так называемая кривая Коха. Она строится так. На нулевом шаге снова берется единичный отрезок (рис. 2). На первом шаге этот отрезок снова делится на три равные части. Затем на средней части строится равносторонний треугольник и его основание выбрасывается. Далее на каждом следующем шаге повторяется та же процедура со всеми прямыми отрезками. Множество, которое получается в результате такой итеративной процедуры, называется кривой Коха. Для вычисления фрактальной размерности этого множества в качестве последовательности аппроксимаций снова удобно воспользоваться его представлением на n -м шаге итерации. И хотя такие аппроксимации не являются покрытиями, однако, именно они для данного объекта являются наиболее естественными. Полученная при этом

фрактальная размерность называется *внутренней*. Далее, повторяя для данных аппроксимаций все рассуждения, которые мы провели для покрытий (при вычислении размерности множества Кантора) получаем $D = \ln 4 / \ln 3$ ($\approx 1,26$). Попутно, заметим, что если мы в нулевом приближении возьмем не отрезок, а треугольник с единичной стороной и проделаем с каждой из его сторон описанную выше процедуру, то в результате получим множество, известное как «снежинка Коха» (рис. 3).

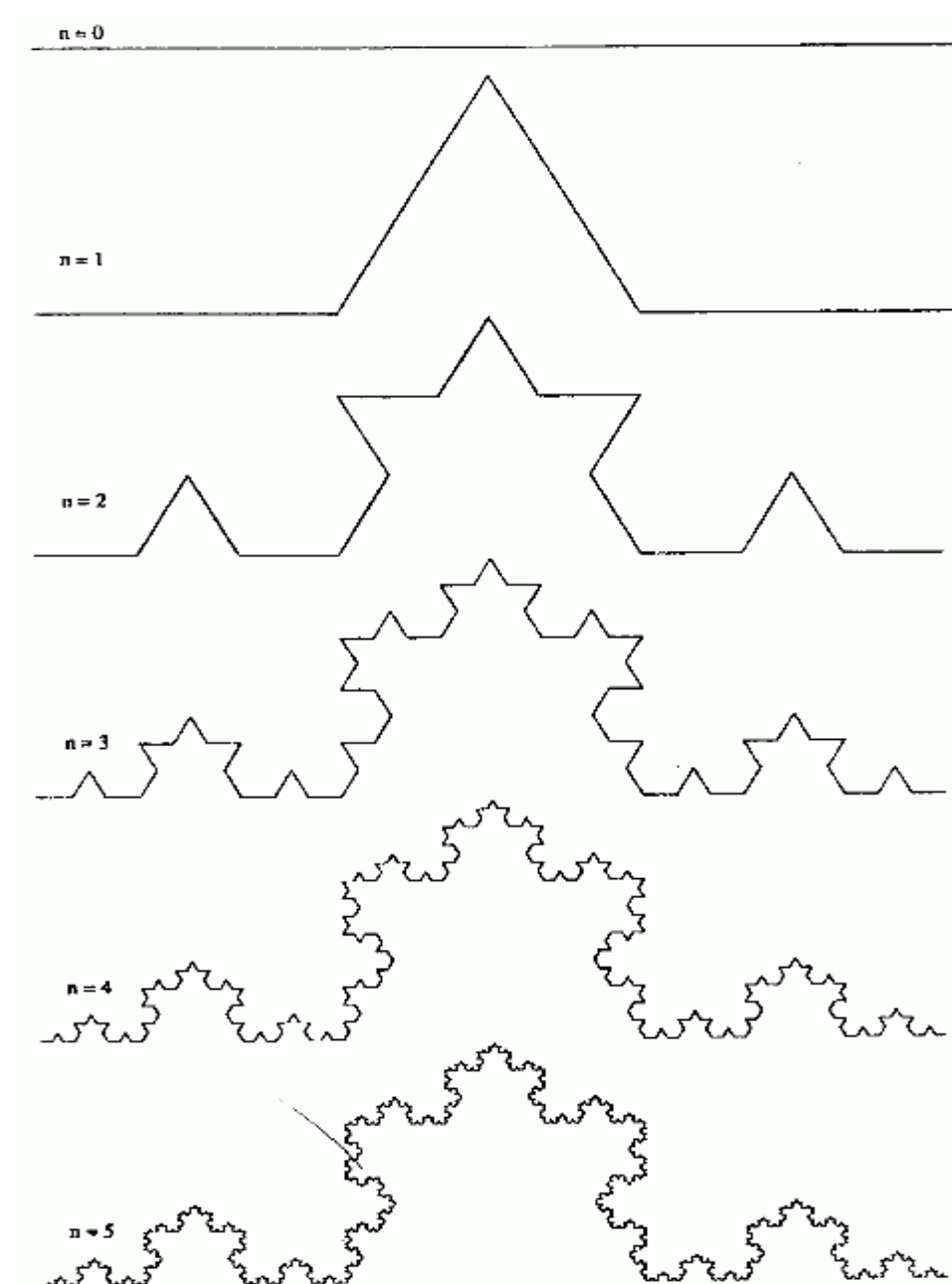


Рис. 2. Построение кривой Коха

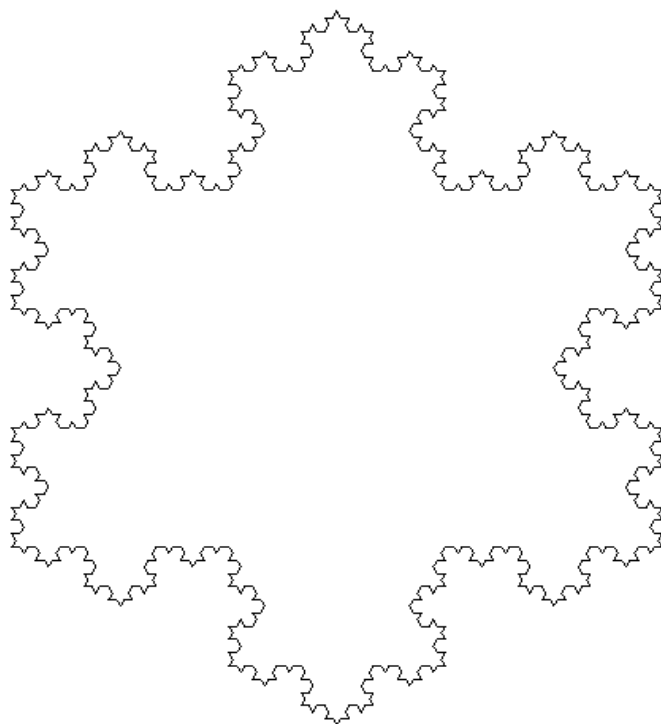


Рис. 3. «Снежинка Коха» на 4-м шаге итерации.

Заметим, что аппроксимации, которые мы использовали в рассмотренных случаях, в некотором смысле оптимальным образом приближают соответствующий фрактал на каждом шаге итерации. Именно этот факт позволяет нам получить значение D уже на первом шаге, что невозможно при использовании других аппроксимаций. Для того, чтобы пояснить это более подробно, для какого-либо из этих двух примеров построим график где по горизонтальной оси отложены значения $\ln(1/d)$ а по вертикальной – значения $\ln N(d)$ (рис.4). Поскольку в этом масштабе все степенные функции являются линейными, то степень D определяется как тангенс угла наклона соответствующей прямой. Очевидно, что при $d = (1/3)^n$ все данные будут находиться на одной прямой. Если же для вычисления D использовать другие аппроксимации, например шары из исходного определения Хаусдорфа, то получится график, который лишь асимптотически приближается к прямой. При этом если аппроксимации выбраны неудачно, то такое приближение может быть весьма медленным.

Далее при анализе временных рядов это соображение будет основным для осознания необходимости перехода к оптимальным аппроксимациям.

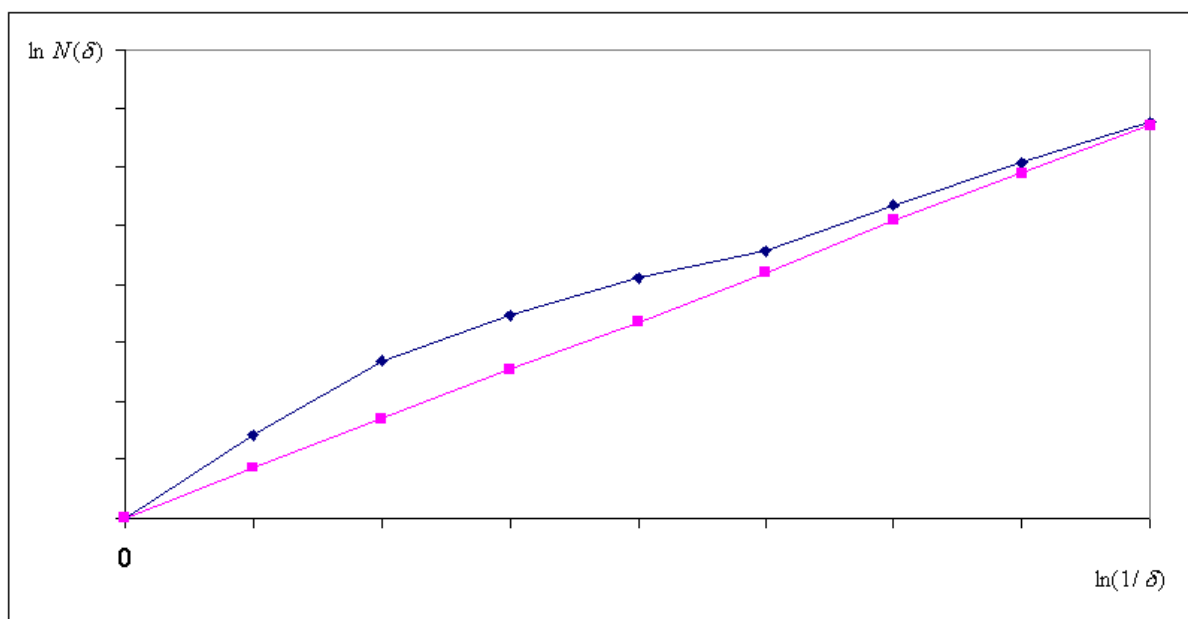


Рис. 4. Зависимость в двойном логарифмическом масштабе числа симплексов $N(d)$ составляющих аппроксимацию, от характерного размера симплекса d . Если такие аппроксимации являются предфракталами, то эта зависимость является линейной. В противном случае эта зависимость будет лишь приближаться к линейной в асимптотике при $d \rightarrow 0$.

1.2. Природные фракталы.

Перейдем теперь к естественным фракталам. Когда рассматривались примеры, подобные описанным выше, то никто не надеялся, что множества с нетривиальной хаусдорфовой размерностью могут иметь какое-либо отношение к природе. Однако очень скоро в задаче о длине береговой линии впервые была обнаружена закономерность, впоследствии осмысленная как фрактальность. Рассмотрим этот пример более подробно, тем более что он представляет исторический интерес. В работе известного английского метеоролога и картографа Ричардсона (вышедшей уже после его смерти в 1961 г.) с помощью последовательности все более точных карт измерялся

периметр береговой линии Великобритании. Данные наносились на график, где по осям x и y откладывались, соответственно, логарифмы масштабного фактора карты m и периметра $P(m)$. Результат оказался поразительным. Данные почти точно легли на прямую (рис. 5). Это означает, что благодаря «довескам», которые появляются по мере уменьшения масштабного фактора карты, периметр «расходится» (т.е. $P(m) \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow 0$) и причем по степенному закону. Отсюда следует, что береговая линия имеет фрактальную размерность. Действительно, поскольку масштабный фактор карты m прямо пропорционален минимальному различимому размеру d («разрешению» карты), то измерение периметра с помощью последовательности все более точных карт можно представлять как измерение с помощью последовательности все более точных аппроксимаций ломаными с размером звена d . Тогда выполнение степенного закона при переходе к более точным картам просто означает:

$$P(d) \sim d^{-a}, \quad (6)$$

где $P(d)$ - периметр, соответствующий разрешению d , a - константа.

Если теперь учесть, что $P(d) = N(d)d$, где $N(d)$ - число звеньев ломанной линии, аппроксимирующей периметр, то для $N(d)$ получим выражение:

$$N(d) \sim d^{-(a+1)}, \quad (7)$$

откуда сразу следует, что береговая линия - фрактал с размерностью $D = a + 1$.

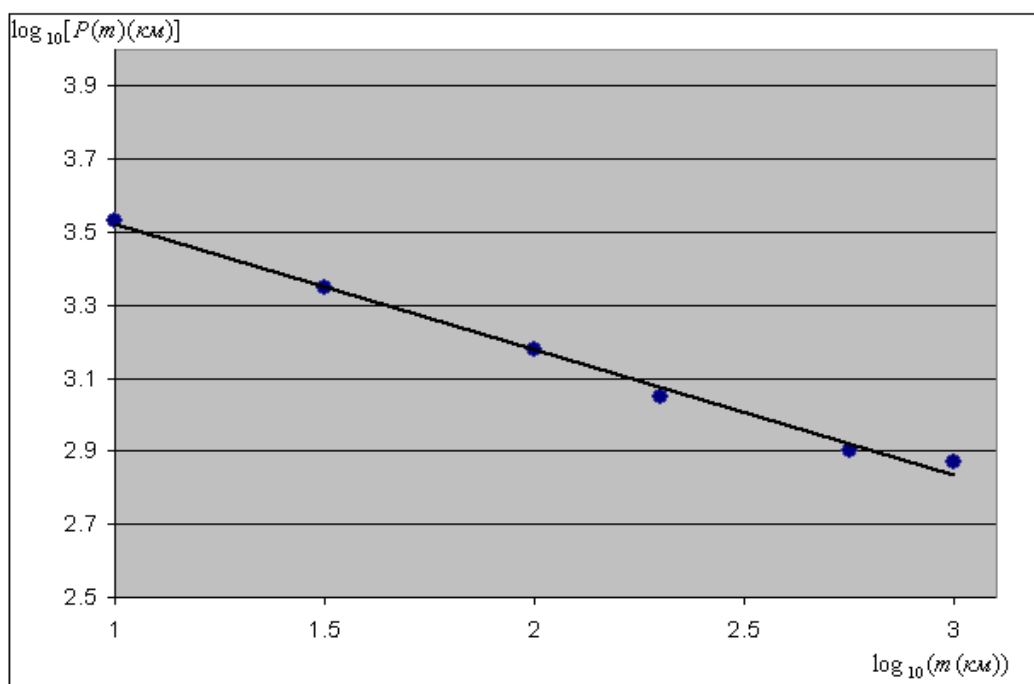


Рис. 5. Зависимость длины береговой линии $P(m)$ от масштабного фактора карты m в двойном логарифмическом масштабе.

Характеризуя природные фракталы, следует отметить, что если вещество не находится в газообразном или кристаллическом состоянии, то оно имеет на некотором интервале масштабов фрактальную структуру. При этом реальный диапазон масштабов, где она может наблюдаться, простирается от расстояний между молекулами в полимерах до расстояний между скоплениями галактик во вселенной. Наглядно фрактальность проявляется в необычном распределении массы фрактального агрегата в пространстве:

$$M(L) = (L/l)^D m, \quad (8)$$

где $D < 3$. Здесь M и L – масса и размер агрегата, m и l – масса и размер, составляющих агрегат частиц. D – так называемая **массовая** фрактальная размерность. Соответствующее выражение для плотности вещества ρ имеет вид:

$$r(L) = (L/l)^{D-D_0} r_0, \quad (9)$$

где r_0 - плотность составляющих агрегат частиц, D_0 - размерность объемлющего пространства, которая в зависимости от задачи может принимать значения 1, 2 или 3; причем всегда $D_0 \geq D$. При плотной упаковке $D = D_0$ и $r = \text{const}$.

Заметим, что для фрактальных агрегатов обычно измерению доступна корреляционная функция плотности $C(\vec{R}) = \langle r(\vec{r} + \vec{R}) r(\vec{r}) \rangle$. Фрактальность в данном случае означает

$$C(\vec{R}) \sim R^{D-D_0}, \quad (10)$$

где $R = |\vec{R}|$, $D < D_0$.

Кроме упомянутых массовой и внутренней фрактальных размерностей, так же часто используется **клеточная** размерность, которая отличается от хаусдорфовой только тем, что при ее вычислении берутся не шары а клетки (или кубы).

1.3. Фрактальность временных рядов.

Фрактальность временных рядов была, видимо, впервые описана египетским гидрологом Херстом. Он обнаружил, что для временных рядов различных естественных процессов (уровней осадков, стоков рек и т.д.) наблюдаемый нормированный размах R/S хорошо описывается эмпирическим соотношением

$$R/S = (t/2)^H, \quad (11)$$

где $R(t) = \max_{1 \leq t \leq t} \sum_{u=1}^t (x(u) - \bar{x}_t) - \min_{1 \leq t \leq t} \sum_{u=1}^t (x(u) - \bar{x}_t)$ - размах временного ряда за период t

$S = (\frac{1}{t} \sum_{t=1}^t (x(t) - \bar{x}_t)^2)^{1/2}$ - стандартное отклонение за период t

$x(t)$ - значение ряда в момент времени t

\bar{x}_t - среднее значение ряда за период t

H – т.н. показатель Херста.

Позже было показано, что временные ряды, демонстрирующие подобное поведение являются естественными фракталами, причем их размерность может быть определена по формуле $D=2-H$. В настоящее время фрактальные временные ряды изучаются в самых различных областях физики, химии, биологии, лингвистики, медицины и т.д. (см. например [79], [2-5], [13-17], [19], [21]). В частности, фрактальными свойствами обладают сейсмограммы, кардиограммы, графики изменения курсов акций.

Рассмотрим более подробно способы определения фрактальной структуры временных рядов.

Пусть $y(t)$, $t \in [0, T]$ временной процесс непрерывного времени.

Рассмотрим произвольное значение $t \in (0, T)$.

Пусть Δ - окрестность точки t .

Рассмотрим покрытие графика функции $y(t)$ на промежутке $[t - \Delta, t + \Delta] \subset [0, T]$ системой квадратов со стороной $d < \Delta$.

Определение 1. *Размерность Хаусдорфа D функции $y(t)$ на промежутке $[t - \Delta, t + \Delta]$ определяется равенством*

$$D(\Delta, t) = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{N(d)}{\ln 1/d} = 1 + \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\ln S(d)}{\ln(1/d)}, \quad (12)$$

где $N(d)$ - количество квадратов со стороной d покрытия графика функции $y(t)$ на промежутке $[t - \Delta, t + \Delta]$, $S(d)$ – площадь покрытия, $S(d) = N(d) \cdot d$.

$D(\Delta, t)$ в теории фракталов принято называть также фрактальной размерностью функции $y(t)$ на промежутке $[t - \Delta, t + \Delta]$.

Так определенная размерность $D(\Delta, t)$ является интегральной характеристикой функции на промежутке $[t - \Delta, t + \Delta]$ и зависит от длины промежутка Δ .

Определение 2. *Фрактальной размерностью функции $y(t)$ в точке t называется*

$$D(t) = \lim_{\Delta \rightarrow +0} D(\Delta, t). \quad (13)$$

Согласно теореме Хаусхолдера размерность $D(\Delta, t)$ существует для любой непрерывной функции $y(t)$. Если функция непрерывно дифференцируема, то

$$\lim_{d \rightarrow +0} \frac{\ln S(d)}{\ln(1/d)} = 0 \quad \text{и} \quad D(\Delta, t) = 1.$$

Следовательно, локальная фрактальная размерность любой непрерывно дифференцируемой функции постоянна и равна 1.

Таким образом, неравенство $D(\Delta, t) > 1$ или $D(t) > 1$ свидетельствует о наличии фрактальной структуры рассматриваемого временного процесса.

Заметим, что для любой измеримой функции, у которой существует $D(\Delta, t)$ и $D(t)$, выполнены неравенства $1 \leq D(\Delta, t) < 2$, $(1 \leq D(t) < 2)$. В частности для белого шума, (Винеровского процесса) $D(\Delta, t) = D(t) = 1.5$.

Из определения фрактальной размерности функции $y(t)$ на промежутке и фрактальной размерности в точке следует, что исследуемая функция должна быть определена на всем множестве точек промежутка $[t - \Delta, t + \Delta]$. Однако, временные процессы во многих областях самой математики и, особенно, в прикладных областях (в частности, в финансовой области) представляют собой временные ряды y_i , $i = 1, \dots, n$, где индекс i указывает на

последовательные дискретные фиксации времени, для которых известны значения исследуемого временного процесса.

Ясно, что для такого типа дискретных временных процессов теряет всякий смысл определение фрактальных размерностей согласно определениям 1 и 2.

Введем теперь аналог фрактальных размерностей, имеющих смысл для дискретных временных рядов, с помощью которых на конечном уровне дискретизации можно выявлять «фрактальную» структуру исследуемых временных рядов.

Рассмотрим сначала две разные схемы определения показателя фрактальных структур для функции $y(t)$ непрерывного аргумента $t \in [t - \Delta, t + \Delta]$, а затем дадим их аналоги для дискретных временных рядов.

Выберем в промежутке $[t - \Delta, t + \Delta]$ совокупность точек $t_0 = t - \Delta < t_1 < \dots < t_n = t + \Delta$, обозначим $d(n) = \max_{i=1, \dots, n} |t_i - t_{i-1}|$, $L_n = \sum_{i=1}^n l_i$, где l_i - длина отрезка, соединяющего на плоскости $(t, y(t))$ точки (t_{i-1}, y_{i-1}) , (t_i, y_i) ($l_i = \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$).

Таким образом, L_n - общая длина ломаной, соединяющей прямыми отрезками последовательные соседние точки $(t - \Delta, y_0)$, (t_1, y_1) , \dots , $(t + \Delta, y_n)$.

В дальнейшем предполагается, что $t_i = t_{i-1} + d$. Т.е. выбраны равномерные сетки разбиения интервала $[t - \Delta, t + \Delta]$.

Пусть количество точек неограниченно увеличивается ($n \rightarrow +\infty$) так, что $d \rightarrow 0$.

Рассмотрим предел

$$\lim_{d \rightarrow 0} L_n(d). \quad (14)$$

Заметим, что при добавлении новых точек (t_i, y_i) функционал L_n увеличивается.

Если функция не имеет фрактальной структуры, то $\lim_{d \rightarrow 0} L_n(d) = L$, где L - длина кривой, соответствующей графику функции $y(t)$.

Пусть функция $y(t)$ такова, что $L_n(d) \rightarrow +\infty$ при $d \rightarrow +0$, причем

$$L_n(d) \sim d^{-g}, g > 0, d \rightarrow 0. \quad (15)$$

Тогда функция $y(t)$ имеет фрактальную структуру, а величина $g > 0$ является её показателем и определяет степень фрактальной структуры: чем больше g , тем больше степень фрактальной структуры исследуемой функции. Величину g будем называть индексом длины.

Таким образом, индекс длины определяется равенством

$$g = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\ln L(d)}{\ln(1/d)}. \quad (16)$$

Геометрически индекс длины может быть определен как тангенс угла наклона при малых $d > 0$ в двойном логарифмическом масштабе $\ln L(d)$, $\ln(1/d)$, прямой

$$\ln L_n(d) = a + g \ln(1/d). \quad (17)$$

Заметим, что введение показателя фрактальной структуры через длину ломаной используется для определения фрактальной размерности береговой морской границы государств (см. 2.2).

Второй показатель фрактальной структуры определим, используя классическое определение вариации на отрезке.

Как и ранее, рассмотрим равномерное разбиение промежутка $[t - \Delta, t + \Delta]$ точками $t_0 = t - \Delta < t_1 < \dots < t_n = t + \Delta$ и определим $\Delta y_i(d) = |y_i - y_{i-1}|$,

$$W_y(d) = \sum_{i=1}^n |y_i - y_{i-1}|.$$

Если $y(t)$ - функция ограниченной вариации, то $W_y(d) \rightarrow V_y(t - \Delta, t + \Delta) < \infty$, где V_y - полная вариация функции на отрезке $[t - \Delta, t + \Delta]$.

Пусть функция $y(t)$ такова, что $W_y(d) \rightarrow +\infty$ при $d \rightarrow +0$, причем имеет место соотношение

$$W_y(d) \propto d^{-n}, \quad n > 0 \quad \text{при } d \rightarrow +0. \quad (18)$$

Показатель фрактальной структуры $n > 0$ назовем индексом частичной вариации.

Очевидно, что для любого фиксированного разбиения промежутка $[t - \Delta, t + \Delta]$ справедливо неравенство $V_y(d) > W_y(d)$.

Таким образом, индекс частичной вариации n определяется равенством

$$n = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\ln W_y(d)}{\ln(1/d)}. \quad (19)$$

Геометрически индекс частичной вариации n может быть определен как тангенс угла наклона при малых $d > 0$ в двойном логарифмическом масштабе $\ln W(d)$, $\ln(1/d)$ прямой

$$\ln W(d) = c + n \ln(1/d). \quad (20)$$

Рассмотрим теперь дискретный временной процесс в виде временного ряда.

$$y_1, \dots, y_n. \quad (21)$$

Ясно, что в этом случае теряет смысл введение всех вышеприведенных показателей фрактальной структуры.

Ниже приведем аналоги показателей фрактальной структуры g и n для временных рядов вида (21), основанные на использовании равенств (16) и (20) соответственно.

Итак, рассматривается временной ряд (21), который может быть частью другого временного ряда, длина которого больше, чем n .

Рассмотрим последовательность чисел $1 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_k < n$.

Проведем разбиение совокупности чисел $i=1, \dots, n$ на группы с делителем m_1 :

$$j=1: i=1, \dots, m_1; \quad j=2: i=m_1+1, \dots, 2m_1; \quad j=n_1: i=(n_1-1)m_1+1, \dots, n_1m_1, \quad \text{где} \\ n_1 = \left\lfloor \frac{n}{m_1} \right\rfloor.$$

Аналогично проведем разбиение совокупности чисел $i=1, \dots, n$ на n_2 групп $(n_2 = \left\lfloor \frac{n}{m_2} \right\rfloor)$ с делителем m_2 и т.д. вплоть до m_k .

Рассмотрим для временного ряда аналог индекса длины g , определяемого для функции непрерывного аргумента равенством (16). Соединим соседние последовательности точек

$$(0, y_1), \left(\frac{m_1}{n}, y_{m_1}\right), \left(\frac{2m_1}{n}, y_{2m_1}\right), \dots, \left(\frac{(n_1-1)m_1}{n}, y_{(n_1-1)m_1}\right), \left(\frac{n_1m_1}{n}, y_{n_1m_1}\right) \quad \text{прямыми} \\ \text{отрезками.}$$

Замечание 1. При определении индекса длины предполагается, что «график» временного ряда расположен на временном промежутке $[0, 1]$.

Обозначим $L(m_1)$ - длину ломаной, соединяющей последовательно пары соседних точек.

Имеем

$$L(m_1) = \sum_{i=1}^{n_1} \sqrt{\frac{m_1^2}{n^2} + (y_{im_1} - y_{(i-1)m_1})^2}.$$

Аналогично подсчитывается длина ломаной линии для делителя m_2 :

$$L(m_2) = \sum_{i=1}^{n_2} \sqrt{\frac{4m_2^2}{n^2} + (y_{im_2} - y_{(i-1)m_2})^2},$$

.....

$$L(m_k) = \sum_{i=1}^{n_k} \sqrt{\frac{m_1^2 n_k^2}{n^2} + (y_{im_k} - y_{(i-1)m_k})^2}.$$

Очевидно, справедливы неравенства

$$L(m_k) < L(m_{k-1}) < \dots < L(m_1).$$

Рассмотрим в двойном логарифмическом масштабе $\ln m$, $\ln L(m)$ совокупность k точек

$$(\ln m_j, \ln L(m_j)), j = 1, \dots, k \text{ (см. Рис.6)}$$

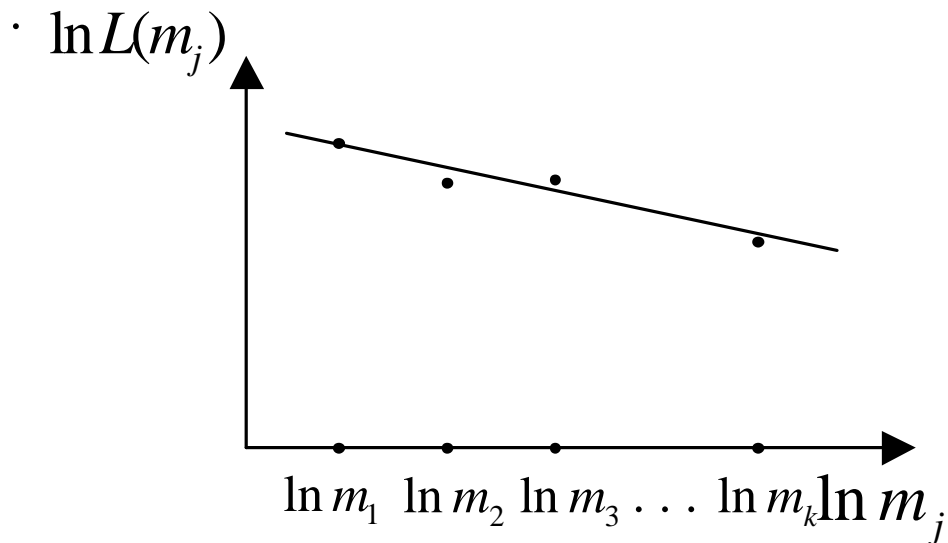


Рис. 6.

Найдем с помощью МНК прямую, аппроксимирующую совокупность точек $(\ln m_j, \ln L(m_j)), j = 1, \dots, k$.

Обозначим через $-g$ угловой показатель МНК-прямой.

Число $g > 0$ будем называть индексом длины временного ряда (21) относительно разбиения (m_1, \dots, m_k) .

Рассмотрим теперь для временного ряда (21) аналог индекса частичной вариации n , определяемого для функции непрерывного аргумента равенством (19).

Обозначим

$$W(m_1) = \sum_{i=1}^{n_1} |y_{im_1+1} - y_{(i-1)m_1+1}|,$$

$$W(m_2) = \sum_{i=1}^{n_2} |y_{im_2+1} - y_{(i-1)m_2+1}|,$$

.....

$$W(m_k) = \sum_{i=1}^{n_k} |y_{im_k+1} - y_{(i-1)m_k+1}|.$$

Справедливы неравенства

$$W(m_1) < W(m_2) < \dots < V(m_{k-1}) < V(m_k).$$

Рассмотрим в двойном логарифмическом масштабе $\ln m$, $\ln W(m)$ совокупность k точек

$$(\ln m_j, \ln W(m_j)) j = 1, \dots, k \text{ (см. Рис.7)}$$

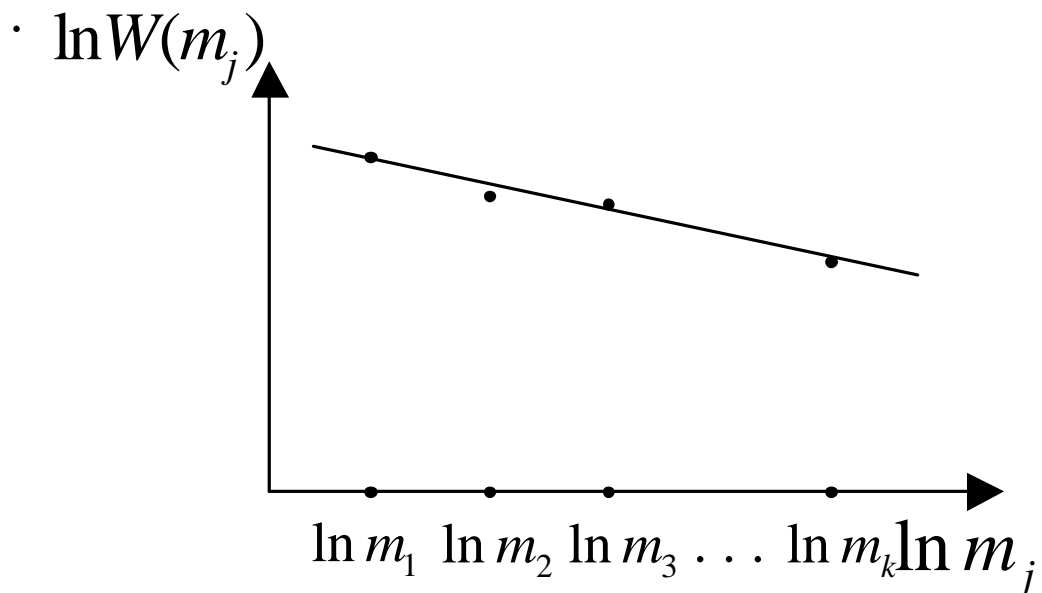


Рис. 7.

Найдем с помощью МНК-прямую, аппроксимирующую совокупность точек $(\ln m_j, \ln W(m_j)) j = 1, \dots, k$.

Обозначим через $-n < 0$ угловой коэффициент полученной МНК-прямой.

Число $n > 0$ будем называть индексом частичной вариации временного ряда (21) относительно разбиения (m_1, \dots, m_k) .

И, наконец, напомним определение показателя Херста для временного ряда (21), с помощью которого также выявляются фрактальные структуры временных рядов.

Введем обозначения

$$\bar{y}_j = \frac{1}{j} \sum_{i=1}^j y_i, \quad y_{ij} = \sum_{k=1}^i (y_k - \bar{y}_j),$$

$$R_j = \max_{i=1, \dots, j} y_{ij} - \min_{i=1, \dots, j} y_{ij},$$

$$S_j^2 = \frac{1}{j} \sum_{i=1}^j (y_i - \bar{y}_j)^2, \quad j = 2, \dots, n.$$

Зададим k целых чисел $2 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_k = n$.

Рассмотрим в двойном логарифмическом масштабе $\ln \frac{R}{S}, \ln \frac{n}{2}$

совокупность k точек

$$(\ln \frac{R_j}{S_j}, \ln \frac{n_j}{2})_{j=1, \dots, k} \quad (\text{см. Рис.8})$$

Справедливы неравенства

$$\frac{R_1}{S_1} < \frac{R_2}{S_2} < \dots < \frac{R_k}{S_k}.$$

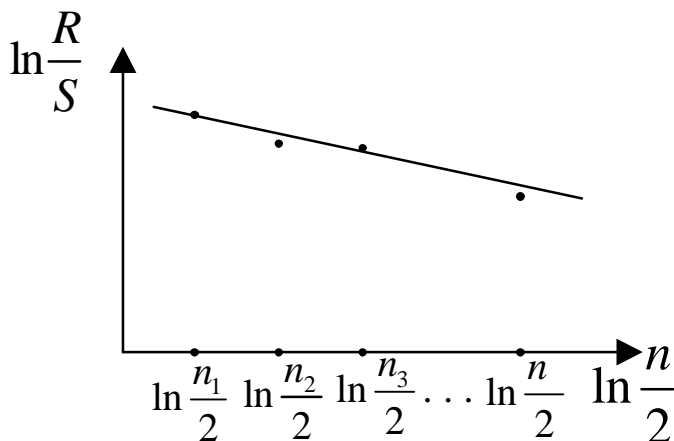


Рис. 8.

Найдем с помощью МНК прямую, аппроксимирующую совокупность точек $(\ln \frac{R_j}{S_j}, \ln \frac{n_j}{2}) j = 1, \dots, k$.

Обозначим через $H > 0$ угловой коэффициент полученной МНК-прямой.

Число $H > 0$ будем называть показателем Херста временного ряда (21) относительно разбиения (n_1, \dots, n_k) .

Замечание 1. Обычно при построении МНК-прямой в схеме Херста берут всю совокупность возможных значений $n_1 = 2, n_2 = 3, \dots, n_{k-1} = n, k = n - 1$.

Замечание 2. Если временной ряд (21) – дискретное задание процесса $y(t)$ на промежутке $t \in [0, 1]$, т.е. $y_i = y(t_i), t_i = di, d = \frac{1}{n}, i = 1, \dots, n$, то, например для Винеровского процесса, существует асимптотика

$$\frac{R_n}{S_n} = \left(\frac{n}{2} \right)^H$$

или

$$H = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{R_n}{S_n}}{\ln \frac{n}{2}}, \quad (22)$$

причем $H = 1/2$.

В случае существования предела (22) справедливо равенство $H = 2 - D$.

Вычисление показателя Херста H является на сегодняшний день одним из основных методов определения фрактальной размерности временных рядов. Исходный метод вычисления H через значения R/S весьма трудоемок, поэтому обычно для этого используется предположение степенной зависимости

$$\langle |X_{t+d} - X_t| \rangle \sim d^H \quad (23)$$

Тогда H определяется как коэффициент наклона графика функции $y = f(d) = \langle |X_{t+d} - X_t| \rangle$, построенной в двойном логарифмическом масштабе. Заметим, что вычисления показателя Херста на основе зависимости (23) совпадает с вычислением введенного ранее индекса частичной вариации. Основным недостатком этого метода является необходимость большого количества данных, поскольку оценить H с приемлемой точностью можно «...анализируя хорошо определенные наборы данных, состоящие примерно из 2500 измерений» [41]. Этот же недостаток присущ и другим способам вычисления фрактальной размерности, изложенным выше. Вычислительные свойства известных до настоящего времени способов численного определения фрактальной размерности таковы, что позволяют оценить только общие свойства временного ряда, оставляя за границами анализа его локальную структуру. В то же время для графики реальных динамических процессов могут несколько раз менять характер своего поведения внутри масштаба, необходимого для надежного вычисления D и изучение локальной структуры таких рядов представляется более важной задачей, чем изучение их общих свойств.

В заключение отметим основные особенности рассмотренных примеров фрактальных структур.

Во-первых, для естественных фракталов, в отличие от модельных фракталов свойство самоподобия выполняется, как правило, лишь «в среднем».

Во-вторых, при вычислении фрактальной размерности степенной закон проявляет себя как «промежуточная асимптотика» (т.е. при $d \rightarrow 0$ берется масштаб, малый по сравнению с некоторым характерным, но много больше некоторого минимального). При этом сама размерность вычисляется по углу наклона соответствующей зависимости в двойном логарифмическом масштабе (или масштабе относительных приростов) и часто особую роль здесь играет «искусство» правильного выбора системы аппроксимаций.

В-третьих, иногда самоподобную структуру в наиболее «чистом виде» выявляет не фрактальная размерность, а связанная с ней простым соотношением величина, которая характеризует степень «расходимости» некоторой «естественной» для данного объекта характеристики. В примере с береговой линией – это периметр, а для временных рядов – это, например, величина $\langle |X_{t+d} - X_t| \rangle$, связанная с размерностью соотношением $\langle |X_{t+d} - X_t| \rangle \sim d^{2-D}$

И, наконец, в-четвертых, особенно подробно необходимо остановиться на различиях в определении размерности модельных и естественных фракталов. Действительно, для естественных фрактальных структур все известные методы позволяют определить размерность с некоторой ошибкой, которая во многом зависит от выбранной системы аппроксимаций. В то же время для рассмотренных модельных множеств мы получаем точное значение размерности. Чтобы понять причину такого различия заметим, что при определении размерности множества Кантора и кривой Кох были использованы специфические последовательности аппроксимаций. Действительно, если мы построим график функции $S(d)$ в двойном логарифмическом масштабе для этих множеств, то получим строго прямую линию. Это является следствием того, что выбранные системы покрытий являются минимальными для данных множеств и $S(d)$ выходит на асимптотический режим, начиная с максимально возможного d . С другой стороны, если мы построим аналогичный график $S(d)$ для систем покрытий, отличных от использованных, то соответствующие точки уже не будут так хорошо ложиться на одну прямую (см. рис.4). Такое поведение функции $S(d)$ наводит на мысль, что использование минимальных покрытий может давать эффект быстрого выхода на асимптотику и для естественных фрактальных объектов, в частности графиков фрактальных функций. Ниже будет показано, что для временных рядов, характеризующих реальные хаотические процессы, это видимо действительно так.

2. Фрактальный анализ временных рядов.

2.1. Минимальные покрытия и индекс фрактальности.

Прямым способом исследования фрактальной структуры временных рядов является вычисление каких-либо фрактальных показателей, например представленных в предыдущей главе. Однако фрактальная размерность временного ряда может быть вычислена непосредственно через клеточную размерность D_c . Для определения размерности D_c плоскость, на которой определен график временного ряда, разбивается на клетки размером d и определяется число клеток $N(d)$, где находится хотя бы одна точка этого графика. Затем меняется d и в двойном логарифмическом масштабе строится график функции $N(d)$, который аппроксимируется прямой с помощью метода наименьших квадратов (МНК). Тогда D_c определяется по углу наклона этой прямой. Однако для надежного вычисления, как D_c , так и показателей H , n , g требуется слишком большой репрезентативный масштаб, содержащий несколько тысяч данных [41]. Внутри этого масштаба временной ряд, как правило, меняет характер своего поведения много раз. Чтобы связать локальную динамику соответствующего процесса с фрактальной размерностью временного ряда необходимо определить размерность D локально. Для этого необходимо найти последовательность аппроксимаций, которая при фиксированном d была бы в некотором смысле оптимальной.

Произведем некоторые преобразования (2): умножим обе части (2) на $1/d$ и введем D под знак логарифма. В результате получим:

$$N(d) \sim d^{-D} \text{ при } d \rightarrow 0 \quad (24)$$

Если теперь умножить обе части (24) на d^2 , то в данном случае определение размерности можно переписать в виде степенного закона для площади аппроксимаций $S(d)$:

$$S(d) \sim d^{2-D} \text{ при } d \rightarrow 0 \quad (25)$$

Заметим, что такая форма в отличие от (24) не требует, чтобы симплексы из которых состоит аппроксимация были одинаковыми. Достаточно того, чтобы они имели один и тот же геометрический фактор d . Это позволяет нам использовать аппроксимации, которые при фиксированном d наилучшим образом покрывают график исследуемой функции.

Действительно, рассмотрим временной ряд, или график вещественной функции одной скалярной переменной $y = f(t)$, определенной на некотором отрезке $[a, b]$. Заметим, что мы можем рассматривать этот ряд как множество точек, погруженное в двумерное евклидово пространство. Для вычисления фрактальной размерности функции мы можем непосредственно использовать процедуру определения клеточной размерности. При этом покрытие клетками можно рассматривать как частный случай покрытия прямоугольниками. Покажем, что существует более точное покрытие графика функции $y = f(t)$ из класса прямоугольников, нежели клеточное. Для этого введем равномерное разбиение отрезка

$$w_m = [a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b], \quad d = (b - a) / m,$$

и построим минимальное покрытие функции $f(t)$ в классе покрытий, состоящих из прямоугольников с основанием d (рис. 9). Тогда высота прямоугольника на отрезке $[t_{i-1}, t_i]$ будет равна величине $A_i(d)$ (разности

между максимальным и минимальным значением функции $f(t)$ на этом отрезке). Введем величину:

$$V_f(d) \equiv \sum_{i=1}^m A_i(d) \quad (26)$$

и назовем $V_f(d)$ амплитудной вариацией функции $f(t)$, соответствующей масштабу разбиения d на отрезке $[a, b]$. Тогда полную площадь покрытия $S_m(d)$ можно записать в виде

$$S_m(d) = V_f(d)d \quad (27)$$

Отметим, что $S_m(d)$ является минимальной площадью покрытия графика из класса прямоугольников. Поэтому назовем такое покрытие минимальным.

Далее из (1) следует, что

$$V_f(d) \sim d^{-m} \text{ при } d \rightarrow 0, \quad (28)$$

где

$$m = D_m - 1 \quad (29)$$

Назовем показатель m индексом фрактальности, а размерность D_m размерностью минимального покрытия. Заметим, что эти величины являются центральными в данной работе.

Чтобы соотнести D_m с другими размерностями и, в частности, с клеточной размерностью D_c , построим клеточное разбиение плоскости графика функции $f(t)$ как показано на рис. 9. Пусть $N_i(d)$ - число клеток,

покрывающих график $f(t)$ внутри отрезка $[t_{i-1}, t_i]$. Тогда из рис. 9 видно, что,

$$0 < N(d)d^2 - A_i(d)d < 2d^2 \quad (30)$$

Разделим это соотношение на d и просуммируем по i с учетом (26). В результате получим

$$0 < N(d)d - V_f(d) < 2(b-a), \quad (31)$$

где $N(d) = \sum N_i(d)$ есть полное число клеток размера d , покрывающих график функции $f(t)$ на отрезке $[a, b]$. Переходя к пределу при $d \rightarrow 0$, с учетом (28) и (29), получим:

$$N(d)d \sim V_f(d) \sim d^{-m} = d^{1-D_m} \quad (32)$$

С другой стороны, согласно уравнению (2)

$$N(d)d = S_c(d)d^{-1} \sim d^{1-D_c} \quad (33)$$

Следовательно $D_c = D_m$.

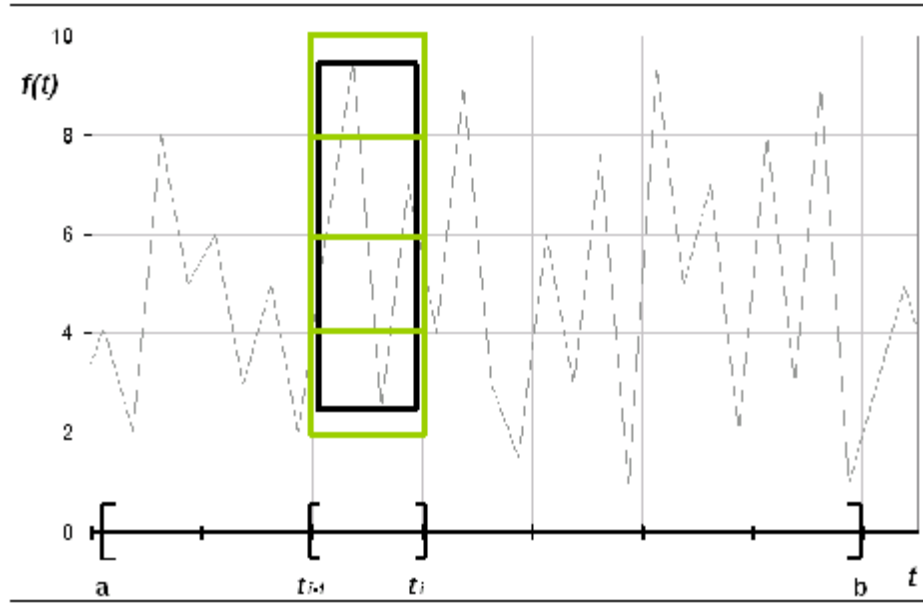


Рис. 9. Фрагмент клеточного (серый прямоугольник) и минимального (черный прямоугольник) покрытий графика фрактальной функции на отрезке $[t_{i-1}, t_i]$. Очевидно, что минимальное покрытие точнее клеточного.

Отметим, однако, что для реальных фрактальных функций минимальные и клеточные покрытия могут давать весьма различные приближения величины $S(d)$ к асимптотическому режиму (25). Покажем, что эффект от этого может быть весьма ощутимым.

Поскольку $V_f(d)$ обычно имеет быстрый выход на асимптотический режим (28) (см. следующий раздел), то соотношение (31), поделенное на d с учетом (28) может быть переписано в виде:

$$N(d) \equiv S_c(d)/d^2 = Ad^{-D} + B(d)d^{-1}, \quad (34)$$

где

$$0 < B(d) < 2(b-a), \quad D = D_c = D_m, \quad A = \text{const} \quad (35)$$

Здесь Ad^{-D} использовано вместо

$$V_f(d)/d \equiv S_m(d)/d^2 \quad (36)$$

Второе слагаемое правой части (34) является основным в области $d > d_1$, где d_1 определено из соотношения

$$d_1^m = A/B(d_1) \quad (37)$$

Поэтому ясно, что в этой области может существовать промежуточный режим со своим степенным законом, отличным от главного. Следовательно, при $d \approx d_1$ может существовать область «излома», где один степенной закон сменяется другим. Таким образом, это явление, которое весьма часто наблюдается на практике, иногда может быть связано исключительно с неточностью клеточных аппроксимаций. Кроме того, далее будет показано, что для графиков реальных временных рядов использование минимальных покрытий, вместо клеточных, позволяет существенно уменьшить количество данных, необходимое для определения фрактальной размерности и использовать индекс фрактальности m для локального анализа фрактальных временных рядов.

2.2. Общий анализ финансовых временных рядов.

В настоящее время финансовый рынок является лучшей действующей моделью совершенно конкурентного рынка¹ и в определенном смысле представляет собой идеальный пример «естественной» динамической системы. С одной стороны, он достаточно хаотичен, поскольку его эволюция определяется волей конкретных людей

¹ Напомним, что совершенно конкурентный рынок характеризуется:

- множеством продавцов и покупателей, каждый из которых полностью информирован, действует независимо и не в состоянии воздействовать на цену;
- однородностью продаваемой продукции;
- свободным входом на рынок.

(инвесторов и спекулянтов), а с другой, в нем действуют очень устойчивые закономерности, на выявлении и использовании которых и основаны, в частности, инструменты так называемого технического анализа (см. ниже). Можно ожидать, что найденные здесь закономерности имеют и более общий характер.

Характеризуя современный финансовый рынок, прежде всего, следует отметить разнообразие используемых инвесторами финансовых инструментов. Самые простые из них знакомы многим. Это валюты, облигации, акции. Такие финансовые инструменты называют базовыми. На их основе создаются более сложные, так называемые «производные» инструменты (деривативы), которые представляют собой одностороннее или двустороннее обязательство покупки или продажи базового инструмента по определенной цене к заранее определенному сроку (фьючерсы, опционы и др.). Каждой акции может соответствовать несколько сотен производных инструментов. На вершине пирамиды находятся «синтетические инвестиции» - сложные комбинации из базовых и производных инструментов, торговля которыми производится как единым активом.

Результатом работы рыночного механизма и одновременно индикатором его состояния являются цены финансовых активов. Если мы посмотрим на графики их изменений во времени, то увидим, что они крайне неупорядочены: периоды относительного покоя сменяют периоды крайней нестабильности. Резкие скачки цен вверх или вниз обычно связывают с появлением новой информации, определяющей состояние равновесия. Классической теорией функционирования финансовых рынков принято считать гипотезу *эффективного рынка* [39-40], [64], [67], [76-77], [80], которая предполагает мгновенную коррекцию цен в ответ на обновление информации и, соответственно, мгновенную реакцию действующих рационально участников рынка. Основной моделью эффективного рынка является модель броуновского движения, впервые

использованная в финансах Луисом Башелье в 1900 году [26] и получившая широкое признание только через несколько десятилетий. К тому времени утвердилось мнение о том, что в целом распределение приращений цен близко к нормальному и существенные автокорреляции в рядах приращений отсутствуют [32], [50], [70], [82]. Высшим достижением таких представлений стали удостоенные в 1997 году нобелевской премии по экономике работы Блэйка-Шоулза [29] и Мэртона [65], позволяющие точно рассчитывать справедливую цену опционов европейского типа на акции.

Одной из главных причин новых исследований поведения цен стала прокатившаяся в различных странах за последние 20 лет серия финансовых катастроф. Она разорила множество банков и инвестиционных фондов, в том числе и знаменитый LTCM, активно использовавший идеи Блэйка-Шоулза. В результате этих исследований оказалось, что те очень редкие и очень сильные колебания, которые ранее считались несущественными и отбрасывались при проверке распределений на нормальность, на самом деле являются очень важными [42], [52], [83], [86]. Отсюда следовало, что те положения, на которых строилась основная модель, были неверными.

Возможно, именно с кризисом классической теории связано возрождение в последние десятилетия интереса к техническому анализу (анализу графиков поведения цен). Его основные положения были сформулированы Чарльзом Доу еще в конце XIX века следующим образом [68]:

1. Движение цен подчинено тенденциям.
2. Начавшаяся тенденция будет продолжаться до тех пор, пока не подаст очевидных признаков смены (разворота).

Данные положения (являясь результатом обобщения эмпирических наблюдений) по существу отражают тот факт, что состояние тренда

(относительного длительного движения вверх или вниз) для цен является более естественным, нежели состояние равновесия.

Отметим, что обычно для принятия решений совместно с техническим анализом используют эконометрические модели [28], [75], [81], предполагающие зависимость цен от некоторого числа факторов, подбираемых экспериментально или экспертно. В качестве таких факторов могут быть использованы, как макроэкономические показатели (темпы прироста ВВП, уровень процентных ставок, уровень инфляции, уровень цен на нефть и т.д.) так и показатели, характерные только для данной акции.

Особое место среди работ, посвященных поведению цен, занимают работы Бенуа Мандельброта и его последователей [54-60], представляющие, главным образом, чисто теоретический интерес (см. обзор [66]). В них исследуются различные обобщения основной модели поведения рынка акций.

Напомним, что классическая винеровская модель броуновского движения основана на двух постулатах. Во-первых, приращения процесса на определенном интервале времени имеют нормальное (гауссово) распределение с нулевым средним, которое следует из центральной предельной теоремы и получается как результат суммирования достаточно большого числа независимых (или слабо связанных) случайных слагаемых с конечной дисперсией. Во-вторых, приращения на не перекрывающихся временных интервалах статистически независимы. Различные обобщения этой модели, называемой винеровским случайным процессом, состоят в отказе либо от условий независимости приращений, либо от нормальности их распределений. В первом случае получаем процессы с памятью и, в частности, обобщенное броуновское движение [58-59]. Во втором – движение Леви (Levy motion) [37-38], [55], [57], [60], имеющее бесконечную дисперсию смещения. Как в том, так и в другом случае остается неизменным положение, которое Мандельброт называет

«скейлинговым принципом изменения цен» (см. например [56], стр.465). Этот принцип можно пояснить следующим образом. Пусть $P(t)$ описывает изменение цены. Тогда $\ln(P(t))$ обладает следующим свойством: распределение ее приращения за произвольный временной интервал t (т.е. $\ln(P(t+t)) - \ln(P(t))$) не зависит от t , если не считать масштабного коэффициента. По существу этот принцип просто означает, что графики цен являются фракталами. Его эмпирическим подтверждением служит хорошо известный факт, что «... движения акций или валют внешне похожи, независимо от масштаба времени и цены. Наблюдатель не может сказать по внешнему виду графика, относятся ли данные к недельным, дневным или же часовым изменениям» [54]. Теоретически же фрактальность обычно связывают с тем, что для устойчивости рынка на нем должны присутствовать инвесторы с разными инвестиционными горизонтами (от нескольких часов до нескольких лет). Это и приводит к масштабной инвариантности (отсутствию выделенного масштаба) ценовых рядов на соответствующем временном интервале.

Не удивительно, что наиболее популярными представителями фрактальных временных функций являются финансовые временные ряды. Фрактальная структура этих рядов хорошо известна и существует надежное численное подтверждение фрактальной структуры финансовых временных рядов [25], [34], [43-44], [46], [62-63]. Теоретически же фрактальность обычно связывают с тем, что для устойчивости рынка на нем должны присутствовать инвесторы с разными инвестиционными горизонтами (от нескольких часов до нескольких лет). Это и приводит к масштабной инвариантности (отсутствию выделенного масштаба) ценовых рядов на соответствующем временном интервале [74]. С помощью индекса m нами были исследованы ценовые ряды акций тридцати компаний, входящих в индекс Доу-Джонса (Dow Jones Industrial Index) с 1970 по 2002 год. Каждый ряд содержит 8145 записей. Каждая запись соответствует одному торговому дню и содержит информацию о четырех ценах за день:

открытия, минимальной, максимальной и закрытия. В литературе финансовые ряды обычно изображают с использованием т.н. «японских свечей». Фрагмент такого ряда для компании Coca-Cola представлен на рис. 10.

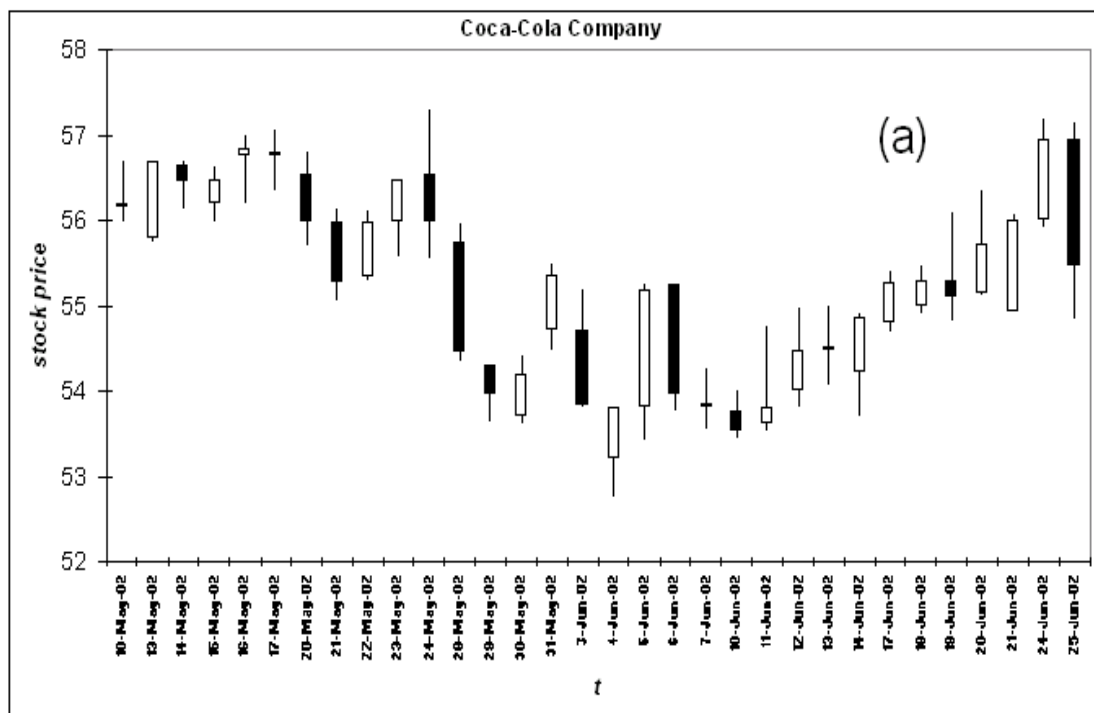


Рис. 10. В финансах графики цен принято изображать не одномерными линиями, а интервалами (т.н. баровые графики или графики в виде японских свечей). Один прямоугольник (называемый телом свечи) с двумя штрихами сверху и снизу (называемыми тенями свечи) изображает колебания цен в течение дня. Верхняя точка верхней тени показывает максимум цены, нижняя точка нижней тени – минимум цены за день. Верхняя и нижняя границы тела свечи показывают цену открытия и закрытия торгов. При этом если тело белого (черного) цвета, то закрытие выше (ниже) открытия.

Для простоты анализа ограничимся последними $2^{12}=4096$ записями для каждой компании. При вычислении индекса m мы использовали

последовательность m вложенных разбиений w_m , где $m=2^n$; $n=0,1,2,\dots,12$. Каждое разбиение состояло из 2^n интервалов, содержащих 2^{12-n} торговых дней. Для каждого разбиения w_m вычислялась амплитудная вариация $V_f(d)$ (26). Здесь $A_i(d)$ равна разности между максимальной и минимальной ценой на интервале $[t_{i-1}, t_i]$ (в частности, если $d=d_0$, то $A_i(d)$ равна разности между максимальной и минимальной ценой за день). Типичный пример поведения $V_f(d)$ в двойном логарифмическом масштабе представлен на рис.11 для компании Microsoft. Мы видим, что данные почти точно ложатся на прямую, кроме двух последних точек, где линейный режим имеет излом. Для определения значения m по этим данным следует исключить две последние точки, найти линию регрессии $y = ax + b$, с помощью метода наименьших квадратов (МНК), и отождествить $m = -a$.

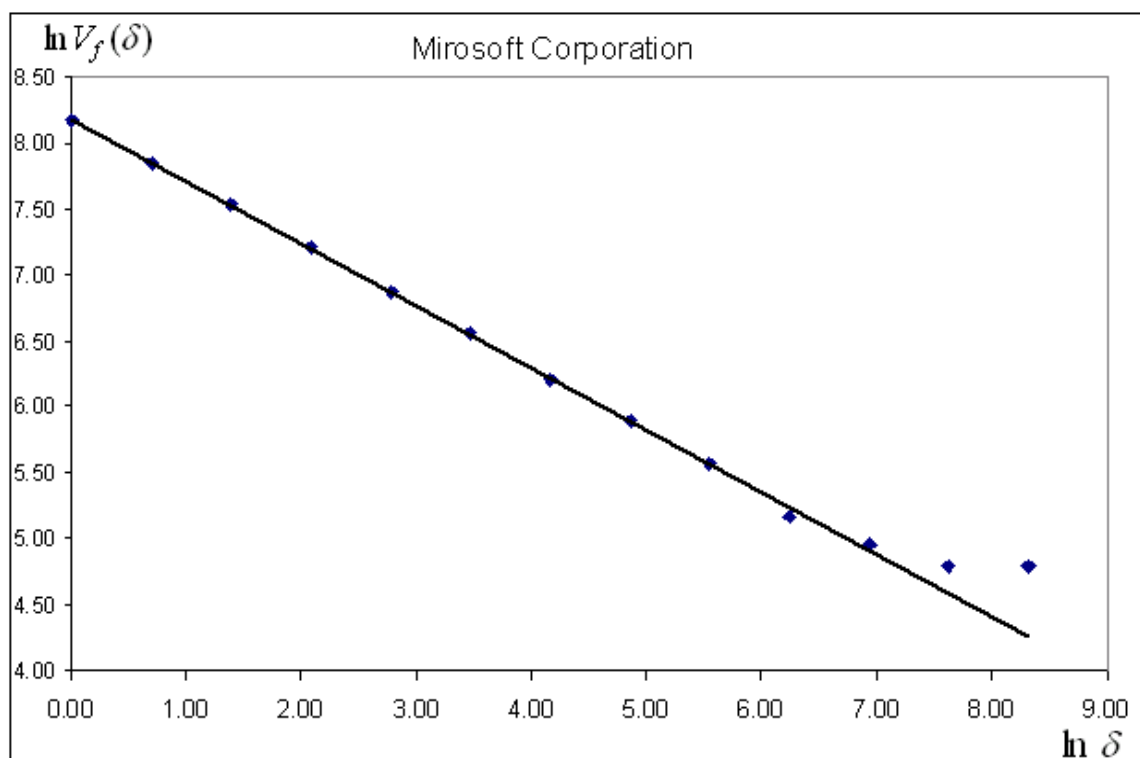


Рис. 11. Результат вычисления индекса фрактальности для временного ряда цен акций компании Microsoft на интервале 4096 дней.

Прямая $y=ax+b$ определялась методом МНК по всем точкам, исключая две последние.

При уровне надежности $\alpha = 0.95$ в приведенном примере $m = 0.472 \pm 0.008$, $R^2 = 0.999$. Здесь R^2 - коэффициент детерминации для линии регрессии. Результаты для остальных компаний следующие:

$$m_{\min} = 0.469 \pm 0.019, R^2 = 0.999 \text{ (Intel Corporation);}$$

$$m_{\max} = 0.532 \pm 0.007, R^2 = 0.997 \text{ (International Paper Company).}$$

Значение $m=0.5$ ($D=1.5$), попало в доверительный интервал только в двух случаях из тридцати (Exxon Mobil Corporation и Wal-Mart Stores, Inc), кроме того, оказалось, что только в двух случаях из тридцати значение $m > 0.5$.

Отметим, что для каждой из 30 компаний график $\ln V_f(d)$ от $\ln d$ с небольшим отклонением представляет собой прямую и на всех меньших репрезентативных интервалах вплоть до 32-х, а иногда даже до 16-ти дней. При этом на интервалах меньших, чем 500 дней излом линейной части графика, как правило, исчезает. Типичный пример $V_f(d)$ на интервале 32 дня представлен на рис. 12. При $\alpha = 0.95$ мы получаем $m = 0.571 \pm 0.071$, $R^2 = 0.992$. Напомним, что для определения показателя Херста H с приемлемой точностью требуется обычно несколько тысяч данных [41].

2.3. Сравнение точности вычисления различных фрактальных показателей для финансовых временных рядов.

Проведем исследование точности определения индекса длины, индекса фрактальности и индекса ограниченной вариации для ценовых

рядов акций тридцати компаний, входящих в индекс Доу-Джонса (Dow Jones Industrial Index) с 1970 по 2002 год. Каждый ряд содержит 8145 записей. Каждая запись соответствует одному торговому дню и содержит четыре значения: информацию о минимальной и максимальной цене, а также цены открытия и закрытия.

В качестве типичного примера полученных результатов возьмем ценовой ряд компании Alcoa Inc., которая стоит первой по алфавиту в списке индекса Доу-Джонса. Рассмотрим последовательность 32-х дневных интервалов исходного ценового ряда (состоящего из 8145 торговых дней, каждому из которых соответствует 4 значения), смещенных друг относительно друга на один день. Общее число таких интервалов $N=8145-32=8113$. Для каждого из них вычислим индекс длины g , индекс фрактальности m и индекс частичной вариации n на основе соответствующих процедур, описанных в главе 2.

В качестве критериев точности расчетов выберем:

a. абсолютную ширину доверительного интервала Δ , в который значения величин g , m и n попадает с вероятностью 0.90;

b. относительную ошибку s определения g , m и n ($s_g = \Delta_g / g$, $s_m = \Delta_m / m$ и $s_n = \Delta_n / n$);

c. $K = 1 - R^2$, где R^2 - коэффициент детерминации (если точки ложатся точно на прямую, то $R^2=1$ и $K=0$).

Для каждого из 8113 интервалов вычислим $g, \Delta_g, s_g, K_g, m, \Delta_m, s_m, K_m$ и n, Δ_n, s_n, K_n и усредним результаты по количеству интервалов.

Результаты проведенных вычислений следующие:

$$\langle \Delta_g \rangle = 0.129, \langle \Delta_m \rangle = 0.107, \langle \Delta_n \rangle = 0.411$$

$$\langle s_g \rangle = 0.655, \langle s_m \rangle = 0.241, \langle s_n \rangle = 0.796$$

$$\langle K_g \rangle = 0.094, \langle K_m \rangle = 0.015, \langle K_n \rangle = 0.245$$

Аналогичные результаты были получены и для других ценовых рядов.

Таким образом, индекс m для финансовых временных рядов определяется намного точнее, чем показатели g и n .

2.4. Сравнение индекса фрактальности с показателем Херста.

Расчет показателя Херста H является на сегодняшний день наиболее популярным способом исследования фрактальных свойств временных рядов. Поэтому проведем более детальное сравнение точности определения показателей H и m .

Показатель Херста H определяется на основе предположения, что

$$\langle |f(t+d) - f(t)| \rangle \sim d^H \text{ при } d \rightarrow 0 \quad (38)$$

где угловые скобки означают усреднение по временному интервалу. Чтобы сравнить индекс m с H , введем следующее естественное определение средней амплитуды $\langle A_i(d) \rangle$ на разбиении w_m (см. (26))

$$\langle A_i(d) \rangle \equiv m^{-1} \sum_{i=1}^m A_i(d) \quad (39)$$

Умножим (26) на $m^{-1} \sim d$ и подставим в (28). Получим:

$$\langle A_i(d) \rangle \sim d^{H_m} \text{ при } d \rightarrow 0, \quad (40)$$

где

$$H_m \equiv 1 - m \quad (41)$$

Как известно, (см., например [56]), если $f(t)$ реализация гауссовского случайного процесса, то показатель H связан с размерностью D , а следовательно и с индексом m соотношением

$$H = 2 - D_m = 1 - m \quad (42)$$

Следовательно, в этом случае $H = H_m$. Однако, реальные финансовые ряды, как правило, не являются гауссовыми (см., например [61], [78]) и поэтому H_m и H могут сильно различаться. Действительно, в формуле (40) мы имеем степенной закон для средней амплитуды функции $f(t)$ на интервале длиной d , в то время как в формуле (38) мы имеем степенной закон для средней разности между начальным и конечным значением $f(t)$ на том же интервале. В качестве примера различия в точности определения m и H на рисунках 12 и 13 представлены результаты их вычисления на основе одних и тех же данных, показанных на рисунке 10. Для $a = 0.95$ результаты оказались следующими:

$$m = 0.571 \pm 0.071, H_m = 0.429 \pm 0.071, R^2_m = 0.992$$

$$H = 0.229 \pm 0.405, R^2_H = 0.382.$$

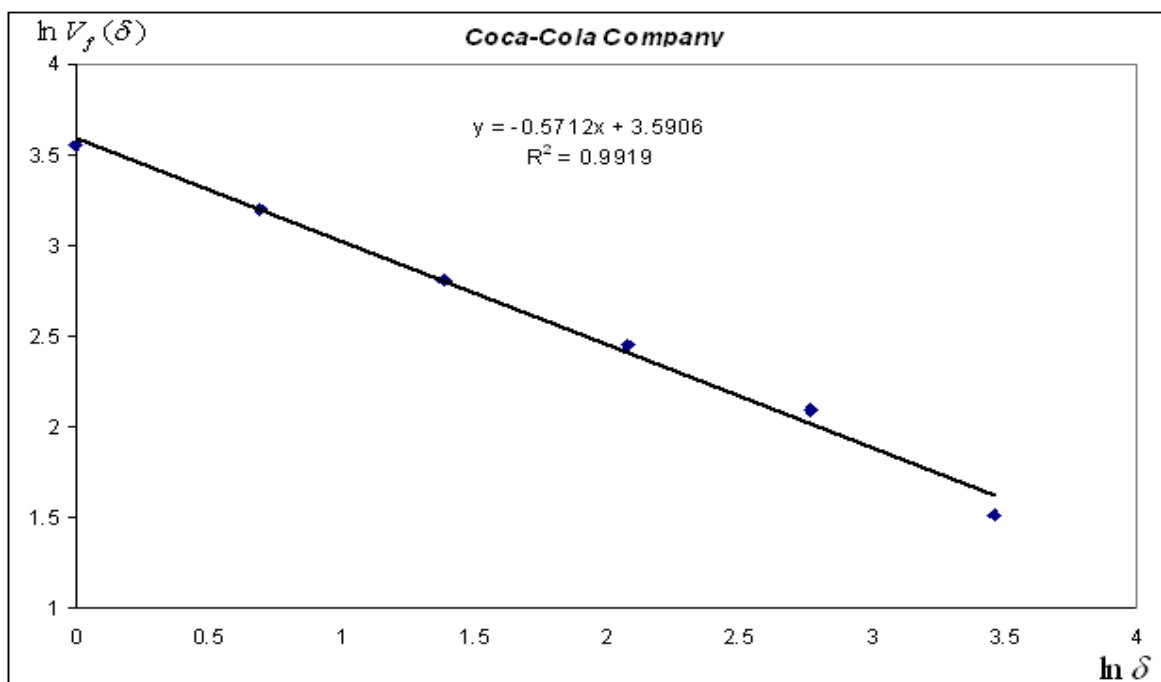


Рис. 12. Результат вычисления $V_f(d)$ в двойном логарифмическом масштабе для временного ряда, представленного на рис.6. Прямая $y=ax+b$ построена методом МНК. Для определения m следует отождествить $m=-a$.

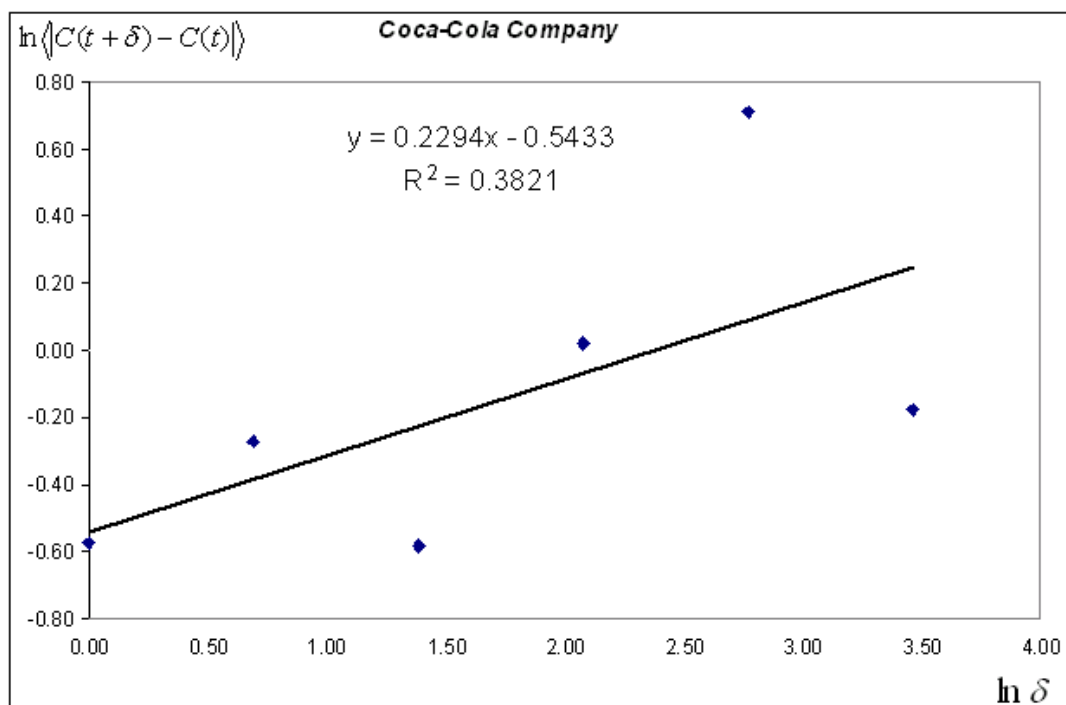


Рис. 13. Результат вычисления $\langle |C(t+d) - C(t)| \rangle$ (где $C(t)$ – цена закрытия) и соответствующей теоретической зависимости $y=ax+b$. Для определения показателя Херста следует отождествить $H=a$.

Теоретически, при одинаковом количестве данных, индекс фрактальности должен вычисляться более точно, чем показатель Херста H , поскольку для его определения используется минимальное и, следовательно, оптимальное покрытие временного ряда. Для проверки этого предположения снова рассмотрим временной ряд цен акций компании Alcoa Inc. Исходный ценовой ряд, состоящий из 8145 точек разобьем на 8113 пересекающихся интервалов длиной 32 дня, смещенные друг относительно друга на один день. В качестве критериев точности расчетов снова выберем: Δ - ширину доверительного интервала в который значение H и m попадает с вероятностью 95 % и точность экспериментальных точек теоретической прямой $K = 1 - R^2$, где R^2 - коэффициент детерминации (если точки точно ложатся на прямую, то $R^2 = 1$ и $K = 0$). Для каждого из 8113 интервалов рассчитаем:

H – показатель Херста;

m - индекс фрактальности;

Δ_H - ширину 95 % доверительного интервала для H ;

Δ_m - ширину 95 % доверительного интервала для m ;

$K_H = 1 - R_H^2$ - точность соответствия экспериментальных точек получаемой прямой для H ;

$K_m = 1 - R_m^2$ - точность соответствия экспериментальных точек получаемой прямой для m .

На основе полученных данных в одинаковых масштабах были построены графики $\Delta_H(t)$, $\Delta_m(t)$ и $K_H(t)$, $K_m(t)$. Типичные фрагменты этих графиков представлены на рисунках 14-15.

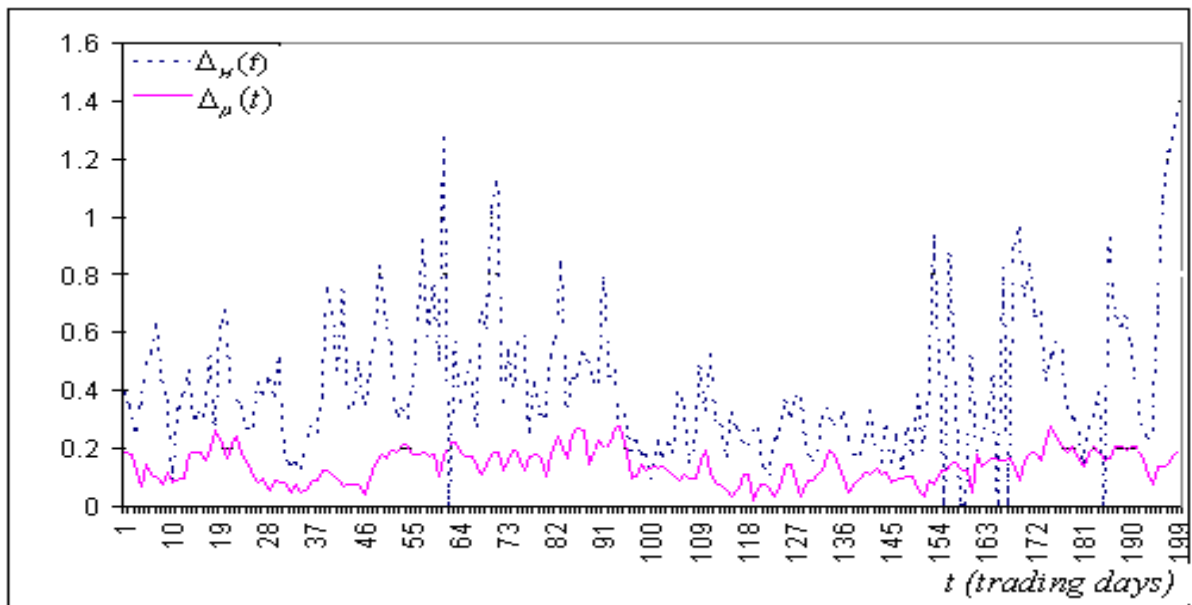


Рис. 14.

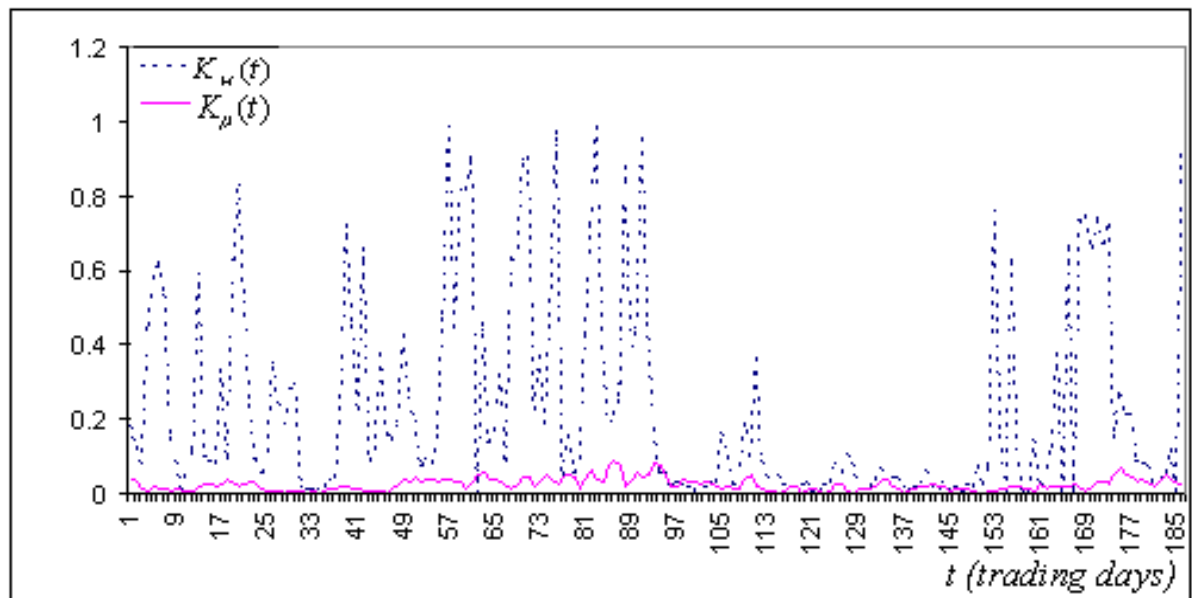


Рис. 15.

Общие результаты проведенных вычислений следующие:

$$\langle \Delta_m \rangle = 0.107, \quad \langle \Delta_H \rangle = 0.452,$$

т.е. средний доверительный интервал для m в 4 раза меньше среднего доверительного интервала для H

$$\langle K_m \rangle = 0.0147, \quad \langle K_H \rangle = 0.245,$$

т.е. средняя точность соответствия экспериментальных точек теоретической прямой для m на порядок лучше, чем для H .

Кроме этого, оказалось, что $\Delta_m < \Delta_H$ для 99 %, а $K_m < K_H$ для 91 % исследованных интервалов. Аналогичные результаты были получены и для других временных рядов цен. Таким образом, экспериментально подтверждено, что точность вычисления индекса фрактальности существенно выше точности вычисления показателя Херста.

Обобщая сказанное в этом разделе можно сделать следующие выводы:

1. Индекс фрактальности можно использовать для традиционного анализа фрактальной структуры временных рядов. В частности, результаты анализа при помощи m временных рядов цен акций компаний, входящих в индекс Доу-Джонса совпадают с традиционными результатами, согласно которым показатель Херста для этих рядов обычно больше 0.5.
2. При одинаковом количестве данных индекс m определяется в несколько раз точнее, чем показатель Херста H . При этом минимальный масштаб, необходимый для определения m с приемлемой точностью составляет несколько десятков точек, тогда как для определения H необходимо несколько тысяч данных. Этот факт позволяет использовать m в качестве локального фрактального показателя при анализе временных рядов.

2.5. Локальная фрактальная структура и устойчивость временных рядов.

Как мы видели главным преимуществом индекса m по сравнению с другими фрактальными показателями (в частности с показателем Херста H) является то, что соответствующая ему величина $V_f(d)$ имеет быстрый выход на степенной асимптотический режим. Это приводит к возможности использовать m в качестве локальной характеристики, определяющей динамику исходного процесса, поскольку репрезентативный масштаб для его надежного определения, можно считать имеющим тот же порядок, что и характерный масштаб основных состояний процесса. К таким состояниям относятся флэты (периоды относительного спокойствия) и тренды (периоды относительно длительного движения вверх или вниз). Чтобы соотнести значение m с поведением временного ряда, естественно ввести функцию $m(t)$ как значение m определенное на минимальном, предшествующем t , интервале t_m , где m еще может быть вычислено с приемлемой точностью. В случае непрерывного аргумента t это был бы произвольно малый интервал, однако, поскольку, на практике временной ряд всегда имеет минимальный масштаб d_0 (в нашем случае d_0 равно 1 день), то t_m имеет конечную длину (в нашем случае мы берем $t_m = 32$ дня). Мы определили $m(t)$ для каждой из компаний, входящих в индекс Доу-Джонса. На рис.16 представлен типичный фрагмент ценового ряда одной из таких компаний вместе с вычисленной для этого фрагмента функцией $m(t)$.

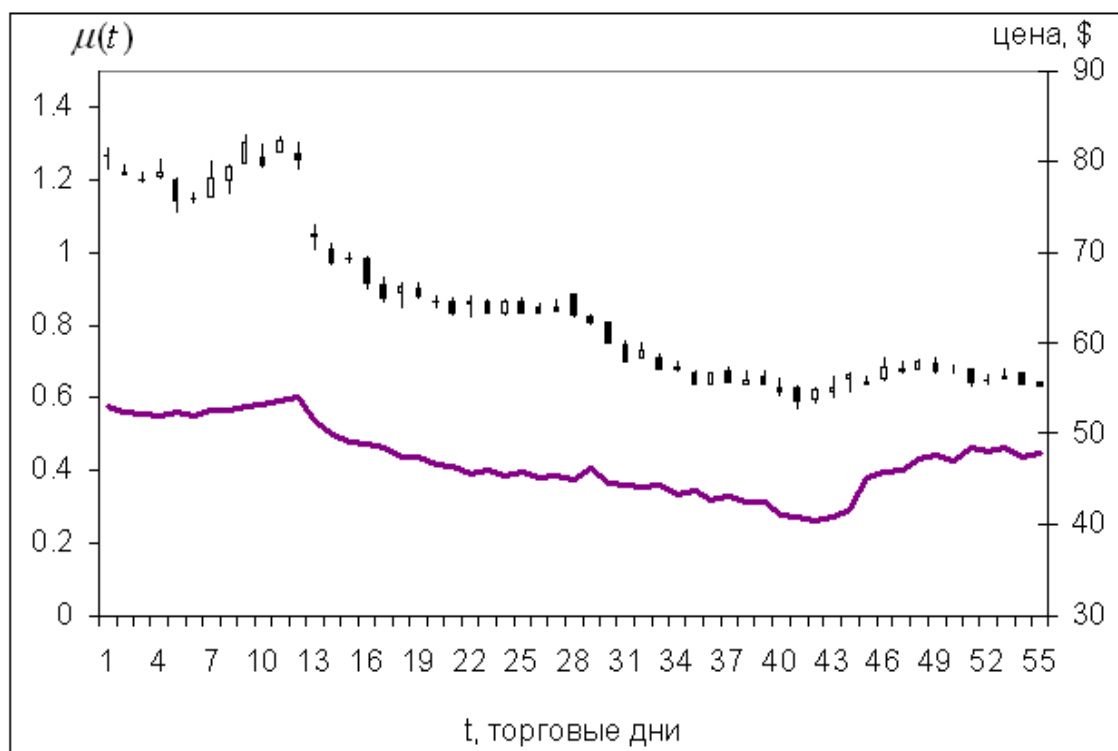


Рис. 16. Ежедневные цены акций компании General Motors (правая шкала, японские свечи) и график функции $m(t)$ (левая шкала, сплошная линия).

Достаточно беглого взгляда на рис.16, чтобы понять, что индекс m характеризует поведение временного ряда. Действительно, на интервале между 1-м и 13-м днем, где цены ведут себя относительно стабильно, $m(t)$ больше 0.5. Далее, одновременно с развитием тренда на графике цен, $m(t)$ резко падает ниже значения $m=0.5$ и, наконец, после 43-го дня, где цены находятся в промежуточном состоянии между трендом и флэтом, $m(t)$ возвращается к значению $m \approx 0.5$. Таким образом, исходный ряд оказывается тем стабильнее, чем больше значение m . При этом, если $m > 0.5$, то наблюдается флэт, если $m < 0.5$, наблюдается тренд, и, наконец, если $m \sim 0.5$, то процесс находится в промежуточном состоянии.

Теоретическое обоснование такой зависимости мы приведем для случая гауссовских случайных процессов. Мы начнем с рассмотрения винеровской модели, которая является простейшим случаем таких

процессов. Напомним, что классическая винеровская модель броуновского движения основана на двух постулатах. Во-первых, приращения процесса на определенном интервале времени имеют нормальное (гауссово) распределение с нулевым средним, которое следует из центральной предельной теоремы и получается как результат суммирования достаточно большого числа независимых (или слабо связанных) случайных слагаемых с конечной дисперсией. Во-вторых, приращения на не перекрывающихся временных интервалах статистически независимы. Из этих постулатов следует, что:

$$\langle (X(t) - X(t_0))^2 \rangle = s^2 |t - t_0|, \quad (43)$$

где угловые скобки означают усреднение, $X(t)$ и $X(t_0)$ – значения процесса, соответственно в моменты времени t и t_0 , s^2 – дисперсия за единицу времени (в финансах параметр s известен как волатильность). Из (43) можно получить, что этот процесс преобразуется сам в себя при изменении масштаба времени в b раз и одновременном изменении пространственного масштаба в $b^{1/2}$ раз. Фрактальная размерность графика реализации такого процесса $D = 1.5$. ($m = 0.5$).

Различные обобщения этой модели состоят в отказе либо от условий независимости приращений, либо от нормальности их распределений. В первом случае получаем процессы с памятью и, в частности, обобщенное броуновское движение [59]. Во втором – движение Леви (Levy motion) [77], имеющее бесконечную дисперсию смещения.

Рассмотрим модель обобщенного броуновского движения $X_H(t)$. Как известно, (см., например, [41]) обобщенный броуновский процесс имеет нулевое среднее приращение и дисперсию приращений вида

$$\langle (X_H(t) - X_H(t_0))^2 \rangle = s^2 |t - t_0|^{2H}, \quad (44)$$

где H показатель Херста, связанный с фрактальной размерностью графика реализации этого процесса D (и соответственно с индексом m) соотношением $H=2-D=1-m$ ($0<H<1$). Будем использовать для удобства систему единиц, в которой $s^2=1$ и положим $X_H(0)=0$. Тогда на основе (44) можно получить нормированную функцию корреляций прошлых приращений $-X_H(-t)$ с будущими $X_H(t)$ (см. [41]):

$$C(t) = \frac{\langle -X_H(-t)X_H(t) \rangle}{\langle X_H^2(t) \rangle} = 2^{2H-1} - 1 \quad (45)$$

При $H>0.5$ ($m<0.5$) корреляция положительна, т.е. тенденция к увеличению (положительное приращение) в прошлом означает в среднем тенденцию к увеличению в будущем, и наоборот, тенденция к уменьшению (отрицательное приращение) в прошлом означает тенденцию к уменьшению в будущем. Такой процесс называется персистентным (сохраняющим тенденцию) и его можно рассматривать как модель тренда.

При $H<0.5$ ($m>0.5$) корреляция отрицательна, т.е. в этом случае увеличение в прошлом означает вероятное уменьшение в будущем, а тенденция к уменьшению в прошлом означает увеличение в будущем. Такой процесс называется антиперсистентным и его можно рассматривать как флэт.

При $H=0.5$ ($m=0.5$) корреляция отсутствует и мы имеем промежуточное состояние между флэтом и трендом.

Таким образом, стабильность обобщенного броуновского движения определяется значением индекса m .

Для исследования связи между стабильностью финансовых временных рядов и их фрактальной структурой были построены эмпирические зависимости различных показателей стабильности от

значением индекса m . Всего было выбрано пять различных показателей стабильности:

$F_1 = \lg(C_i / C_{i-32})$, где C_i – текущая цена закрытия торгов. Чем больше разница между текущей ценой закрытия и ценой закрытия 32 дня назад, тем больше значение F_1 . Большие по модулю значения F_1 означают наличие значительного ценового движения за период в 32 дня, а маленькие – как правило, небольшие колебания цен, т.е. флэт.

$F_2 = A_i / A_{i-32}$, где A_i – амплитуда колебаний цен за последние 32 дня. F_2 определяет отношения амплитуд колебаний цен за текущий и прошлый 32-х дневные периоды. Как правило, при наличии тренда $F_2 > 1$, а при наличии флэта $F_2 < 1$.

$F_3 = s[\log(C)]$ – стандартное отклонение цен закрытия за последний 32 дня. Чем больше значение F_3 , тем более выражена тенденция в поведении цен.

F_4 – значение коэффициента наклона линии линейной регрессии, проведенной по ряду цен. Чем больше по модулю значение F_4 , тем сильнее наклон линии регрессии и, следовательно, тем сильнее выражен тренд.

$$F_5 = \frac{C_i - C_{i-32}}{\sum_{j=i-31}^i |C_j - C_{j-1}|} \quad \text{– разность между текущей ценой и ценой 32 дня}$$

назад, нормированная на сумму модулей ежедневных приращений цен за 32 дня. В случае, если за 32 дня приращение цен ни разу не меняло знак (наблюдалось направленное движение вверх или вниз) $|F_5| = 1$, если же на графике цен наблюдался флэт значение $|F_5|$ близко к нулю.

Для всех выбранных показателей стабильности справедливо следующее утверждение: чем более стабильно поведение исходного ряда (колебания происходят возле одного уровня), тем ближе значение F к нулю и наоборот, чем более выражен тренд, тем больше по модулю значение F .

Для исследования зависимостей $F_i(m)$ ($i=1..5$) исходные ряды, как и прежде, разбивались на интервалы длиной 32 дня, смещенные друг

относительно друга на 1 день. Для каждого исходного ряда, длиной 8145 дней было получено 8113 интервалов. Для каждого из них рассчитывалось значение m и значение F_1 и полученные значения наносились на точечные диаграммы, где по оси x откладывалось значение m , а по оси y значение F_1 . Типичный вид полученных диаграмм представлен на рис. 17а-е для ряда цен акций компании Alcoa Inc.

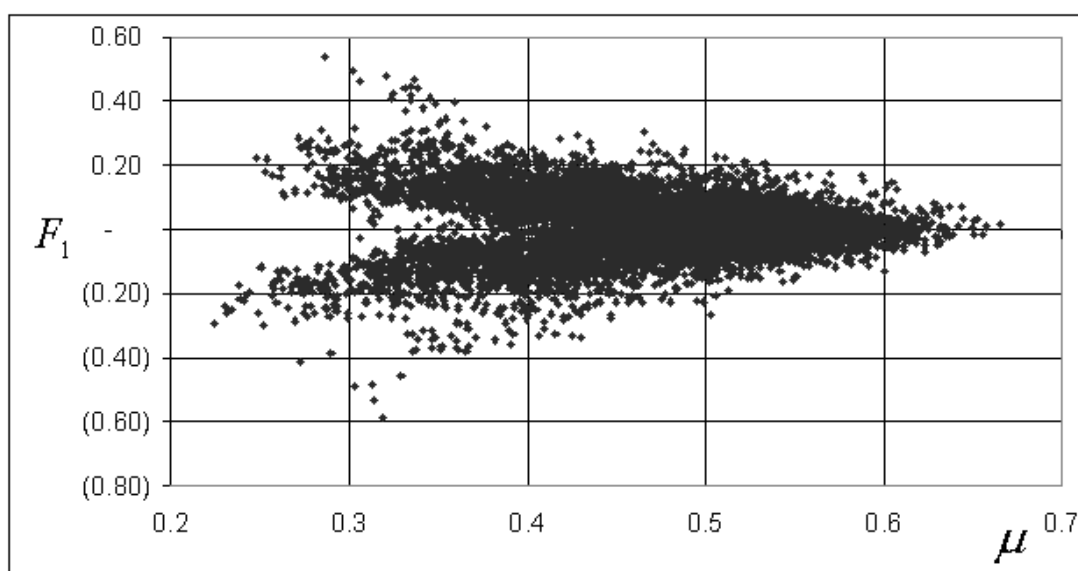


Рис. 17а.

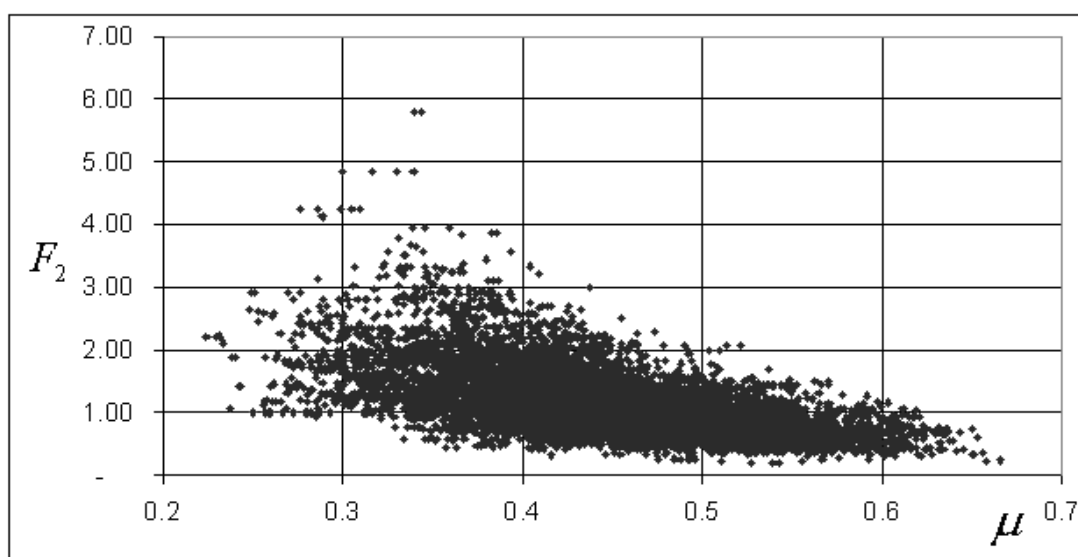
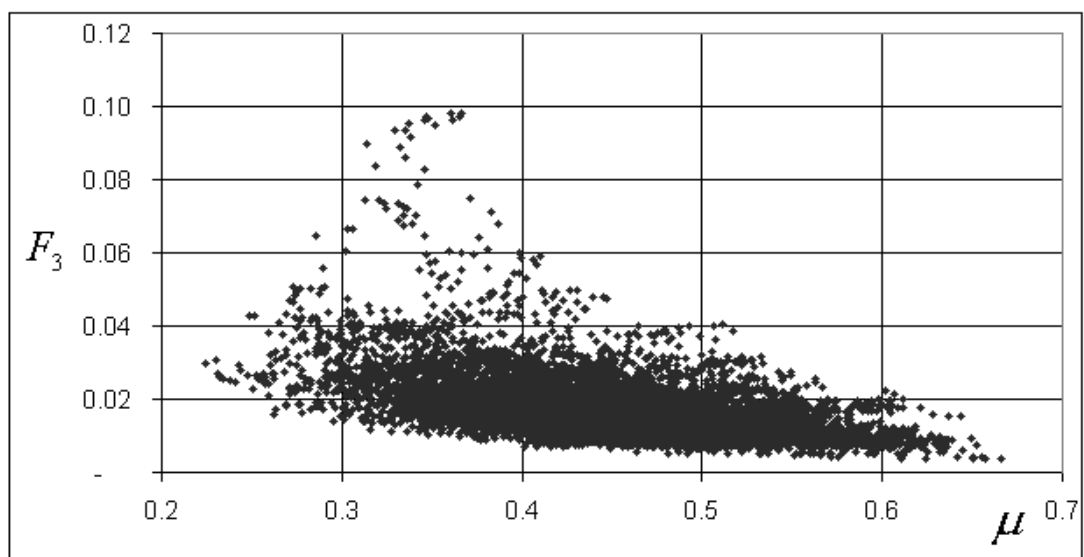
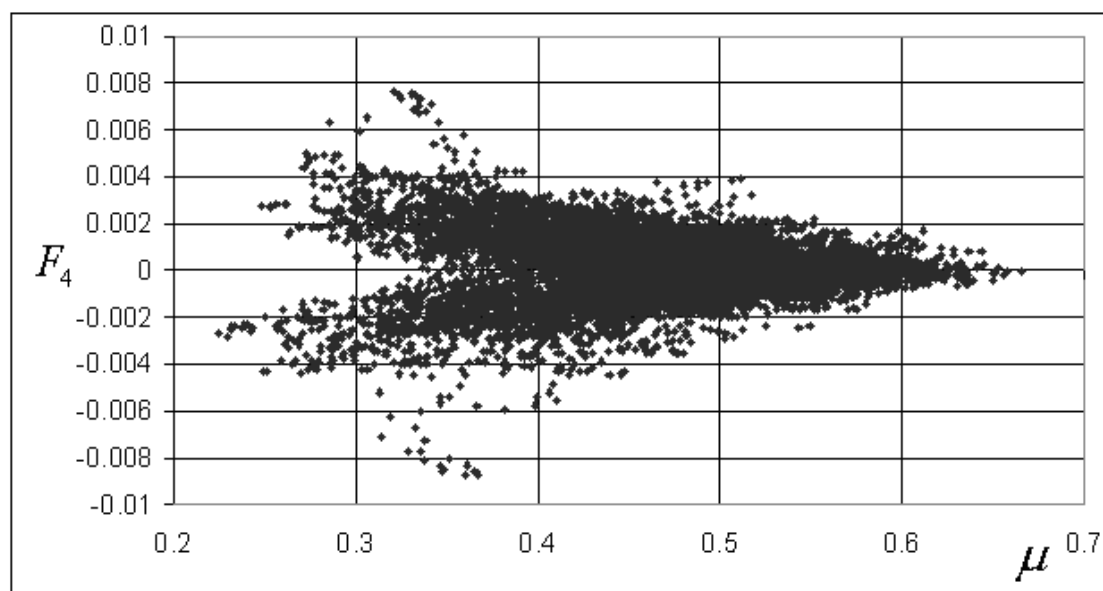


Рис. 17b.



Puc. 17c.



Puc. 17d.

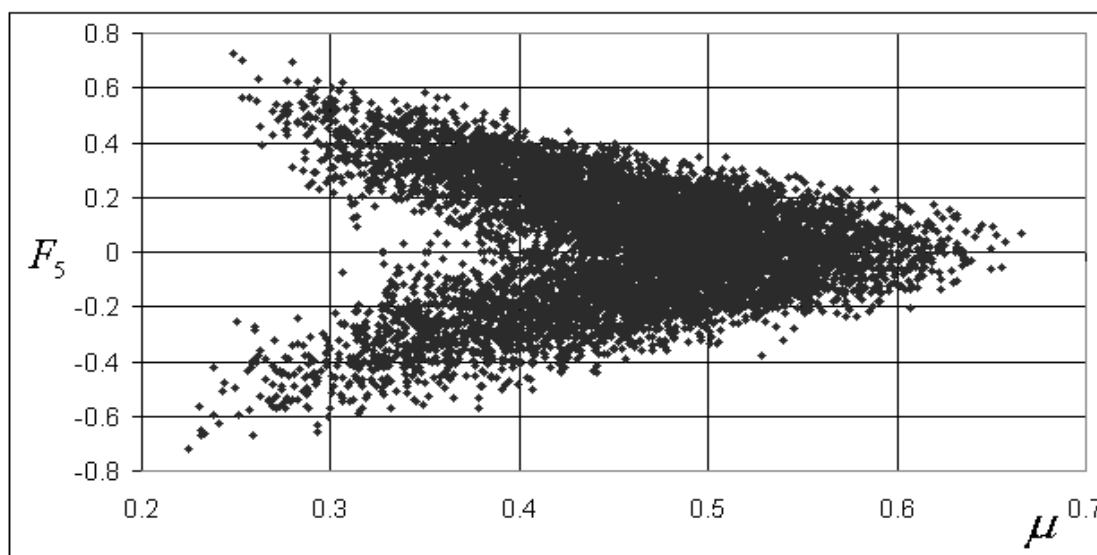


Рис. 17е

Из полученного вида диаграмм видно, что и для исследуемых временных рядов значение m связано со стабильностью ряда. При этом, чем больше значение m , тем стабильнее поведение ряда и чем меньше значение m , тем сильнее выражен тренд в исходном ряде.

Введем теперь понятие внутреннего состояния акции в момент времени t как значение показателя устойчивости $m(t)$ и попытаемся понять внутренний механизм, определяющий поведение $m(t)$ а, следовательно, поведение цены акции. Для этого используем механизм обратной связи: любая открытая система всегда действует на свое окружение и соответственно, испытывает обратное воздействие. Если при этом обратном воздействии интенсивность прямого действия возрастает, то обратная связь называется положительной (в противном случае – отрицательной). Многие скачкообразные и лавинные процессы (в т.ч. социальные и природные катастрофы) являются следствием положительной обратной связи. Отрицательная же обратная связь приводит к поддержанию устойчивого режима всевозможных открытых систем. Этот механизм известен и во многих областях экономической науки: с одной стороны при установлении равновесия (отрицательная

связь), а с другой при всевозможных переходных процессах (положительная связь). Этот механизм действует также и на рынке акций, определяя характер отклонения ценовых рядов от случайного блуждания. Принцип его работы, на наш взгляд, основан на появлении определенной связи между поведением цен и поведением инвесторов.

Для удобства будем далее использовать наряду с индексом m коэффициент $I = 0.5 - m$, который будем называть *показателем обратной связи*.

Случай $m(t)=0.5$ ($I(t)=0$) соответствует случайному блужданию цены (винеровский процесс). В этом случае инвесторы ведут себя независимо и какая-либо выраженная тенденция в поведении цен отсутствует. В этом случае будем говорить, что цена имеет «нормальную» устойчивость. Поскольку цена абсолютно пассивна по отношению к внешним воздействиям, то какая-либо «связь» отсутствует.

Случай $m(t)>0.5$ ($I(t)<0$) соответствует ситуации повышенной устойчивости цены по отношению к внешним воздействиям, что возможно связано с повышенной уверенностью инвесторов в стабильности данной компании и отсутствием новой информации на рынке. В этом случае цены акций колеблются в пределах достаточно узкого ценового диапазона. При росте цен находится достаточное количество продавцов, а при падении – покупателей, которые своими действиями возвращают цены в исходный диапазон. Очевидно, «связь» в этом случае отрицательна и ее действие «глушит» изменения цены акции, обуславливая стабильное поведение цен.

Случай $m(t)<0.5$ ($I(t)>0$) соответствует ситуации пониженной устойчивости (или инертности) цены. Обычно это связано с появлением новой информации и реакцией инвесторов на эту информацию. Поскольку в первом приближении можно считать, что все участники рынка оценивают поступающую информацию примерно одинаково, то в движении цен возникает тенденция, соответствующая полученной информации. При определенных условиях такое положение может

приводить к резкому падению или возрастанию цены акции, поскольку в этом случае начинает разворачиваться механизм положительной обратной связи. В чистом виде он действовал бы так: цены акций начинают расти (падать), но при этом появляются новые желающие купить (продать), что приводит к еще большему росту (падению) цен, и т.д. При свободном развитии подобная связь привела бы в конечном итоге к краху. Но современный финансовый рынок в целом устойчив. И эта устойчивость на наш взгляд обеспечивается не только регулируемыми структурами (центральными банками, комиссиями по ценным бумагам и т.д.), но и встроенным стабилизатором. Он представлен в лице финансовых спекулянтов, которые при малейших признаках замедления или разворота существующей тенденции начинают продавать или покупать акции («играть» против этой тенденции), выполняя тем самым функцию «глушителя» положительной обратной связи. Попутно заметим, что в самом начале развития тенденции, когда цена еще относительно стабильна, действия тех же самых спекулянтов, стремящихся быстро заработать на резких движениях цен, усиливают эту тенденцию. Иными словами можно сказать, что финансовые спекулянты «толкают» внутреннее состояние акции в сторону случайного блуждания (т.е. в сторону $m(t) \equiv 0.5$) где, как известно, уже отсутствуют арбитражные возможности.

Так в общих чертах, выглядит механизм, определяющих характер поведения ценовых рядов. В следующей главе будет проведен более детальный локальный анализ ценовых рядов и предложена модель, объясняющая специфику их поведения.

3. Локальный фрактальный анализ в задачах идентификации и разладки.

3.1. Локальные фрактальные характеристики модельных хаотических временных рядов и задача идентификации.

Важнейшей задачей исследования реальных хаотических временных рядов является выявление физического механизма, приводящего к наблюдаемому поведению временного ряда. Эта задача полностью решена только для некоторых частных случаев, например для винеровского процесса. В большинстве же случаев однозначное определение этого механизма является невозможным, поскольку, как правило, существуют несколько возможных вариантов механизмов, генерирующих статистически похожее поведение временных рядов. Более простой задачей является классификация – или отнесение наблюдаемого временного ряда к одному из известных классов хаотических временных рядов.

Наиболее известной классификацией фрактальных временных рядов является так называемая $1/f$ – классификация, или классификация по спектру Фурье временного ряда. Фурье-спектр хаотических временных рядов обычно описывается соотношением

$$A \sim 1/f^d, \quad (46)$$

где A – амплитуда, f – частота, а d – показатель в зависимости от значения которого процесс относится к одному из трех принципиально различных процессов.

При $d=0$ наблюдаемый процесс является хорошо известным белым шумом или последовательностью независимых, распределенных по нормальному закону с постоянным средним и некоторой дисперсией

случайных величин. Спектр Фурье такого временного ряда является постоянной величиной при всех значениях f .

Интеграл белого шума представляет собой другой не менее известный процесс: траекторию одномерного броуновского движения, или винеровский процесс. В этом случае $d=2$, а тип поведения называется коричневым шумом.

Белый и коричневый шумы были одними из первых случайных процессов, исследованными математиками, поэтому они хорошо изучены и их свойства описаны во всех учебниках по теории вероятности. Гораздо менее изученными, хотя и повсеместно распространенными в природе, являются т.н. розовые и черные шумы. Для первых $1 \leq d < 2$, а для вторых $2 < d \leq 3$.

В 1968 году Мандельброт и Ван Несс предположили, а в 1989 Фландрин строго доказал связь показателя d , определенного из спектра Фурье временного ряда с показателем Херста H , определенным по значениям этого же временного ряда:

$$d = 2H + 1 \quad (47)$$

Поскольку индекс фрактальности m связан с показателем H соотношением $m = 1 - H$, то связь m и d выражается следующим образом:

$$d = 3 - 2m \quad (48)$$

Очевидно, что случай розовых шумов соответствует значениям $0.5 < m \leq 1$, а коричневых значениям $0 \leq m < 0.5$.

Теперь, зная соотношения между d , H и m можно сформулировать принципиальные различия в поведении хаотических временных рядов разного типа:

При $d = 2$ ($m = 0.5$, $H = 0.5$) временной ряд является винеровским процессом или коричневым шумом. Основным свойством этого процесса

является отсутствие памяти: следующее приращение ряда не зависит от всех предыдущих.

При $1 \leq d < 2$ ($0.5 < m \leq 1, 0 \leq H < 0.5$) процесс называется розовым шумом. В таких процессах существует «отрицательная» память: если в прошлом наблюдалось положительное приращение, то в будущем с высокой вероятностью будет наблюдаться отрицательное и наоборот.

При $2 < d \leq 3$ ($0 \leq m < 0.5, 0.5 < d \leq 1$) процесс называется черным шумом и обладает «положительной» памятью: если в прошлом наблюдалось положительное приращение, то в будущем с высокой вероятностью будет также наблюдаться положительное и наоборот.

Большинство временных рядов, наблюдаемых в природе и науке, обычно можно отнести к одному из трех перечисленных выше классов. Так коричневому шуму соответствует одномерное броуновское движение (так же долго время предполагалось, что этим процессом описывается поведение цен на бирже). Розовым шумам соответствуют временные ряды, наблюдаемые в процессах турбулентности, к этому же типу поведения относятся ряды волатильности цен финансовых активов. Черные шумы регистрируются в разливах рек, солнечной активности, статистике природных и техногенных катастроф, некоторые исследователи полагают, что поведение цен акций на бирже также относится к этому классу процессов. В связи с этим становится понятной актуальность следующей задачи: по каким вычисляемым характеристикам временного ряда можно отнести его к тому или иному классу процессов? Поскольку общим свойством таких рядов является их фрактальность, то следует ожидать, что ответ на этот вопрос может дать вычисление их фрактальных характеристик.

Рассмотрим введенную нами в главе 2 амплитудную вариацию (см. (26)). Для каждой реализации $y_i = f(t)$ при $t \in [t_i, t_{i+m}]$ временного ряда она будет равна $V_y(d, y_i) = b(y_i)d^{-m(y_i)}$,

где $b(y_i)$ и $m(y_i)$ константы, зависящие от типа временного ряда и от конкретной реализации этого ряда. Можно ожидать, что при большом числе реализаций среднее расчетное значение $m(y_i)$ будет стремиться к теоретическому значению m , определяющему тип ряда, а $b(y_i)$ будет стремиться к константе, определяемой характеристиками распределения приращений временного ряда.

Исследуем поведение расчетных характеристик $m(y_i)$ и $b(y_i)$ для модельных рядов, соответствующих различным типам шумов.

Начнем с простейшего случая коричневого шума. Для его моделирования воспользуемся генератором последовательности случайных величин распределенных по нормальному закону со средним 0 и дисперсией 1 из программного пакета Microsoft Excel. Сгенерируем последовательность из 40000 случайных величин и просуммируем их нарастающим итогом для получения модели коричневого шума. Типичный результат такого моделирования представлен на рис. 18.

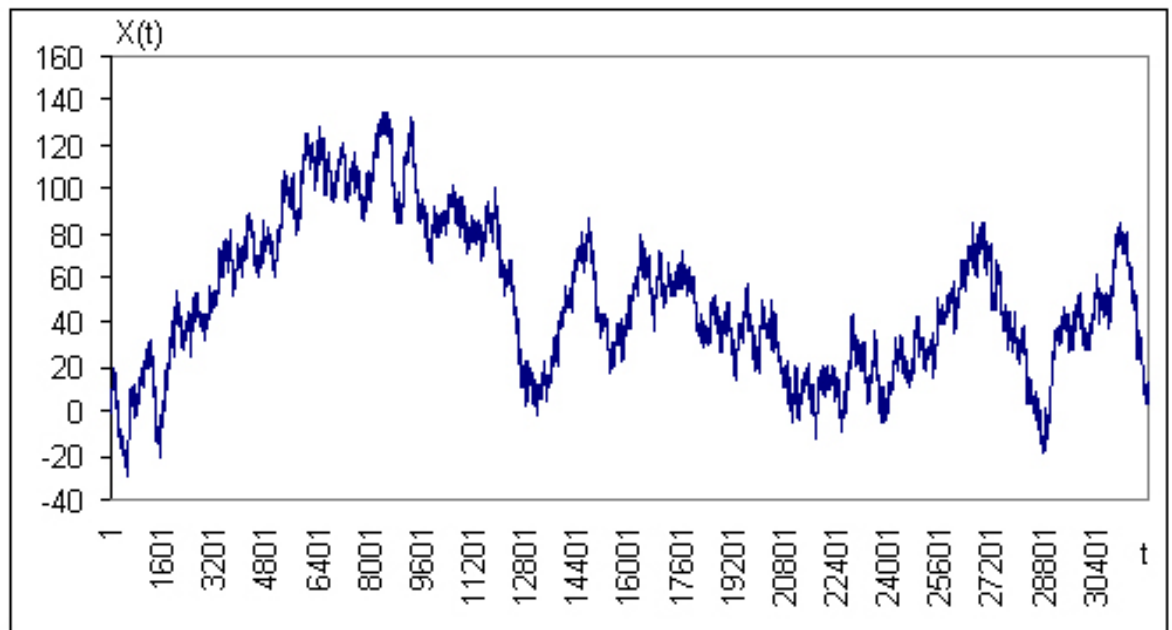


Рис. 18: Смоделированная траектория коричневого шума.

Поскольку для определения индекса фрактальности m желательно иметь минимальное и максимальное значение функции на минимальном

интервале разобьем полученный ряд на непересекающиеся отрезки длиной 100 точек и вычислим для них начальное, максимальное, минимальное и последнее значение, как это принято в финансах. Таким образом, получим ряд из 400 точек в формате японских свечей (см. главу 2). На рисунке 19 представлен результат такой процедуры примененной к исходному смоделированному ряду (рис.18).

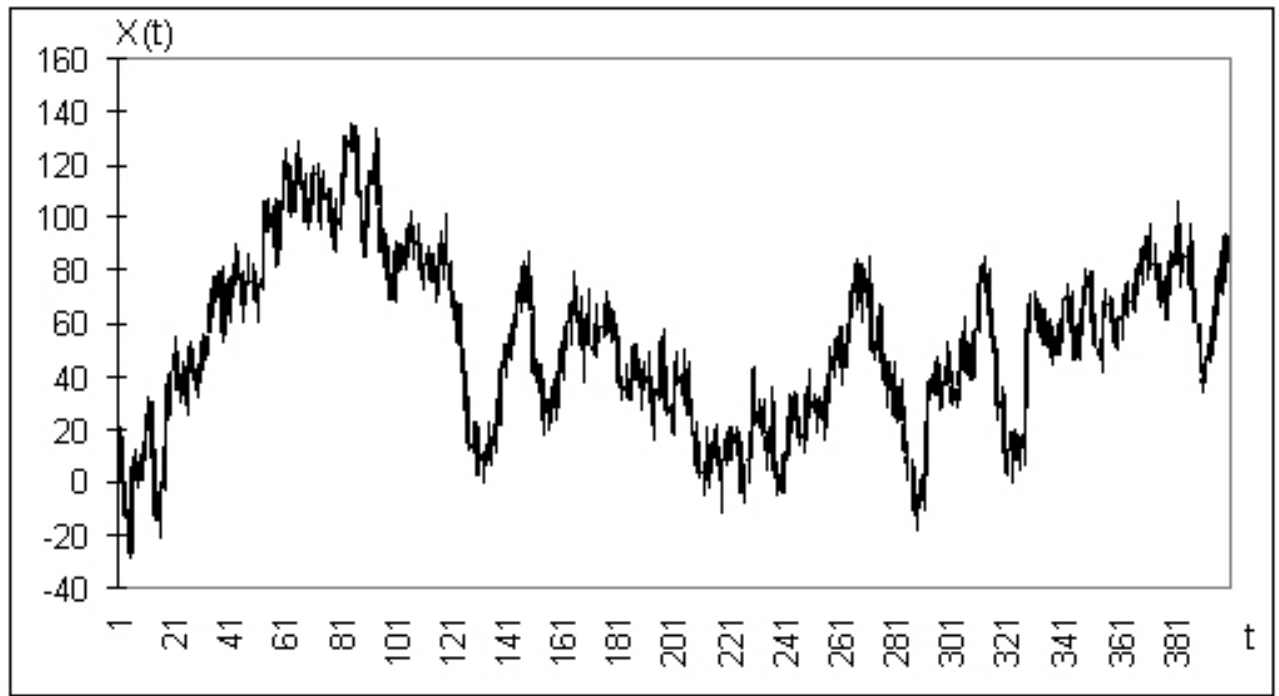


Рис. 19: Ряд случайного блуждания в формате «японских свечей».

Применим теперь к полученному ряду процедуру вычисления $m(t)$ по 32 точкам, описанную в главе 4. Разобьем ряд на пересекающиеся интервалы длиной 32 точки, смещенные друг относительно друга на 1 точку (т.е. всего получим 368 интервалов) и для каждого из них рассчитаем значение $m(t)$ и $b(t)$. По полученным массивам значений рассчитаем следующие характеристики:

$\langle m(t) \rangle$ и $\langle b(t) \rangle$ - средние значения m и b ,

$m_{\max}, m_{\min}, b_{\max}, b_{\min}$ - максимальные и минимальные значения m и b , а также

величины: $dm = \frac{0.5(m_{\max} - m_{\min})}{\langle m(t) \rangle}$ и $db = \frac{0.5(b_{\max} - b_{\min})}{\langle b(t) \rangle}$, характеризующие

разброс значений (вариабельность) $m(t)$ и $b(t)$. Повторив описанные вычисления несколько раз (в данном случае 20 раз) рассчитаем средние значения $\langle m(t) \rangle$, $\langle b(t) \rangle$, $\langle dm \rangle$ и $\langle db \rangle$ по всем полученным реализациям. Полученные таким образом значения дадут представление о поведении локальных фрактальных характеристик m и b для коричневого шума.

В результате проведенных вычислений для коричневого шума были получены следующие значения:

$$\langle m(t) \rangle = 0.499$$

$$\langle b(t) \rangle = 6.176$$

$$\langle dm \rangle = 0.175$$

$$\langle db \rangle = 0.015.$$

Полученное среднее значение m оказалось очень близким к теоретическому значению 0.5, однако, как видно из значения $\langle dm \rangle$ для каждой конкретной траектории, длиной 32 точки, $m(t)$ может достаточно сильно (до 17,5 %) отклоняться от 0.5. Поведение показателя $b(t)$ оказалось гораздо более стабильным: его локальные значения отклоняются от среднего не более чем на 1.5 %.

Таким образом, значения локальных фрактальных показателей m и b для модельных рядов, соответствующих процессам коричневого шума следующие: в среднем значение индекса фрактальности близко к теоретическому значению 0.5, при этом отклонения локальных значений от среднего могут доходить до 18 %, значение показателя b , определяемого

свойствами ряда приращений более стабильно (отклонения от среднего не превышают 1.5%).

Перейдем теперь к процессам, соответствующим классу розовых шумов. Для их моделирования Шредер в 1991 году предложил следующую формулу, состоящую из трех компонент:

$$X_n = \sum_{k=0}^2 X_n(k), \quad (49)$$

где

$$X_n(k) = r(k)X_{n-1}(k) + e\sqrt{1-r(k)^2}, \quad (50)$$

$$r(k) = \exp(-1/10^k), \quad (51)$$

а e - равномерно распределенное случайное число. Смысл этой модели состоит в том, что итоговая последовательность является суммой трех периодических случайных последовательностей с различными периодами. Теоретически розовый шум состоит из суммы бесконечного числа таких последовательностей с возрастающими периодами, но для моделирования оказывается достаточно трех слагаемых [18]. Фрагмент временного ряда, полученного с помощью (50) приведен на рис. 20.

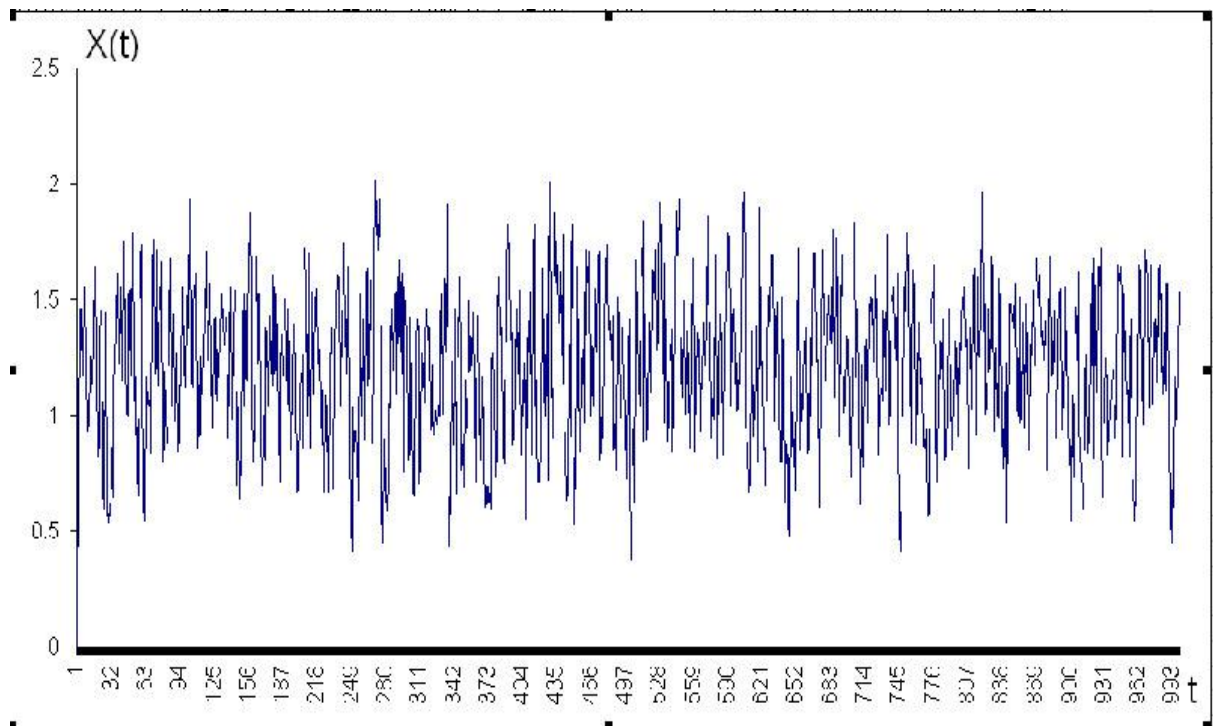


Рис. 20. Розовый шум.

Используя (50) смоделируем теперь 20 последовательностей и применим к ним процедуру расчета фрактальных показателей, описанную выше. Получим следующие результаты:

$$\langle m(t) \rangle = 0.917,$$

$$\langle b(t) \rangle = 3.824,$$

$$\langle dm \rangle = 0.016,$$

$$\langle db \rangle = 0.007.$$

Как видно для розовых шумов оба фрактальных показателя ведут себя чрезвычайно стабильно. Отклонения от средних значений не превышают 1.6 % для m и 0.7 % для b .

Для моделирования черного шума воспользуемся моделью ARFIMA, предложенной Хоскингем в 1981 году [48]. Согласно этой модели

$$\left\{ \begin{array}{l} X_n = X_{n-1} + a_n \\ a_n = \sum_{k=0}^{\infty} y_k e_{n-k} \\ y_0 = 1 \\ y_k = \frac{\Gamma(k+d)}{\Gamma(k+1)\Gamma(d)}, k \geq 1 \\ e - \text{белый шум} \end{array} \right. \quad (52)$$

Здесь черный шум получается из белого путем добавления слагаемых с «бесконечной памятью», при этом значение d оказывается связанным с показателем Херста полученного процесса соотношением $d=H-0.5$. Как видно из (52) для получения на каждом шаге моделирования значений a_n необходимо суммировать бесконечное количество предыдущих значений ряда (в каждой конкретной модели – все предыдущие значения ряда, начиная с самого первого). Однако вычисление Γ -функции при больших значениях аргумента, как правило, невозможно. Поэтому ограничимся при моделировании суммой предыдущих 100 членов ряда. На рис. 21 приведен фрагмент ряда, полученного с помощью (52) для значения $d=0.4$.

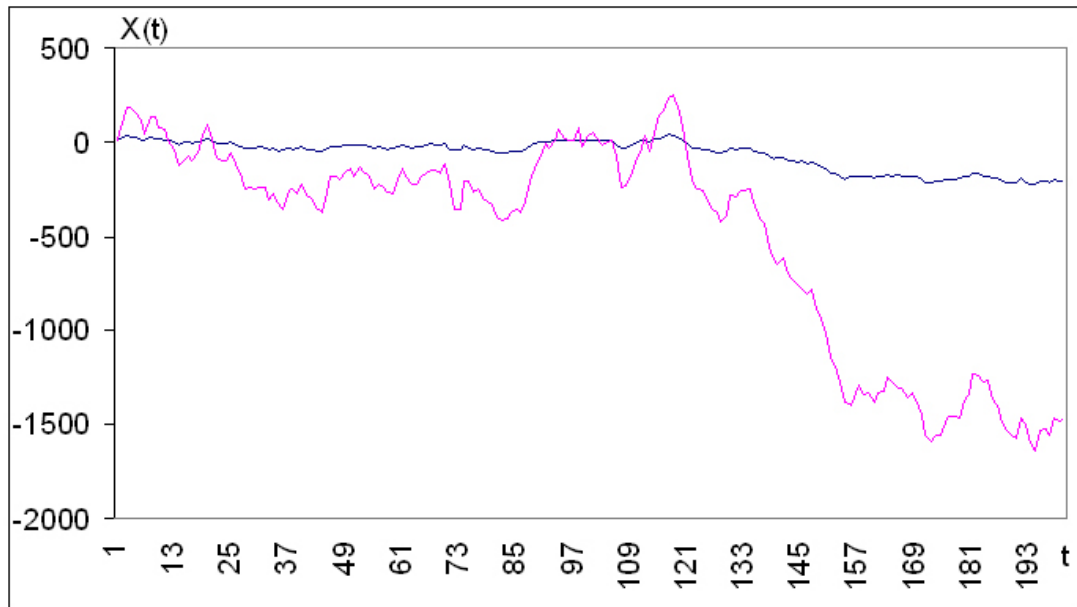


Рис. 21. Черный шум (розовая линия) с показателем $d=0.4$ ($H=0.9$, $m=0.1$), полученный из белого шума (синяя линия) с помощью модели Хоскинга.

Проведем моделирование черного шума для разных значений d , используя в качестве белого шума последовательность случайных величин, распределенных по нормальному закону со средним 0 и дисперсией 1, и рассчитаем локальные фрактальные характеристики. Получим следующие результаты:

Для $d=0.1$ ($H = 0.6$, $m = 0.4$):

$$\langle m(t) \rangle = 0.415;$$

$$\langle b(t) \rangle = 6.465;$$

$$\langle dm \rangle = 0.215;$$

$$\langle db \rangle = 0.021.$$

Для $d=0.25$ ($H = 0.75$, $m = 0.25$):

$$\langle m(t) \rangle = 0.327;$$

$$\langle b(t) \rangle = 7.011;$$

$$\langle dm \rangle = 0.257;$$

$$\langle db \rangle = 0.018.$$

Для $d=0.4$ ($H = 0.9$, $m = 0.1$):

$$\langle m(t) \rangle = 0.273;$$

$$\langle b(t) \rangle = 11.33;$$

$$\langle dm \rangle = 0.371;$$

$$\langle db \rangle = 0.022.$$

Из полученных результатов можно сделать несколько выводов.

Во-первых, среднее значение m оказывается несколько выше теоретического. Особенно сильно различие заметно для больших значений d (соответственно низких значений m). Возможно это различие можно объяснить тем, что при моделировании учитываются не все предыдущие значения ряда, а только 100 последних.

Во-вторых, вариабельность локальных значений m оказывается высокой, причем с увеличением d (уменьшением теоретического значения m вариабельность возрастает).

В-третьих, среднее значение показателя b возрастает с ростом d (уменьшением теоретического значения m). Однако вариабельность b остается постоянной и низкой, примерно соответствуя вариабельности b для белого шума. Поскольку в модели в качестве исходной последовательности берется белый шум, увеличение b при уменьшении d означает, что для коричневого шума значение b зависит не только от исходных параметров распределения приращений, но и от значения m .

Обобщим теперь полученные численные результаты в виде, представив их в виде таблицы с описанием поведения локальных фрактальных характеристик для различных видов фрактальных временных рядов (см. таб. 1).

Таб. 1. Поведение локальных фрактальных показателей для различных типов фрактальных хаотических временных рядов.

Тип поведения временного ряда	Среднее значение m , рассчитанного по 32-м точкам	Среднее значение b , рассчитанного по 32-м точкам	Вариабельность m	Вариабельность b
Коричневый шум (винеровский процесс)	Близко к 0.5	Зависит от дисперсии распределения приращений	Высокая (порядка 17 %)	Низкая (порядка 1.5 %)
Розовый шум (антиперсистентные процессы)	Больше 0.5	Зависит от дисперсии распределения приращений	Низкая (порядка 1.5 %)	Низкая (менее 1 %)
Черный шум (персистентные процессы)	Меньше 0.5	Зависит от дисперсии распределения приращений и от среднего значения m	Высокая (больше, чем для коричневого шума) и растет с уменьшением среднего	Низкая (порядка 1.5 %)

			значения m	
--	--	--	--------------	--

Полученные результаты можно использовать при идентификации типа поведения реальных временных рядов. Продемонстрируем это на двух примерах.

Первый пример – это временные ряды интенсивности потоков мюонов, полученные В.В. Борогом на мюонном годоскопе-томографе, входящем в состав экспериментального комплекса НЕВОД, установленном в МИФИ [6]. Установка работает непрерывно, начиная с 1998 года. Замеры интенсивности потока мюонов проводятся каждую минуту. Таким образом, временной ряд за каждый день наблюдения содержит 1440 значений. Фрагмент такого временного ряда представлен на рис. 22

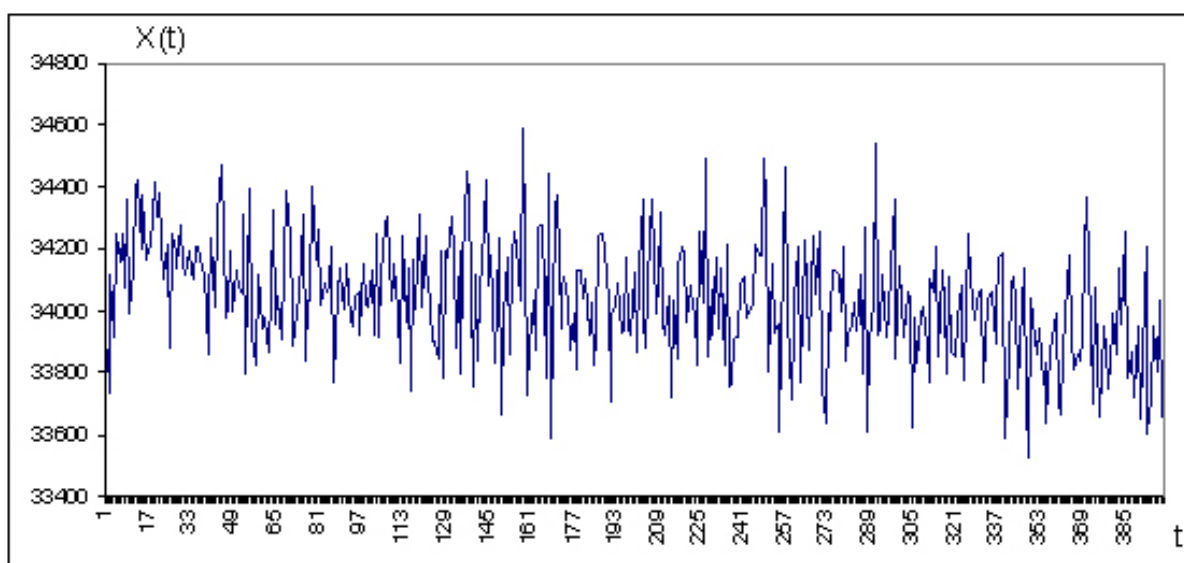


Рис. 22. Интенсивность потока мюонов во времени.

Возьмем несколько рядов, длиной 1440 значений и рассчитаем локальные фрактальные характеристики как описано выше. Получим следующие результаты:

$$\langle m(t) \rangle = 0.81;$$

$$\langle b(t) \rangle = 9.89;$$

$$\langle dm \rangle = 0.032;$$

$$\langle db \rangle = 0.005.$$

Как видно среднее значение m существенно превышает 0.5, при этом вариабельность как m , так и b очень низкая. Такие характеристики позволяют отнести временной ряд интенсивности мюонов к розовому шуму.

В качестве второго примера выберем снова финансовые временные ряды. Возьмем для расчетов временные ряды фондовых индексов нескольких стран: американский индекс SP500, немецкий индекс DAX, российский индекс РТС, бразильский индекс Bovespa и мексиканский индекс IPC. Минимальным масштабом временного ряда выберем одну неделю. Рассчитаем для выбранных временных рядов локальные фрактальные характеристики. Получим следующие результаты, расположенные в порядке возрастания среднего значения m (см. таб. 2):

Таб. 2. Значения локальных фрактальных характеристик для некоторых финансовых временных рядов.

Индекс	$\langle m(t) \rangle$	$\langle b(t) \rangle$	$\langle dm \rangle$	$\langle db \rangle$
Bovespa	0.44	3.35	0.21	0.11
DAX	0.44	3.3	0.24	0.13
РТС	0.46	4.14	0.21	0.14
SP500	0.48	3.54	0.29	0.15
IPC	0.49	3.35	0.22	0.13

Как видно из таблицы, для всех рядов среднее значение m меньше 0.5. Это дает основания предполагать, что поведение финансовых рядов близко к черному шуму. Однако вариабельность m оказалась выше, чем вариабельность модельных рядов с аналогичными средними значениями m . Кроме этого вариабельность показателя b оказалась на порядок выше вариабельности этого же показателя для модельных рядов. Таким образом,

финансовые временные ряды демонстрируют поведение, отличающееся от всех трех исследованных видов фрактального поведения. При этом основное отличие заключается в сильной вариабельности показателя b . Поскольку значение b тесно связано с характеристиками распределения приращений временного ряда, а это распределение, в свою очередь определяется механизмом, формирующим ряд, то можно сказать, что в финансовых временных рядах происходит частая смена такого механизма. С описательной же точки зрения финансовые временные ряды, по-видимому, состоят из участков с различным типом фрактального поведения, сменяющих друг друга случайным образом.

3.2. Локальный фрактальный анализ и тестирование гипотезы эффективного рынка.

Интересным практическим приложением решения задачи об идентификации является определение доли броуновской компоненты в финансовых временных рядах. Напомним, что в соответствии с теорией эффективного рынка поведение цен должно быть близким к случайному блужданию. Проверка этого предположения обычно сводится к исследованию распределения ценовых приращений на нормальность и к изучению их автокорреляционной функции на предмет наличия зависимостей. Выводы, которые можно сделать из подобных исследований являются достаточно общими. Используя индекс фрактальности m можно проделать гораздо более подробный анализ временных рядов.

Используя возможность вычислять m локально, исследуем доли времени, которые ряд проводит в различных состояниях. Для этого снова разобьем исходные ряды на пересекающиеся интервалы длиной в 32 дня и рассчитаем для каждого из интервалов значения m , m_- и m_+ , где m_- и m_+ - соответственно нижняя и верхняя границы доверительного интервала, в

который истинное значение m попадает с вероятностью 90 %. Будем считать, что при $m_+ < 0.5$ ряд находится в состоянии тренда, при $m_- > 0.5$ ряд находится в состоянии флэта, а при $m_- \leq 0.5 \leq m_+$ ряд находится в состоянии броуновского движения. Рассчитаем количество отрезков с каждым типом поведения и вычислим доли времени проводимые рядом в различных состояниях. Результат расчетов для нескольких рядов представлен в таб. 3.

Таб. 3. Доли различных состояний для некоторых финансовых временных рядов.

Временной ряд цен	Броуновское движение	Тренд	Флэт
Alcoa Inc	23 %	43 %	34 %
Boeing Corp	24 %	37 %	39 %
IBM	25 %	39 %	36 %
Microsoft Corp	26 %	36 %	38 %
Exxon Mobile Corp	15 %	50 %	35 %

Аналогичные результаты получены и для остальных исследованных рядов. Как видно временные ряды находятся в состоянии близком к случайному блужданию менее чем в половине времени. Используя полученные численные данные и вид функции $m(t)$ можно сделать следующий вывод: реальные временные ряды демонстрируют сложное непериодическое поведение, при котором участки персистентности хаотическим образом сменяются участками случайного блуждания или участками антиперсистентности. При этом, зная значение функции $m(t)$, можно сказать какой тип поведения наблюдается в каждой точке ряда.

Полученный результат означает необходимость существенной коррекции или даже пересмотра т.н. «гипотезы эффективного рынка»

(Effective Market Hypnotizes или, сокращенно, ЕМН), которая на сегодняшний день является основной гипотезой ценового поведения. Согласно ЕМН, фрактальная размерность ценовых рядов на любом локальном участке должна быть близка к 1.5 ($m \approx 0.5$). Как показывает локальный фрактальный анализ это справедливо лишь для 15-25 % участков финансовых временных рядов. Остальное время поведение рядов существенно отличается от броуновского движения. ЕМН не позволяет объяснить такой результат.

Следует отметить, что вопрос о соответствии ценового поведения броуновскому движению рассматривался неоднократно и ранее. Однако, точность критериев (например, моменты распределения ценовых приращений или показатель Херста H), применяемых для проверки гипотезы такова, что характер поведения временных рядов оказывается близким к гауссовому. Проведенный выше анализ позволяет дать качественное объяснение, почему это так. Действительно, как показано в предыдущих разделах участки «не нормального» (или «аномального») поведения имеют короткую длительность. В то же время для проверки на нормальность известными методами необходимы большие массивы данных (от нескольких сотен до нескольких тысяч точек). Внутри интервала, используемого для проверки на нормальность стандартными методами, окажется большое количество участков с разным поведением. При расчете тестовых значений характеристики персистентных и антиперсистентных участков компенсируются и итоговые значения окажутся близкими к нормальным.

Каким же может быть механизм возникновения во временных рядах участков аномального поведения? Для того, чтобы сделать предположения относительно этого механизма напомним сначала основные предположения ЕМН:

1. В ценообразовании участвует много покупателей и продавцов, каждый из которых в отдельности не в состоянии существенно влиять на цену.
2. Участники рынка одинаково оценивают поступающую информацию и мгновенно реагируют на нее.
3. Участники рынка действуют независимо друг от друга.

В случае выполнения данных предположений движение цен будет являться броуновским движением, поскольку изменение цены будет результатом большого количества независимых случайных воздействий примерно одинаковой интенсивности.

Теперь проанализируем отличия реального рыночного механизма, от предположений ЕМН.

Во-первых, введем такое понятие, как мгновенная ликвидность рынка. Мгновенной ликвидностью рынка будем считать количество акций, которое может быть мгновенно продано или куплено без изменения цены. С этим понятием сталкиваются все трейдеры, работающие на фондовых рынках. Особенно хорошо оно знакомо управляющим, оперирующим существенными капиталами. Действительно, современный биржевой механизм устроен так, что в любой момент времени без изменения цены может быть куплено или продано ровно столько акций, сколько в этот момент находится на уровне лучшего предложения или спроса. Это может оказаться и одна акция и несколько тысяч акций. Большее количество акций, чем предлагается по текущей цене будет куплено или продано по большей или меньшей цене соответственно. В среднем же величина мгновенной ликвидности является индивидуальной характеристикой каждой акции и остается почти постоянной величиной в течение достаточно долгого времени. Очевидно, что величина мгновенной ликвидности ограничена сверху количеством акций, находящихся в обращении. В обычной рыночной ситуации мгновенная ликвидность обычно составляет доли процента от своей верхней границы. Наличие

такого ограничения приводит к тому, что инвестор, желающий совершить сделку с объемом, превосходящим значение мгновенной ликвидности сталкивается с выбором: либо выставить свою заявку по интересующей цене на рынок и ждать пока найдется достаточное количество контрагентов, способных удовлетворить его спрос, либо совершать сделку по средней цене, отличающейся от текущей. В случае выбора первого варианта инвестор рискует не совершить сделку, поскольку цена может измениться в худшую для него сторону. Во втором случае поведение инвестора окажет влияние на цену и приведет к ее изменению. Причем, чем больше капитал инвестора превышает значение мгновенной ликвидности, тем существеннее будет изменение цены. На реальном рынке с этой проблемой сталкиваются инвесторы, чей капитал, направленный на инвестиции в конкретную акцию превышает несколько процентов дневного оборота по этой акции. Таким образом, первое предположение ЕМН выполняется не всегда.

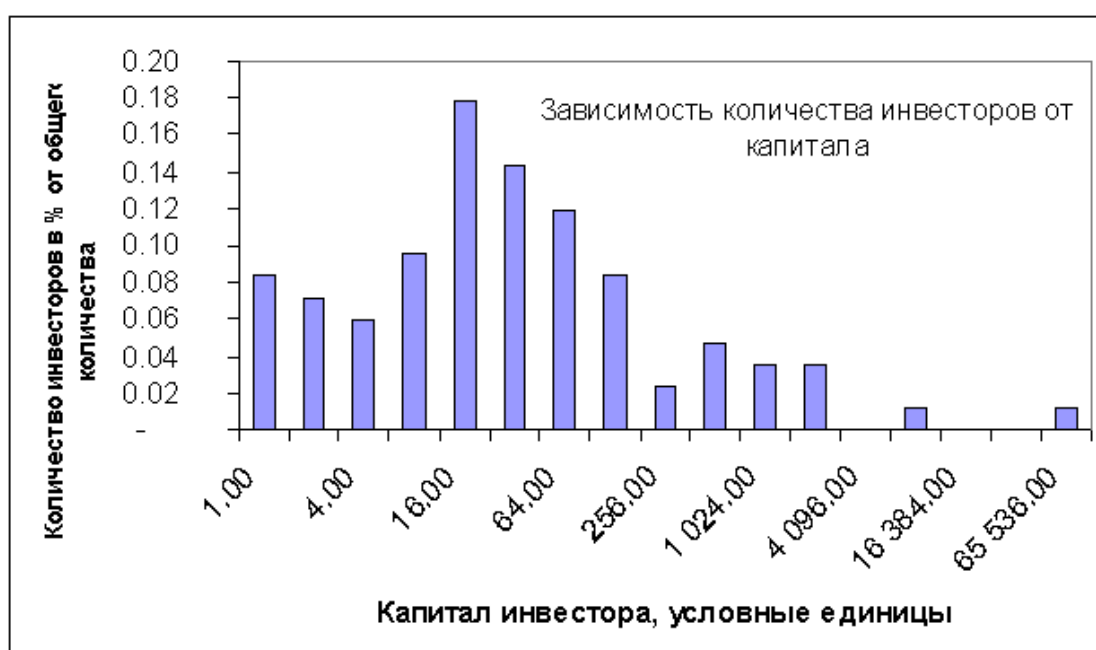
По-видимому, именно с проблемой мгновенной ликвидности связано разделение инвесторов по инвестиционным горизонтам. При этом инвесторы с большим капиталом вынуждены рассматривать большие инвестиционные горизонты для того, чтобы естественное изменение цен оказалось больше, чем изменение цен, вызванное их влиянием на рынок.

Очевидно, что с проблемой ликвидности связаны также и ограничения, накладываемые реальным рыночным механизмом на второе предположение ЕМН. Реакция инвесторов на поступающую информацию может быть одинаковой, однако инвесторам с большим капиталом потребуется большее время для совершения сделки. Кроме того, крупным инвесторам придется соотносить прибыль, полученную от сделки, и изменение цен, вызванное влиянием на рынок. Поэтому второе предположение ЕМН можно переформулировать следующим образом: время, необходимое инвестору на совершение сделки мало по сравнению с инвестиционным горизонтом. При этом абсолютные значения этого

времени могут существенно колебаться. Так инвестору с инвестиционным горизонтом в 1 день может понадобиться всего несколько секунд на сделку, а инвестору с горизонтом в год может потребоваться несколько дней.

Рассмотрим теперь предположение ЕМН о независимости действий инвесторов. Очевидно, что для большого количества участников рынка в среднем это предположение выполняется, поскольку в этом случае договориться о совместных действиях практически невозможно. Однако, вспомним о разделении инвесторов по инвестиционным горизонтам и по капиталу. Можно предположить, что чем больше капитал, тем меньше инвесторов.

На рис. 23 показано распределение количества инвесторов по капиталу, построенное по данным о состоянии клиентских портфелей крупной московской финансовой компании. По оси x отложен капитал инвестора в условных единицах, по оси y – количество инвесторов. Для построения этой зависимости за единицу измерения была выбрана некоторая небольшая стоимость портфеля, $K_{\min}=1$, после чего для каждого инвестора сумма в условных единицах была рассчитана путем деления его капитала на K_{\min} .



Как видно из рисунка количество инвесторов действительно убывает ростом капитала. Капитал самого крупного инвестора превышает капитал самых мелких в 65000 раз, более того, его капитал составляет 76 % от суммы капиталов всех инвесторов. При этом количество инвесторов с большими капиталами, а, следовательно, наиболее сильным влиянием на цены, небольшое. Приведенное распределение, по-видимому, является типичным для рынков. Действительно, хорошо известно, что на рынках отдельных акций существует несколько наиболее крупных игроков (основные владельцы компании и их аффилированные лица), которые могут оказывать существенное влияние на поведение цен акций своей компании. На рынках валют существуют «самые главные» игроки – центральные банки. На рынках государственных облигаций крупнейшими и уникальными игроками являются государственные казначейства. Очевидно, что при таком распределении инвесторов нельзя исключать, что несколько наиболее крупных игроков могут действовать согласованно как в силу случайных причин (например, одинаковая оценка новой информации руководством нескольких крупнейших банков страны), так и в силу договоренности.

Резюмируем сказанное выше в виде утверждений, уточняющих основные положения ЕМН:

1. В ценообразовании на финансовом рынке участвует много покупателей и продавцов. При совершении сделок с объемом, превышающим значение мгновенной ликвидности, участник рынка оказывает влияние на цену пропорциональное объему сделки. Ограничение мгновенной ликвидности приводит к разделению инвесторов по инвестиционным горизонтам. При этом, чем больше капитал инвестора, тем больше его инвестиционный горизонт и возможность влияния на цену.
2. Время, необходимое инвестору на совершение сделки пропорционально объему сделки и мало по сравнению с

инвестиционным горизонтом. При одинаковой реакции на поступающую информацию это время может колебаться от нескольких секунд до нескольких дней в зависимости от инвестиционного горизонта инвестора.

3. В силу небольшого количества инвесторов с большим капиталом возможны согласованные действия крупных инвесторов, возникающие как в силу случайных причин, так и в силу договоренностей.

Рассмотрим, теперь, каким образом эти положения объясняют аномальные поведения цен.

Обратимся сначала к случаю независимых действий инвесторов со всеми инвестиционными горизонтами. В этом случае поведение цены будет независимым от прошлого поведения цен на всех масштабах. Действия крупных участников рынка будут компенсированы либо друг другом, либо действиями более мелких участников. Действительно, за время, необходимое крупному инвестору для совершения сделки, участники с меньшим капиталом и инвестиционным горизонтом успеют совершить несколько сделок и компенсируют действия крупного инвестора. Цены будут совершать нормальные изменения а средняя амплитуда колебаний цен будет расти пропорционально корню из времени, а сумма амплитуд колебаний или $V_f(d)$ будет снижаться по этому же закону.

Теперь предположим, что несколько крупных участников рынка начинают действовать согласованно. Такая ситуация может возникнуть как в результате появления информации, однозначно оцениваемой рынком и ведущей к долгосрочному изменению цен, так и в результате распространения инсайдерской информации среди ограниченного количества участников рынка. В этом случае действия крупных участников будут усиливать друг друга. Изменение цены и амплитуда колебаний на больших масштабах начнут расти быстрее, чем \sqrt{t} , а на лог-лог диаграмме зависимости $V_f(d)$ правый край диаграммы «загнется»

вниз, т.е. сумма амплитуд на больших масштабах начнет падать быстрее, чем \sqrt{t} . Через некоторое время инвесторы с меньшими инвестиционными горизонтами увеличат частоту сделок, поскольку в условиях движения цены на больших масштабах для получения такой же прибыли, что и раньше, будет требоваться меньше времени. Это компенсирует действия крупных инвесторов и диаграмма $V_f(d)$ опять станет прямой, но значение m будет меньше, чем 0.5. Так возникает ситуация положительной обратной связи: цены растут (падают), но спрос (предложение), обусловленный большим объемом крупных инвесторов, не уменьшается. В результате цены совершают направленное движение, при котором повышенный спрос долгосрочных инвесторов компенсируется повышенной частотой сделок средних и мелких инвесторов, которые выступают в данном случае «стабилизаторами» рынка.

Наконец, рассмотрим случай пониженной активности крупных инвесторов. В силу того, что количество таких инвесторов ограничено и частота их сделок мала по сравнению с частотой сделок остальных инвесторов такая ситуация возможна. На рынке она может возникнуть в результате отсутствия важной информации или в случае полного удовлетворения текущего спроса крупных инвесторов. В этом случае изменение цены и амплитуда на больших масштабах будут расти меньше чем \sqrt{t} , а на лог-лог диаграмме зависимости $V_f(d)$ правый край диаграммы «загнется» вверх, т.е. сумма амплитуд на больших масштабах начнет падать медленнее, чем \sqrt{t} . Через некоторое время средним и мелким инвесторам придется увеличить уменьшить частоту операций, поскольку в условиях отсутствия движения цены на больших масштабах для получения такой же прибыли что и раньше, будет требоваться больше времени. Это приведет к выравниванию лог-лог диаграммы зависимости $V_f(d)$, однако значение m будет больше, чем 0.5. Так возникает ситуация отрицательной обратной связи: высокая частота сделок мелких и средних

инвесторов в отсутствии крупных инвесторов приводит к уменьшению колебаний цены на больших масштабах.

Таким в общих чертах представляется механизм, генерирующий сложное поведение финансовых временных рядов.

3.3. Локальные фрактальные характеристики и задача о разладке.

Разладка – краткий термин для любого изменения вероятностных характеристик случайных процессов. Задача о разладке состоит в обнаружении изменений вероятностных свойств случайных процессов и делится на два больших класса проблем.

Первый класс называется ретроспективной (апостериорной) задачей о разладке и заключается в обнаружении момента изменения вероятностных характеристик случайной выборки по всем известным данным. Необходимость решения таких задач можно продемонстрировать следующим образом. Пусть предъявлена выборка (реализация) случайного процесса. Всякая статистическая обработка этой выборки с целью построения модели, оценки параметров и т.п. основана на предположении, что оцениваемый феномен в процессе сбора данных не изменялся. Поэтому предварительным этапом любой статистической обработки должен быть этап проверки однородности выборки по отношению к исследуемым вероятностным характеристикам. Таким образом, вопрос здесь ставится так; является ли предъявленная выборка статистически однородной в смысле неизменности своих вероятностных характеристик? Если ответ на этот вопрос положителен, то далее следует заниматься обычной статистической обработкой в зависимости от тех целей, которые ставит исследователь. Если же ответ отрицателен, то возникает задача обнаружения моментов изменения вероятностных характеристик и разбиения исходной выборки на несколько статистически однородных кусков.

Второй класс проблем называется задачей о скорейшем обнаружении разладки и может быть сформулирован следующим образом. Пусть информация о случайном процессе (его измерение) поступает последовательно во времени. Допустим, что в некоторый (заранее неизвестный) момент происходит изменение какой-либо вероятностной характеристики процесса (в общем случае, самой функции распределения). Спрашивается, как обнаружить произошедшее изменение скорейшим образом после того, как оно возникло (ясно, что сделать это заранее - "предсказать будущее" - в принципе нельзя), но так, чтобы при этом ложные сигналы тревоги не были слишком частыми (частота таких сигналов может быть ограничена заданной величиной).

Первые существенные результаты в этой области были получены Пейджем в 50-х годах XX века [71]. Примерно в это же время А.Н. Колмогоров предложил строгую постановку задачи о скорейшем обнаружении разладки для винеровского процесса. Оптимальное решение этой задачи для случая точного знания функций распределения до и после момента разладки нашел А.Н. Ширяев в 1976 году [23].

Примерно с середины 60-х годов усилия в этом направлении оказались сосредоточенными на разработке методов, использующих как можно меньше априорной информации. Это связано с тем, что в возникающих приложениях получить полную информацию о функции распределения случайного процесса, как правило, невозможно. В настоящее время в этой области развиваются минимаксные и непараметрические методы, позволяющие отказаться от наличия априорной информации о функции распределения случайной последовательности [51].

Покажем, что знание локальных фрактальных характеристик может быть использовано для решения задачи о скорейшем обнаружении момента разладки. Действительно, исследование различного типа поведения случайных временных рядов показало, что средние значения показателей m и b отличаются для разных типов случайного поведения. При этом, наиболее

целесообразным представляется использование b , поскольку вариабельность этого показателя на протяжении временного ряда мала. Простейший способ обнаружения момента разладки можно описать следующим образом. Пусть дан временной ряд, состоящий из предположительно разных участков поведения. Необходимо последовательно вычислять значение показателя b для каждой точки, начиная с минимально необходимого для расчета количества точек и фиксировать в каждый момент максимальное и минимальное значение b в прошлом. Если в какой-то момент времени t расчетное значение b выйдет из своего диапазона колебаний в прошлом, то можно предположить, что некоторое время назад произошла разладка. При этом важной характеристикой будет являться среднее время задержки определения этого момента. Попытаемся численно оценить это время для временных рядов, состоящих из участков с разным типом поведения. Для этого будем моделировать ряды длиной 20000 точек, так чтобы на первых 10000 точек наблюдался один тип поведения, а на следующих 10000 точек – другой. Поскольку исходных типов поведения три, то получим шесть различных вариантов хаотических рядов. Далее, как и прежде, разобьем полученные ряды на непересекающиеся отрезки длиной 100 точек и для каждого отрезка рассчитаем первое, максимальное, минимальное и последнее значение. Получим ряды в формате японских свечей, состоящих из 200 точек с разным типом поведения на первых и последних 100 точках. Для этих рядов будем рассчитывать значение показателя b по 32 точкам и фиксировать количество свечей, необходимое для определения момента разладки. Результаты расчетов приведены в таблице и отсортированы по возрастанию времени от момента разладки до момента ее обнаружения (см. таб. 4)). Как видно из таблицы, для определения момента разладки с помощью анализа поведения показателя b требуется достаточно малое количество точек временного ряда: от 2 до 10 в зависимости от типов поведения на разных частях ряда. Заметим, что для решения этой задачи стандартными статистическими методами обычно требуется несколько десятков точек.

Таб. 4. Задержка определения момента разладки для модельных хаотических временных рядов с различными типами поведения.

Тип поведения на первой части ряда	Тип поведения на второй части ряда	Среднее количество точек от момента разладки, до момента ее определения	Минимальное количество точек от момента разладки, до момента ее определения	Максимальное количество точек от момента разладки, до момента ее определения	Количество экспериментов
Коричневый шум	Розовый шум	1.14	1	2	20
Розовый шум	Черный шум	1.14	1	2	20
Розовый шум	Коричневый шум	1.29	1	3	20
Коричневый шум	Черный шум	3.29	1	9	20
Черный шум	Коричневый шум	3.67	2	4	20
Черный шум	Розовый шум	11.15	1	21	20

4. Локальный фрактальный анализ и прогнозирование.

Конечной целью любого анализа является прогноз. Задача прогнозирования применительно к временным рядам может быть поставлена различными способами. Для финансовых временных рядов, в частности, актуальными являются следующие возможные постановки такой задачи:

- на основании известной информации о значениях временного ряда в точках $t=0,1,\dots,i$ найти прогноз значения временного ряда в точке $t=i+n$;
- на основании известной информации о значениях временного ряда в точках $t=0,1,\dots,i$ найти такое значение X , что значение временного ряда $X(t) > X$ ($t=i+1, i+2,\dots,i+n$) с заданной вероятностью P ;
- на основании известной информации о значениях временного ряда в точках $t=0,1,\dots,i$ найти вероятность сильного снижения цены (краха) в течение периода $t \in [i, i+n]$;

Первая постановка задачи является традиционной для краткосрочного прогнозирования цен. Прогнозы такого типа могут быть использованы для принятия решений о покупке/продаже отдельных акций или для формирования портфеля. Вторая постановка часто используется для текущей оценки риска (возможного снижения стоимости отдельной позиции или портфеля в целом). Прогнозы третьего типа наиболее интересны для оценки максимального риска портфеля акций, а также для прогноза глобальных изменений состояния рынка. Рассмотрим возможности локального фрактального анализа применительно к трем поставленным задачам прогноза.

4.1. Прогнозирование значений временного ряда.

Наиболее часто для краткосрочного прогнозирования используются стандартные эконометрические методы. В этом случае временной ряд представляется в виде функции от небольшого числа существенных факторов и случайной гауссовой добавки, суммирующей в себе влияние всех случайных факторов. Технология такого прогноза обычно содержит три этапа: на первом определяются существенные факторы, от которых зависит цена (для этого используются стандартные методы дисперсионного и корреляционного анализа), на втором полученная модель проверяется на нормальность и независимость остатков (эти свойства остатков необходимы для корректной оценки доверительного интервала прогноза), а на третьем делается оценка качества прогноза (обычно в качестве критерия качества используется оценка дисперсии ошибки прогноза). В этой области разработано достаточно много моделей, использующих как внешние по отношению к ценовому ряду факторы (например, экономические показатели) так и прошлые значения временного ряда, или его производных (например, модели ARMA, ARIMA, ARCH, GARCH, E-GARCH). Однако большинство подобных моделей неудовлетворительно описывают рыночные процессы (см. например [18], [74]). К тому же оправданность применения таких методов вызывает сомнение с точки зрения общепринятой на сегодняшний день гипотезы эффективного рынка. Напомним, что концепция эффективного рынка предполагает, что на рынке присутствует достаточно большое число полностью информированных экономических агентов, которые действуют независимо и рационально, мгновенно реагируя на вновь поступающую информацию. Основной моделью краткосрочного поведения цены на таком рынке является модель броуновского движения, впервые предложенная Луисом Башелье применительно к финансовым рынкам еще в 1900-м году [26] и затем развитая Норбертом Винером. Для этой модели можно строго показать, что наилучшим прогнозом завтрашней цены является самый

простой прогноз: сегодняшняя цена. Как оказалось, качество прогноза большинства эконометрических моделей хуже качества такого простейшего прогноза (дисперсия ошибки прогноза для эконометрических моделей оказывается больше дисперсии приращения цен) [39].

Как показано в предыдущей главе знание численного значения фрактальных характеристик ряда позволяет естественным образом определить является ли текущее локальное состояние финансового ряда случайным блужданием или же трендом (флэтом). Этот факт можно попытаться использовать для прогнозирования. Действительно, в состоянии тренда можно использовать эконометрические методы, а в состоянии случайного блуждания предыдущую цену или же вообще отказаться от прогнозирования. Оценим качество простейшего варианта такого прогноза.

Рассмотрим ценовые ряды акций восьми крупнейших российских компаний. В каждом из рядов выделим участки для которых $m_+ < 0.5$, т.е. участки где наблюдается тренд. Для каждой точки каждого участка построим прогноз, используя линейную регрессию по четырем предыдущим точкам.

Формально это можно записать следующим образом:

При $m_+ < 0.5$ $X(t+1) = a(t+1) + b$, где коэффициенты a и b оцениваются по набору точек $(t, X(t))$, $(t-1, X(t-1))$, $(t-2, X(t-2))$ и $(t-3, X(t-3))$.

При $m_+ > 0.5$ прогноз не делается.

Выберем теперь в качестве критерия качества прогноза дисперсию ошибки прогноза и сравним ее с дисперсией ценовых приращений. Полученные результаты для каждого ряда представлены в таб. 5:

Таб. 5.

<i>Акция</i>	<i>Дисперсия приращений цен S_n^2</i>	<i>Дисперсия ошибки прогноза $S_n^2(trend)$</i>	$S_n^2(trend) / S_n^2$
РАО ЕЭС	0,0020	0,0013	0,65
ЛУКОЙЛ	0,0020	0,0008	0,4
Ростелеком	0,0031	0,0012	0,38
МосЭнерго	0,0030	0,0033	1,1
Сургутнефтегаз	0,0019	0,0015	0,79
Татнефть	0,0025	0,0016	0,64
Юкос	0,0386	0,0296	0,77
Сбербанк	0,0021	0,0018	0,85

Из таблицы видно, что ошибка прогноза, построенного простейшим методом с учетом текущего состояния ряда, в большинстве случаев меньше, чем ошибка стандартного прогноза.

4.2. Оценка риска вложений в финансовые активы.

После работ Марковица в качестве меры риска вложений в акцию (портфель) долгое время использовалась оценка дисперсии ожидаемого дохода по акции (портфелю). Этот метод оказался очень удобным, поскольку дисперсию портфеля можно вычислить аналитически, если известны дисперсии каждого актива и коэффициенты корреляции между активами. При этом законы распределения ожидаемого дохода могут быть различными для разных активов. Однако практика показала, что оценки риска, полученные таким образом, часто недооценивают или переоценивают риск. Это связано с тем, что распределение ожидаемого дохода является нестационарным: его дисперсия изменяется во времени в достаточно широких пределах.

Стандартным методом оценки риска позиции или портфеля на сегодняшний день считается использование квантильных мер риска. Наиболее часто используемой мерой является величина Value-at-Risk (VaR) –

мера риска актива (портфеля) с заданной доверительной вероятностью. Утверждение о том, что позиция (портфель) имеет определенное значение VaR означает следующее: в течение промежутка времени t абсолютная величина убытка по позиции (портфелю) не может быть больше, чем VaR с заданной доверительной вероятностью p [7]. Использование VaR в качестве меры риска существенно усложняет расчеты, поскольку аналитическое решение такой задачи для портфеля сопряжено со значительными трудностями даже для малого числа активов. Рассмотрим способы, которыми можно найти VaR для отдельного актива.

Для расчета VaR необходима информация о плотности распределения доходов, которая может быть найдена по известному временному ряду цен актива.

Пусть $t \in [0, t_{\max}]$ - моменты времени для которых известны цены актива

P_t - цена актива в момент времени t .

Перейдем от ряда цен к ряду доходностей с помощью преобразования

$$X_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_t}, \text{ где } 1 \leq t \leq t_{\max} \quad (53)$$

Тогда значение VaR может быть вычислено по выборке случайных величин $\{X_t\}$ следующими способами:

1) Непосредственно по выборке $\{X_t\}$.

Для этого выборку $\{X_t\}$ необходимо упорядочить по возрастанию, после чего найти в упорядоченной выборке номер K , соответствующий доверительной вероятности P по формуле

$$K = 1 + \text{ЦЕЛОЕ}((1 - P)(t_{\max} - 1)) \quad (54)$$

Тогда

$$\text{VaR} = |X_K| \quad (55)$$

Этот метод вычисления VaR является самым простым, однако результат вычислений будет сильно зависеть от длины известной истории t_{\max} и от особенностей конкретной реализации ценового ряда за историю (особенно при малых значениях t_{\max}).

2) Путем идентификации закона распределения случайной величины X . Для этого по выборке $\{X_t\}$ необходимо построить эмпирическую гистограмму распределения случайной величины X и аппроксимировать эту гистограмму каким-либо аналитическим законом распределения. Таким образом будет найдена формула плотности распределения $p(X)$. Тогда, при заданной доверительной вероятности P , величина VaR может быть найдена аналитически или численно из уравнения

$$1 - P = \int_{-\infty}^{-\text{VaR}} p(X) dX \quad (56)$$

3) Путем моделирования методом Монте-Карло.

В этом случае сначала, как и в предыдущем случае необходимо найти аналитическую формулу плотности распределения $p(X)$ по выборке $\{X_t\}$, после чего провести многократное моделирование случайной величины, используя генератор случайных чисел. Тогда величину VaR можно определить по смоделированной выборке.

Учитывая трудоемкость этого способа, его имеет смысл применять в случае коротких известных выборок $\{X_t\}$. В этом случае оценка VaR по смоделированной выборке окажется более точной, чем по исходной выборке.

Очевидно, что точность оценки риска с помощью VaR будет высокой только в предположении, что закон распределения доходностей $X(t)$ является стационарным. Однако, если в рыночном механизме, результатом работы которого являются цены активов, действительно периодически возникают положительные и отрицательные обратные связи, то закон распределения может оказаться существенно нестационарным во времени. Действительно, при отрицательной обратной связи (которая, как показано ранее, должна приводить к формированию флэтов) дисперсия распределения доходностей должна быть невелика в силу увеличения стабильности и уменьшения амплитуды колебаний. При положительной обратной связи дисперсия распределения доходностей может быть большой в силу увеличения неустойчивости и амплитуды колебаний. Попробуем подтвердить эти предположения эмпирически.

Выберем временной ряд индекса Доу-Джонса за период с 1.10.1929 по 1.03.2001. Это один из самых длинных временных рядов, из имеющихся в нашем распоряжении, содержащий 18183 точки. Каждая точка соответствует одному торговому дню и содержит информацию о значениях индекса в формате японских свечей. Поскольку данных много, оценки параметров распределения доходностей будут достаточно надежными. Перейдем от исходного временного ряда к ряду доходностей по формуле (53) и рассчитаем параметры распределения и VaR для значения доверительной вероятности $P=0.95$. При расчете VaR будем пользоваться наиболее простым первым методом, поскольку длина ряда велика. Получим следующие результаты:

Среднее значение	0.00027
Стандартное отклонение	0.01141
Дисперсия	0.00013
Эксцесс	23.56
Минимум	-0.2261
Максимум	0.1534
Длина выборки	18181
VAR для $P=0.95$	0.01568

Как видим по полученным результатам колебания ежедневных доходностей индекса Доу-Джонса за исследуемый период, охватывающий больше половины XX века, происходили в широких пределах: от –22 % до 15 %. При этом, исходя из величины VaR, можно сказать, что падение индекса за один день не превышало 1.56 % в 95 % случаев.

Разобьем теперь исходную выборку дневных доходностей на три не пересекающихся выборки, соответствующих различным состояниям исходного временного ряда. Для этого сначала введем определение состояния S:

$$S(t) = \begin{cases} 0_если_m(t) > 0.5 \\ 1_если_m(t) < 0.5_и_K_r(t) > 0 \\ -1_если_m(t) < 0.5_и_K_r(t) < 0 \end{cases}, \quad (57)$$

где

$m(t)$ - текущее значение индекса фрактальности, рассчитанное по 16-ти предшествующим точкам,

$K_r(t)$ - коэффициент наклона линии линейной регрессии, рассчитанный по 16-ти предшествующим точкам.

Таким образом, в соответствии с представлениями о свойствах индекса фрактальности, изложенными в предыдущих главах можно сказать, что при $S(t)=0$ исходный ряд находится в состоянии флэта, при $S(t)=1$ исходный ряд находится в состоянии падающего тренда, а при $S(t)=-1$ исходный ряд находится в состоянии растущего тренда.

Теперь сформируем три выборки величины $X(t)$. Выборка $\{X_t\}^{Flat}$ будет содержать только такие значения $X(t)$, для которых $S(t)=0$. Выборки $\{X_t\}^{Up-trend}$ и $\{X_t\}^{Down-trend}$ будут содержать только такие значения $X(t)$ для которых $S(t)=1$ и $S(t)=-1$ соответственно.

Рассчитаем теперь значения параметров распределения и VAR для каждой из выборок. Получим:

Для выборки $\{X_t\}^{Flat}$:

Среднее значение	0.00023
Стандартное отклонение	0.00988
Дисперсия	0.0001
Эксцесс	13.56
Минимум	-0.081
Максимум	0.095
Длина выборки	11991
VAR для P=0.95	0.01448

Для выборки $\{X_t\}^{Up_trend}$:

Среднее значение	0.00066
Стандартное отклонение	0.001037
Дисперсия	0.0001
Эксцесс	10.14
Минимум	-0.084
Максимум	0.1534
Длина выборки	3351
VAR для P=0.95	0.0137

Для выборки $\{X_t\}^{Down_trend}$:

Среднее значение	-0.0004
Стандартное отклонение	0.00172
Дисперсия	0.00029
Эксцесс	20.5
Минимум	-0.226

Максимум	0.148
Длина выборки	2839
VAR для P=0.95	0.0257

Как видно из приведенных таблиц статистические свойства рядов доходностей существенно зависят от текущего состояния исходного ряда. В первую очередь это относится к дисперсиям и диапазону колебаний. Действительно, дисперсия ряда в состоянии флэта меньше, чем дисперсия в состояниях трендов. Кроме этого, очевидно, существует смещение среднего значения доходностей в положительную область для выборки $\{X_t\}^{Up-trend}$ и в отрицательную для $\{X_t\}^{Down-trend}$. Сравнение значений VaR для каждой из выборок со значением для всего ряда показывает, что процедура оценки риска без учета состояния ряда переоценивает риск для флэтов и растущих трендов и недооценивает для падающих трендов. Таким образом, использование локального фрактального анализа позволяет сделать оценку риска вложений в финансовые активы более точной.

4.3. Флуктуации фрактальной структуры и эволюция временного ряда

Действие системных механизмов, формирующих наблюдаемые временные ряды (в частности, механизма для финансовых временных рядов, описанного в 3.2) должно приводить к флуктуациям фрактальной структуры ряда. Эти флуктуации выражаются в отклонении вида лог-лог диаграммы зависимости $V_f(d)$ от прямой. Причем такие отклонения должны предшествовать изменению макросостояния временного ряда. Основой для этого является наличие степенного закона для функции $V_f(d)$, выполняющегося в широком диапазоне масштабов. Для теоретического обоснования этого эффекта разделим функцию $V_f(d)$, на длину отрезка n , по которому она вычислена и введем понятие средней ожидаемой амплитуды по формуле:

$$\langle A(d) \rangle \equiv V_f(d)/n \quad (58)$$

Поскольку $d \sim 1/n$, то

$$\langle A(d) \rangle \sim V_f(d)d \sim d^{1-m} \equiv d^{H_m}, \quad (59)$$

где $H_m = 1 - m$.

Построим график зависимости $\langle A(d) \rangle$ (см. рис.24) для разных значений m (H_m):

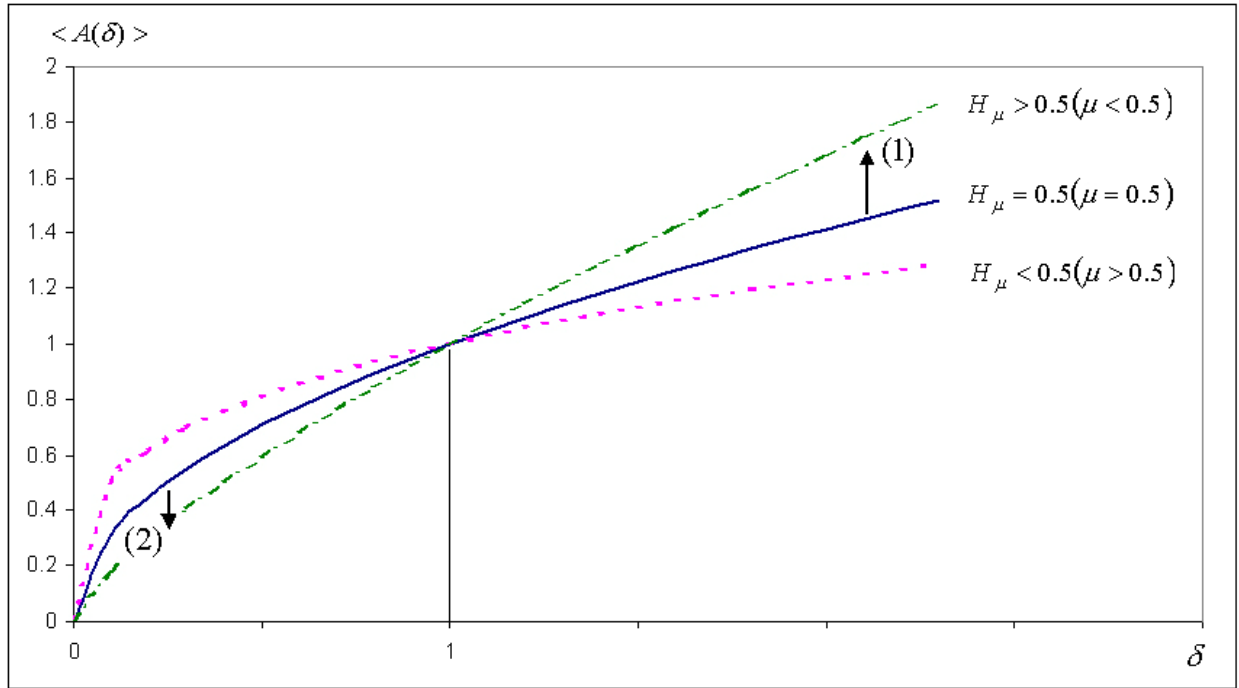


Рис.24. Зависимость $\langle A(d) \rangle$ для временного ряда при различных значениях m (H_m): сплошная линия соответствует изменению амплитуды для броуновского движения, пунктирная и штрих пунктирная - для трендов и флэтов, соответственно.

Предположим, теперь, что временной ряд находится в состоянии случайного блуждания. В этом случае, как известно, $D=1.5$ ($m=0.5$). Поэтому зависимость $\langle A(d) \rangle$ описывается сплошной линией на рис.24. Предположим, что в системе произошел фазовый переход, в результате которого временной ряд переходит в состояние тренда. Это означает, что через некоторое время (т.е. для больших d) амплитуда колебаний увеличится (стрелка (1) на рис.24). Однако, как видно из графиков, переход временного ряда в новое состояние вызовет одновременное уменьшение амплитуды колебаний на малых масштабах (стрелка (2) на рис.24). Таким образом,

увеличение крупномасштабных флуктуаций ведет к подавлению мелкомасштабных флуктуаций и наоборот.

Рассмотрим теперь локальную фрактальную структуру с этой точки зрения более подробно.

Как показывает анализ вида лог-лог диаграмм зависимости $V_f(d)$, рассчитанных по 32-м точкам ряда, идеальное соответствие точек теоретической прямой встречается достаточно редко. В большинстве случаев действительно имеются отклонения точек в ту или иную сторону. При более детальном исследовании было обнаружено, что наиболее часто встречаются два типа отклонений, представленные на рис. 25-26. Вид диаграммы на рис 26 означает, что нормированные на d амплитуды колебаний на малых масштабах меньше, чем аналогично нормированные амплитуды на больших масштабах. На рис. 26 представлена обратная ситуация.

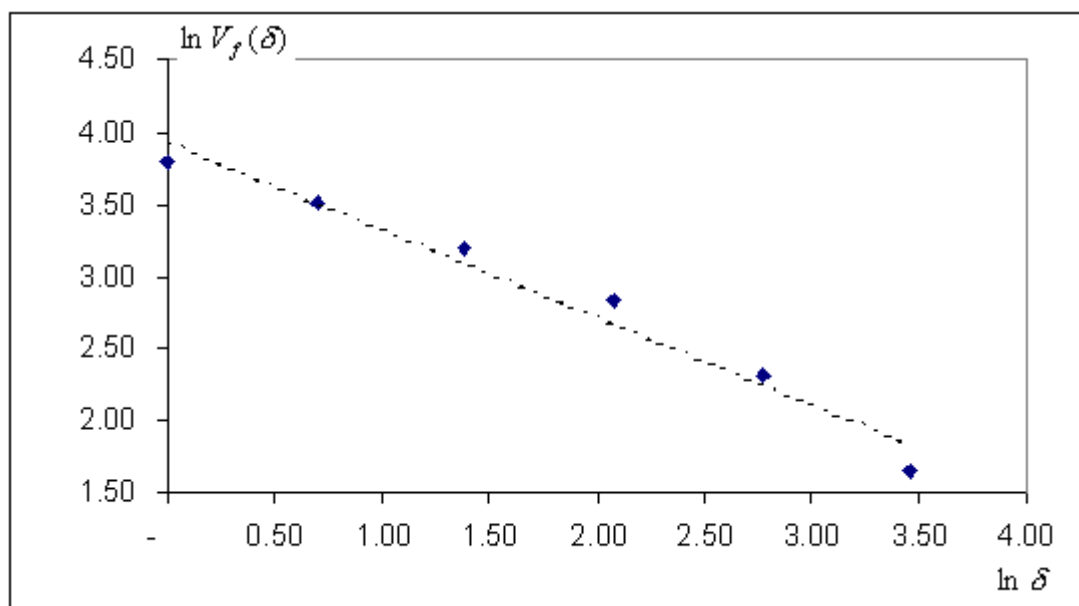


Рис. 25.

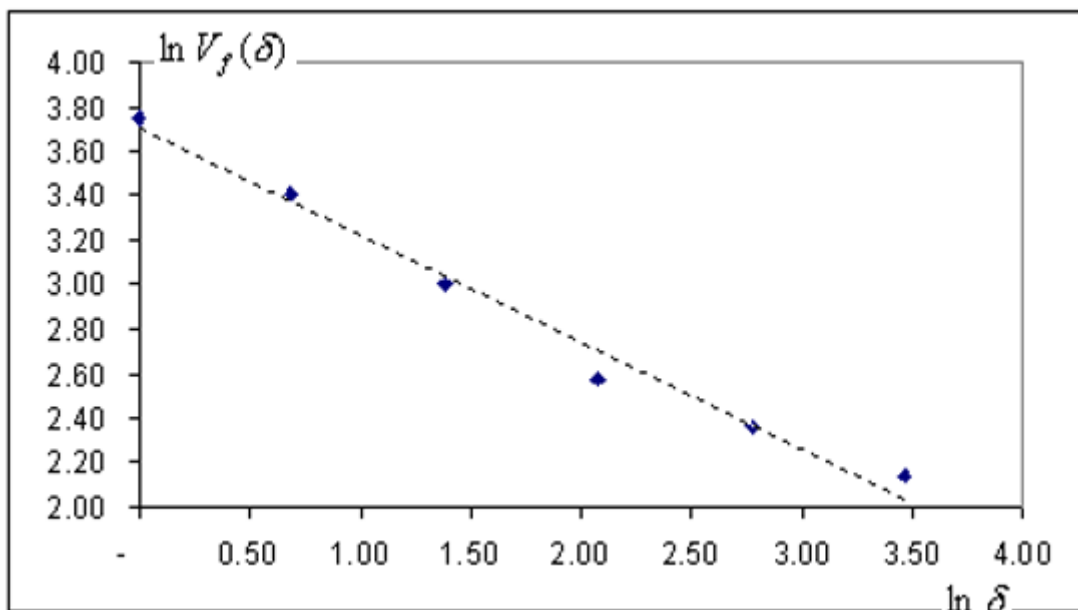


Рис. 26.

Возникновение подобных ситуаций с точки зрения предложенного механизма ценообразования должно приводить в первом случае к увеличению через некоторое время амплитуды колебаний на больших масштабах и возникновению тренда, а во втором случае, наоборот, к их уменьшению и возникновению флэта. Для демонстрации такого поведения введем следующие величины:

m_1 - индекс фрактальности, рассчитанный по точкам, соответствующим малым и средним масштабам ($d = 1,2,4$)

m_2 - индекс фрактальности, рассчитанный по точкам, соответствующим средним и большим масштабам ($d = 8,16,32$)

$$\Delta m = m_1 - m_2 \quad (60)$$

Графическая модель таких расчетов представлена на рис. 27.

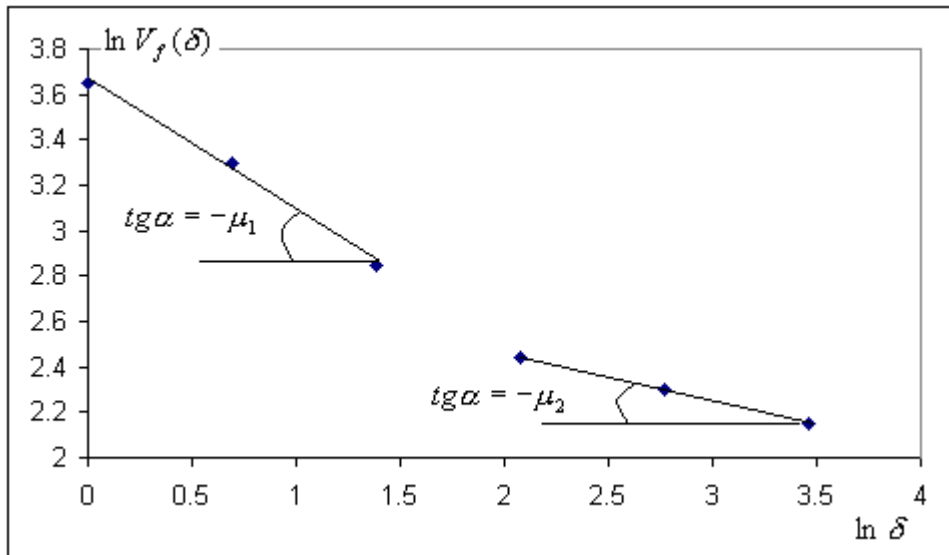


Рис. 27.

Заметим, что для случая рис. 25 $\Delta m < 0$, а для случая рис. 26 $\Delta m > 0$

Построим эмпирические зависимости $dA_{32} = f(\Delta m_i)$ и $dm_{32} = f(\Delta m_i)$, где

$$dA_{32} = \ln(A_{i+32}) - \ln(A_i) \quad (61),$$

$$dm_{32} = m_{i+32} - m_i \quad (62),$$

где

A_i - амплитуда колебаний временного ряда на текущем отрезке в 32 дня,

A_{i+32} - амплитуда колебаний временного ряда на следующем отрезке временного ряда непересекающемся с текущим.

m_{i+32} - значение индекса фрактальности на следующем отрезке, не пересекающемся с текущим.

m_i - значение индекса фрактальности на текущем отрезке.

Для этого рассчитаем значения dA_{32} , dm_{32} и Δm_i для каждого 32-х дневного отрезка исходного ряда, после чего нанесем полученные точки на диаграммы, где по оси x отложим значение Δm_i , а по оси y значения dA_{32} и dm_{32} . Типичный вид таких диаграмм представлен на рис. 28-29 для временного ряда цен акций компании Alcoa Inc.

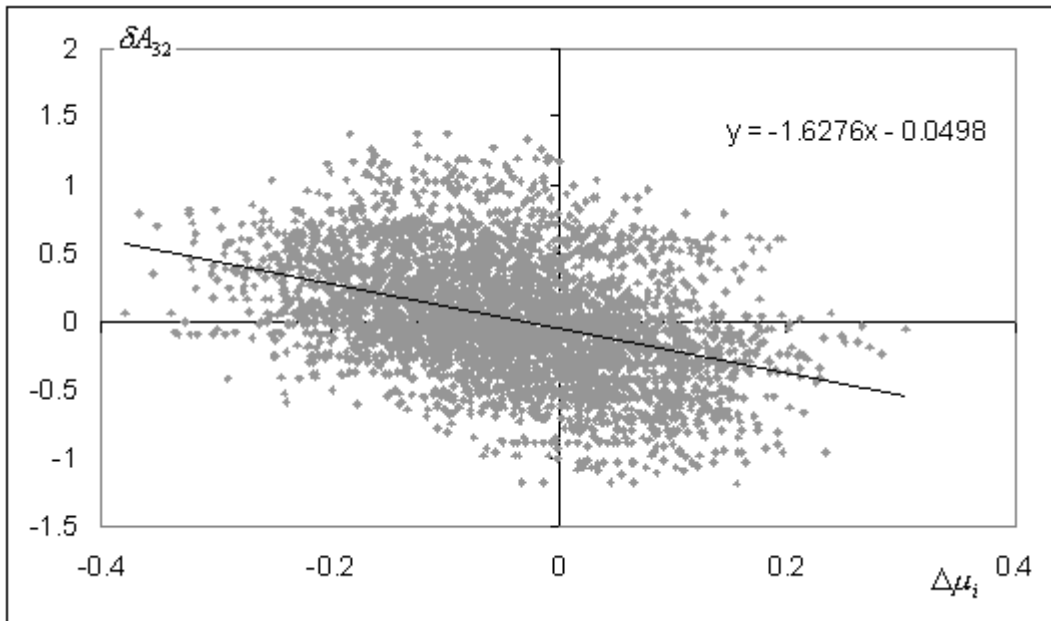


Рис. 28

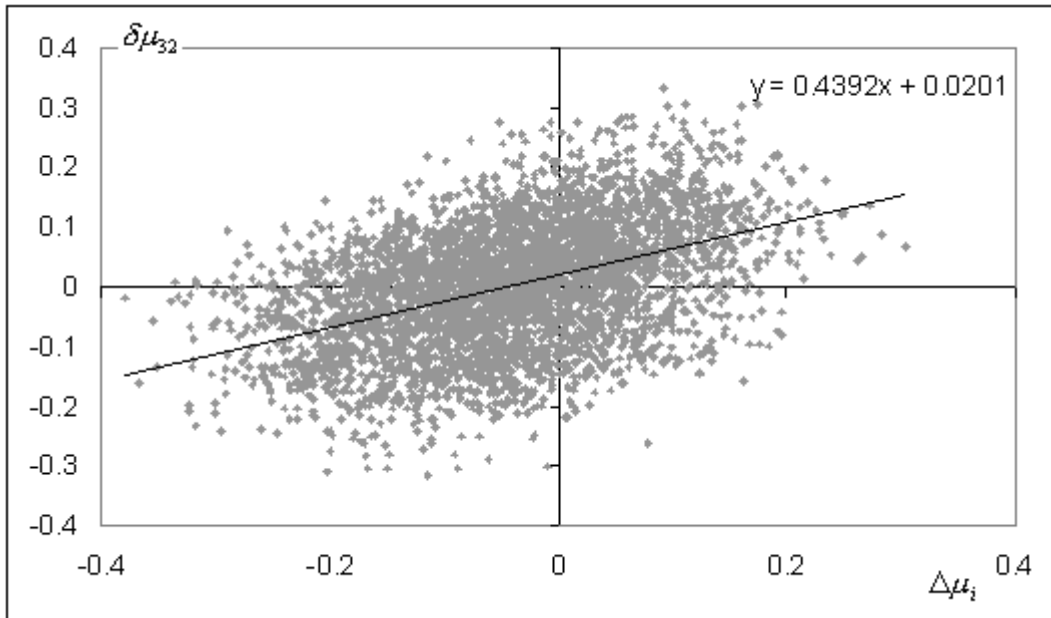


Рис. 29

Из вида полученных диаграмм в первом приближении можно записать:

$$dA_{32} \sim -a\Delta m_i, \quad (63)$$

$$dm_{32} \sim b\Delta m_i, \quad (64)$$

где a и b некоторые константы.

Или, используя (61) и (62), получим:

$$\ln(A_{i+32}) \sim \ln(A_i) - a\Delta m_i, \quad (65)$$

$$m_{i+32} \sim m_i + b\Delta m_i. \quad (66)$$

Таким образом, финансовые временные ряды действительно демонстрируют поведение, описанное в предложенной выше модели, при котором флуктуации фрактальной структуры приводят к изменению типа поведения ряда. Действительно, при $\Delta m > 0$ (интенсивность мелкомасштабных колебаний больше интенсивности крупномасштабных) амплитуда будущих крупномасштабных колебаний падает а индекс фрактальности на следующем участке ряда увеличивается, т.е. ряд стремиться перейти к антиперсиситентному поведения или флэту. При $\Delta m < 0$ в среднем амплитуда будущих крупномасштабных колебаний увеличивается а индекс фрактальности на следующем участке ряда снижается, т.е. ряд стремиться перейти к персиситентному поведения или тренду.

4.4. Локальный фрактальный анализ и критическое поведение временных рядов.

Во многих областях науки изучению так называемых критических или экстремальных событий придается особенная важность. В первую очередь это относится к природным катаклизмам (землетрясения, ураганы, цунами, наводнения и т.д.) и техногенным катастрофам (взрывы, аварии на транспорте, загрязнение окружающей среды, техногенное изменение климата). Однако критическое поведение характерно для гораздо более широкого класса систем, которые в современной литературе принято называть сложными (complexity systems). Возможность критического

поведения в финансах в связи с широким распространением ЕМН долгое время не рассматривалось, а наблюдаемые кризисы и финансовые крахи считались статистическими артефактами и объяснялись редким сочетанием внешних причин. Однако применение некоторыми исследователями идей теории динамического хаоса к поведению рыночных агентов показало, что нестабильность финансовых рынков может быть вызвана внутренними причинами, связанными с кооперативным поведением участников рынка (см. например [22], [27]).

С практической точки зрения трейдеров интересует такое поведение цен, которое может привести к резким изменениям стоимости инвестиционного портфеля. Обычно под критическим поведением в финансах понимают резкое падение стоимости большинства ценных бумаг. Однако можно выделить и другие не менее важные типы критического поведения. Наиболее важными представляются два типа такого поведения. Первый – быстрое и сильное изменение амплитуды колебаний цен на больших масштабах. Этот тип поведения соответствует переходу рынка из флэта в тренд. Второй тип критического поведения – резкое изменение направления тренда. В большинстве случаев на рынке изменение направления тренда происходит через промежуточную стадию флэта. Это дает участникам рынка время на анализ и принятие решений. Однако, в некоторых ситуациях промежуточная стадия отсутствует. Графические примеры обоих типов критического поведения представлены на рис. 30

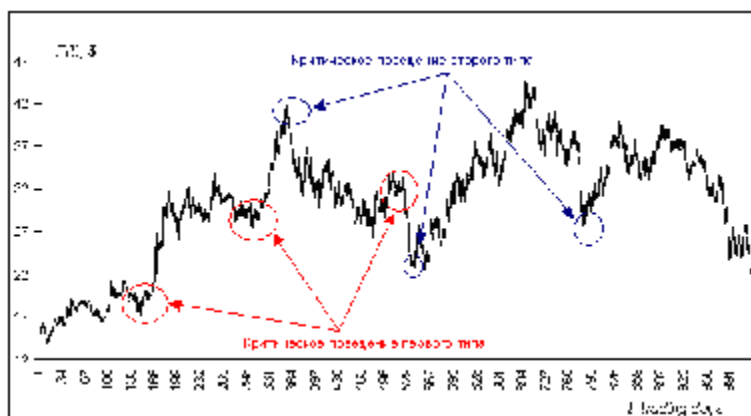


Рис. 30

Для определения моментов критического поведения первого типа воспользуемся величиной:

$$dA_i = \ln(A_i / A_{i-32}) \quad (67)$$

где

A_i – амплитуда ценовых колебаний за последние 32 точки
 A_{i-32} – амплитуда ценовых колебаний на первом предыдущем отрезке, длиной 32 точки, не пересекающемся с текущим. Эта величина имеет распределение, близкое к нормальному, со средним равным 0 и некоторой дисперсией. Поскольку нас интересуют сильные изменения амплитуды (т.е. правый край этого распределения) будем искать моменты времени, для которых значение dA превышают 9-й дециль распределения.

Тогда первым типом критического поведения цен является появление величины dA большего чем некоторое число C равное 9-му децилю распределения dA . Для большинства финансовых рядов такое поведение соответствует увеличению амплитуды колебаний цен примерно в 2,5 – 3 раза за время 10-30 дней. Исследуем временной ряд дневных изменений основного американского индекса S&P500 за период с 1994 по 2004 год. За это время на графике этого временного ряда обнаружено 28 ситуаций критического поведения первого типа. Исследуем характеристики ряда в момент непосредственно предшествующий началу критического поведения. Для анализа были выбраны 3 характеристики: dA_i , m_i и Δm_i . Оказалось, перед началом критического поведения выбранные величины находятся в достаточно узких диапазонах. Например, значение m_i оказалось в диапазоне 0.55 – 0.65 (т.е. ряд находится в состоянии флэта), а значение Δm_i было меньше нуля, т.е. наблюдалась флуктуация фрактальной структуры ряда, соответствующая рис. 20. Далее был построен предиктор по правилу: если

значения выбранных параметров превышают некоторые критические значения, то объявляется тревога (можно ожидать начала увеличения амплитуды колебаний). Проверка предиктора на истории проводилась следующим образом: если в течение 32 дней после объявления тревоги происходило критическое увеличение амплитуды колебаний ряда, то прогноз считался успешным, если ожидаемого события не происходило, то тревога считалась ложной. При проверке такого предиктора интересны две характеристики:

D - доля предсказанных кризисов (количество предсказанных к общему количеству случившихся)

L – количество ложных тревог на одну успешную.

Путем подбора критических значений параметров удалось получить следующие показатели: $D=1$ и $L=1$. Т.е. были правильно предсказаны все моменты начала критического поведения первого типа и на каждую успешную тревогу пришлась одна ложная. Отметим, что после объявления ложных тревог увеличение амплитуды все же происходило, но не превышало критического значения.

Аналогичным способом были исследованы моменты начала критического поведения второго типа. При этом оказалось, что перед началом такого поведения значение m_i падает ниже значения 0.45, а значение Δm_i становится больше нуля, т.е. наблюдаются флуктуации фрактальной структуры ряда, показанные на рисунке 26.

Таким образом, знание численных значений фрактальных показателей ряда может быть использовано для прогнозирования дальнейшего поведения временных рядов. В финансах такие прогнозы могут быть использованы как для торговли, так и для корректной оценки рисков в моменты времени, предшествующие возникновению критического поведения.

5. Заключение.

Подведем основные итоги работы. Для одномерной фрактальной функции $f(t)$ на основе амплитудной вариации $V_f(d)$ (26) введены новые фрактальные показатели: индекс фрактальности m (28) и размерность минимального покрытия D_m (29), тесно связанная с индексом m . Как предельное значение при $d \rightarrow 0$, D_m совпадает с обычной фрактальной размерностью D . Однако по сравнению с другими известными фрактальными показателями алгоритм вычисления D_m (и соответственно индекса m) имеет быстрый выход на степенной асимптотический режим для D . Численные расчеты, выполненные для ценовых рядов акций компаний, входящих в индекс Доу-Джонса, показали, что репрезентативный масштаб, необходимый для определения индекса m с приемлемой точностью, на два порядка меньше, чем, например, соответствующий масштаб для определения показателя Херста H . Это позволяет рассматривать индекс m в качестве локального фрактального показателя. Поэтому для каждого момента t временного ряда введена функция $m(t)$ как значение m , вычисленное на минимальном, предшествующем t интервале t_m . Обоснован теоретически и подтвержден численно на основе достаточно большого количества эмпирических данных тот факт, что индекс m является показателем стабильности временного ряда. Чем больше значение m , тем стабильнее ряд. При этом случай $m < 0.5$ может быть интерпретирован как тренд, а случай $m > 0.5$ - как флэт. Случай же $m \approx 0.5$ соответствует броуновскому движению. Это позволяет с помощью функции $m(t)$ протестировать исходные ценовые ряды с тем, чтобы выделить в них броуновскую компоненту. Как оказалось ее доля составляет менее 30%. Полученный результат дает оценку степени обоснованности ЕМН. Аналогичную процедуру тестирования можно применить и к различным обобщениям модели броуновского движения,

которые состоят в отказе либо от условия независимости приращений (второй постулат), либо от нормальности их распределений (первый постулат). В первом случае получаем процессы с памятью и, в частности, обобщенное броуновское движение. Во втором – движение Леви (Levy motion), имеющее бесконечную дисперсию смещения. Очевидно, что с помощью функции $m(t)$ можно провести тестирование временных рядов на предмет выявления и таких компонент.

Возможности использования разработанного локального фрактального анализа продемонстрированы на трех задачах о прогнозировании временных рядов, имеющих важное практическое значение: прогнозирование значений временного ряда, определение квантильных мер риска вложений в финансовые активы и оценка вероятности возникновения критического поведения временного ряда.

Однако построенный в работе фрактальный анализ имеет гораздо более широкую область применимости. При этом особо здесь следует сказать о техническом анализе. Дело в том, что исходное положение этой дисциплины о существовании скрытой закономерности в ценовом ряде в 80-х гг. прошлого века получило неожиданную поддержку со стороны теории динамического хаоса. В соответствии с этой теорией временной ряд, который внешне выглядит как реализация случайного процесса вполне может оказаться порожденным нелинейной динамической системой. Такие системы обычно эволюционируют в странный аттрактор, который имеет фрактальную структуру. И хотя подобные системы являются крайне неустойчивыми относительно начальных условий, они все же имеют определенный горизонт предсказуемости, в пределах которого для них возможно построение прогноза. Соответствующая процедура основана на теореме Такенса [85], которая утверждает, что если временной ряд порождается динамической системой (т.е. его значения являются функцией состояния системы), то значения этого ряда в момент t определяются некоторым числом

исторических данных этого ряда n , разделенных фиксированным интервалом. Другими словами

$$f(t) = F(f(t-1)...f(t-n)) \quad (68)$$

При этом число n примерно равно эффективному числу степеней свободы исходной системы, которое однозначно связано с размерностью соответствующего аттрактора D . Такая размерность обычно определяется либо путем разбиения исходного лагового пространства на кубы (метод box-counting), либо с помощью использования корреляционного интеграла (алгоритм Грасссбергера-Прокаччи [45]). При этом устойчивость алгоритма вычисления D играет здесь определяющее значение. Поскольку процедура определения индекса m и размерности D_m без труда обобщаются на случай функций n -переменных [36], то очевидно, что использование этих показателей для определения размерности аттрактора D будет таким же эффективным.

В дополнение к сказанному следует отметить, что построенный локальный фрактальный анализ можно с успехом использовать, например, для прогноза землетрясений [88], ишемических заболеваний [72] и т.д. Что же касается фрактального анализа многомерных функций, то он, как известно, имеет широкое применение в таких областях как теория распознавания образов [31], теория сжатия изображений [4] и т.д. Кроме того, на основе представленного анализа в общем случае можно получить более адекватное выражение для мультифрактального спектра [8], [35].

Литература.

- 1 Александров П.С., Пасынков Б.А. Введение в теорию размерности // Наука, Москва, 1973.
- 2 Батунин А.В. .Фрактальный анализ и универсальность Фейгенбаума в физике адронов // УФН, 1995, № 6, стр. 645-660.
- 3 Божокин С. В., Паршин Д.А. Фракталы и мультифракталы // РХД, Ижевск, 2001.
- 4 Бондаренко В.А. Дольников В.Л. Фрактальное сжатие изображений по Барнсли-Слоан // Атоматика и телемеханика, №5, 1994, стр. 12-20.
- 5 Борман В.Д., Зенкевич А.В., Пушкин М.А., Тронин В.Н., Троян В.И. Наблюдение фрактальных нанокластеров при импульсном лазерном осаждении золота // Письма в ЖЭТФ, 2001, т. 73, Вып. 11, с. 684-688.
- 6 Борог В.В, Буринский А.Ю., Дронов В.В. Мюонный годоскоп для исследования солнечно-земных связей в области энергий больше 10 ГэВ // Изв.РАН, сер.физ.,1995, т.59, вып.4, стр.191-194.
- 7 Булдашев Статистика для трейдеров // Компания Спутник, Москва, 2003.
- 8 Дубовиков М.М., Крянев А.В., Старченко Н.В. Размерность минимального покрытия и локальный анализ фрактальных временных рядов // Вестник РУДН, 2004, Т3, №1, стр. 81-95.
- 9 М.М.Дубовиков, А.В.Крянев, Н.В.Старченко Индекс вариации и фрактальный анализ временных рядов // Сборник научных трудов научной сессии МИФИ, Москва, 2004.
- 10 М.М.Дубовиков, А.В.Крянев, Н.В.Старченко Локальный фрактальный анализ временных рядов // Сборник научных трудов научной сессии МИФИ, Москва, 2005.
- 11 М.М.Dubovikov, A.V. Kryanev, N.V.Starchenko Variation Index and Local Fractal Analysis // материалы международной конференции «Математическое моделирование социальной и экономической динамики», Москва, 2004.

- 12 Старченко Н.В. Локальный фрактальный анализ в физических приложениях. // Препринт № 006-2005 М.: МИФИ, 2005.
- 13 Зосимов В.В., Лямшев Л.М. Фракталы в волновых процессах // УФН, 1995, № 4, стр. 361-401.
- 14 Клигене Н., Телькснис Л. Методы обнаружения моментов изменения свойств случайных процессов // Автоматика и телемеханика, 1983, №10, стр.5-56.
- 15 Кроновер Р.М. Фракталы и хаос // Постмаркет, Москва, 2000.
- 16 Медвинский А.Б., Петровский С.В., Тихонова И.А., Тихонов Д.А., Ли Б.Л., Вентурино Э., Мальхё Х., Иваницкий Г.Р. Формирование пространственно временных структур, фракталы и хаос в концептуальных экологических моделях на примере динамики взаимодействующих популяций планктона и рыбы // УФН, 2002, №1, стр. 31-66.
- 17 Олемской А.И., Флат А.Я. Использование концепции фрактала в физике конденсированной среды // УФН, 1993, № 1, 2.
- 18 Петерс Эдгар Фрактальный анализ финансовых рынков // Интернет-трейдинг, Москва, 2004.
- 19 Поликарпов М.И. Фракталы. Топологические дефекты и невылетание в решеточных калибровочных теориях // УФН, 1995, № 6, стр. 627-644.
- 20 Фракталы в физике/Под ред. А. Пьетронеро, Э. Тозатти // Мир, Москва, 1988, стр. 9.
- 21 Смирнов Б.М. Излучательные процессы с участием фрактальных структур // УФН, 1993, № 7.
- 22 Сорнетте Дидье Как предсказывать крахи финансовых рынков // Интернет-трейдинг, Москва, 2003.
- 23 Ширяев А.Н. Статистический последовательный анализ // Наука, Москва, 1976.
- 24 Abarbanel H. D. I. Analysis of Observed Chaotic Data. // Springer, New York, 1996.

- 25 Andersen T.G., Bollerslev T., Diebold F.X., Labys P., The distribution of realized exchange rate volatility // J. Amer. Statist. Assoc., forthcoming.
- 26 Bachelier L. Theory of Speculation // P. H. Cootner, Random Character of Stock Market Prices, The MIT Press, Cambridge, 1964.
- 27 Bak P, Norrelykke S.R. and Shubik M. Dynamics of money // Phys. Rev E60. 1999, pp. 2528-2532/
- 28 Benjamin F. King Market and Industry Factors in Stock Price Behavior // Journal of Business, 1966, № 39 (1).
- 29 Black F., Scholes M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities // Journal of Political Economy, 1973, №3, pp. 637-659.
- 30 C. Chen, J.S. Deponete, M.D. Fox, Fractal feature analysis in medical imaging // IEEE Trans. Med. Imaging, 1989, № 8, pp. 133-142.
- 31 Chen C., Deponete J.S., Fox M.D., Fractal feature analysis in medical imaging // IEEE Trans. Med. Imaging 1989, № 8, pp. 133-142.
- 32 Cootner P. H. Random Character of Stock Market Prices // The MIT Press, Cambridge, 1964.
- 33 Costa M. Golderberger A.L. Peng C.K. Multiscale Entropy Analisis of Complex Physiologic Time Series // Phys. Rev. lett., 2002, V.89, №6.
- 34 Dacorogna M.M., Gencay R., MGuller U.A., Olsen R.B., Pictet O.V., An Introduction to High-Frequency Finance // Academic Press, San Diego, 2001.
- 35 Dubovikov M.M, Starchenko N.S., Dubovikov M.S. Dimension of the minimal cover and fractal analysis of time series // Physica A, 2004, № 339, pp. 591-608
- 36 Dubovikov M.M., Starchenko N.S., Variation index and its applications to analysis of fractal structures // Sci. Almanac Gordon, 2003, № 1, pp. 1-30.
- 37 Fama E. F. Mandelbrot and the stable Paretian hypothesis // J. Business. 1963. № 36.
- 38 Fama E. F. The behavior of stock-market prices // J. Business, 1965, № 38.
- 39 Fama E.F. Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work // Journal of Finance, 1970, № 47.

- 40 Fama E.F. Miller M.H. The Theory of Finance // Holt, Rinehart and Winston, N.Y., 1972.
- 41 Feder J. Fractals. // Plenum Press, New York, 1988.
- 42 Friedman B.M., Laibson D.I. Economic Implications of Extraordinary Movements in Stock prices // Brookings Papers on Economic Activity, 1989, № 2.
- 43 Gencay R., Selcuk F., Whitcher B., Scaling properties of foreign exchange volatility // Physica A, 2002, № 289, pp. 249-266.
- 44 Ghashghaie S., Brewmann W., Peinke J., Talkner P., Dodge Y., Turbulent cascades in foreign exchange markets // Nature , 1996, № 381, pp. 767-770.
- 45 Grassberger P., Procaccia I. Characterization of Strange Attractors // Phys. Rev. Lett, 1983, № 50, pp. 346-349.
- 46 Guillaume D.M., Dacorogna M.M., Dave R.D., Muller U.A., Olsen R.B., Pictet O.V., From the bird's eye to the microscope: a survey of new stylized facts of the Intra-daily Foreign Exchange Markets // Finance Stochastics, 1997, № 1, pp. 95-129.
- 47 Hausdorff F. Dimension und Ausseres Mass // Mathematische Annalen, 1919, No 79, pp. 157-179.
- 48 Hosking, J. R. M. Fractional Differencing // 1981, Biometrika, № 68, pp. 165-176
- 49 Kantz H., Schreiber T. Nonlinear Time Series Analysis // Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- 50 Kendall M.G. The Analysis of Economic Time Series/P. H. Cootner. Random Character of Stock Market Prices // The MIT Press, Cambridge, 1964.
- 51 Krishnaiah P., Miao B., Review about estimation of change-points // Handbook of Statistics, 1988, v.7, pp. 375-402
- 52 Litner J. The Valuation of Risk Assets and Selection of Risk Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets // Review of Economic Statistics, 1965, № 47.
- 53 Lo A., MacKinlay A. C. Stock Market Prices Do Not Follow Random Walks: Evidence from a Simple Specification Test//Review of Financial Studies, 1988, № 1.

- 54 Mandelbrot B. B. A multifractal Walk down Wall Street // Scientific American, 1999, Feb.
- 55 Mandelbrot B. B. Sur certains prix speculatifs: faits empiriques et mode`le base sur des processus stables additifs de Paul Levy // C. R. Acad. Sci., 1962, № 254.
- 56 Mandelbrot B. B. The Fractal Geometry of Nature. // W. H. Freeman, San-Francisco, 1982.
- 57 Mandelbrot B. B. The variation of certain speculative prices // J. Business, 1963, №36.
- 58 Mandelbrot B. B. Une classe de processus stochastiques homothetiques a`soi; aplicacion a`la loi climatologique de H. E. Hurst // C. R. Acad. Sci., 1965, № 260.
- 59 Mandelbrot B. B. Van Ness. Fractional Brownian motions, fractional noises and aplications // SIAM Rev., 1968, № 10.
- 60 Mandelbrot B.B. The variation of some other speculative prices // J. Business, 1967, № 40.
- 61 Mantegna R. N., Stanley H. E. An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance. // Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- 62 Mantegna R.N., Stanley H.E., Scaling behavior in the dynamics of an economic index // Nature, 1995, 376, pp. 46-49.
- 63 Mantegna R.N., Stanley H.E., Turbulence and financial markets // Nature, 1996, № 383, pp. 587-588.
- 64 Markowitz H.M. Portfolio Selection // J. of Finance, 1952, № 7.
- 65 Merton R. Theory of Rational Option Pricing // Bell Journal of Economics and Management Science, 1973, №4, pp. 141-183.
- 66 Mirowski P. Mandelbrot's economics after a quarter century // Fractals, 1995, № 3.
- 67 Mossin J. Equilibrium in Capital Asset Market // Econometrica, 1966, № 34.
- 68 Murphy J. Technical Analysis of the Financial Markets // Institute of Finance, N.Y., 1999.
- 69 Novak M.M. (ed.) Fractals in the Natural and Applied Sciences // IFIB, a-41, North Holland, 1994

- 70 Osborne M. F. Brownian motion in the stock market // P. H. Cootner Random Character of Stock Market Prices, The MIT Press, Cambridge, 1964.
- 71 Page E.S. A test for a change in a parameter occurring at an unknown point // Biometrika, 1955, v.42, №4, p.523-527.
- 72 Pedro Bernaola-Galvan, Plamen Ch. Ivanov, Luis A. Nunes Amaral, and H. Eugene Stanley Scale Invariance in the Nonstationarity of Human Heart Rate // Phys. Rev. Let., V87, № 16, pp. 168105-1 - 168105-4.
- 73 Peitgen H. O., Richter P. H. The Beauty of Fractals. // Shpringer-Verlag, Berlin, 1996.
- 74 Peters E. E. Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics. // Wiley, New-York, 1994.
- 75 Rosenberg B., Marathe V. The Prediction of Investment Risk: Systematic and Residual Risk // Proceedings of the Seminar on the Analysis of Security Prices. Chicago, Center for Research in Security Prices, 1975.
- 76 Ross S.A. The Arbitrage Theory of Capital Assets Pricing // Journal of Finance, 1976, № 13.
- 77 Samuelson P.A. Efficient Portfolio Selection for Pareto-Levy Investments // Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1967, June.
- 78 Scaling and correlation in financial time series / P. Gopikrishnan, V. Plerou, Y. W. Liu et al // Physica A, 2000, No 287, pp. 362-373.
- 79 Schroeder M. Fractals, Chaos, Power-laws. // W. H. Freeman, New York, 1991.
- 80 Sharp W.F. Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk // J. of Finance, 1964, № 19.
- 81 Sharp W.F. Factors in N.Y. Stock Exchange Securiry Returns, 1931-1979 // Journal of Portfolio Management, 1984, № 11 (1).
- 82 Sharp W.F. Portfolio Theory and Capital Markets // McGraw-Hill, N.Y., 1970.
- 83 Siller R.J. Market Volatility // The MIT Press, Cambridge, 1989.

- 84 Scafetta N. and B.J. West Solar Flare Intermittency and Earth's Temperature Anomalies // Phys. Rev. Lett., 2003, v.90, № 24, pp.248701.
- 85 Takens F. Dynamical Systems and Turbulence // Springer, Berlin, 1981.
- 86 Turner A.L., Weigel E.J. An Analysis of Stock Market Volatility // Russell Research Commentaries. Frank Russell Company, Tacoma: 1990.
- 87 Wolf D. Noise in Physical systems // Springer, New-York, 1978.
- 88 Yulmetyev R., Gafarov F., Hanggi P., Nigmatullin R. and Kayumov S., Possibility between earthquake and explosion seismogram differentiation by discrete stochastic non-Markov processes and local Hurst exponent analysis // Phys. Rev. E, 2001, № 64, pp. 066132.