Тема 2

Симметричное простое случайное блуждание

Напомним определение случайного блуждания. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. Положим

$$S_0 = 0,\ S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,\ n \in \mathbb{N}.$$

Последовательность $\{S_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ называется *случайным блужданием*. Числовые характеристики $\mathbf{E}X_1$, $\mathbf{D}X_1$ называются соответственно *сносом* и *шаговой дисперсией* случайного блуждания. Величину S_n можно трактовать как положение блуждающей на числовой оси частицы в момент времени n.

Случайные блуждания являются одним из важных объектов исследований в теории вероятностей. Так, основные результаты классической теории вероятностей посвящены случайному блужданию с нулевым сносом и конечной положительной шаговой дисперсией σ^2:

1) усиленный закон больших чисел:

$$\frac{S_n}{n} \to 0 \text{ п.н.};$$

2) центральная предельная теорема: при всех $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \le x\right) = \Phi\left(x\right),$$

где $\Phi\left(x\right)$ – функция Лапласа, т.е.

$$\Phi\left(x\right) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-u^2}{2}\right) du,\ x \in \mathbb{R}.$$

Модель случайных блужданий возникает в различных прикладных областях теории вероятностей, таких как теория массового обслуживания, теория страхования, финансовая математика. При этом требуется знать вероятностные свойства не только величины S_n, но и функционалов, зависящих от всей траектории случайного блуждания до момента n, т.е. от $S_0, S_1, \ldots, S_n$ (примером такого функционала является $\max_{0\le i\le n} S_i$). Другими словами, требуется рассматривать случайное блуждание как объект теории случайных процессов.

В этой лекции внимание будет уделено частному случаю случайных блужданий, когда шаг случайного блуждания принимает всего два значения 1 и (-1) с одинаковыми вероятностями. Такое блуждание называется *симметричным простым случайным блужданием*.

Случайную величину S_n можно интерпретировать как положение в момент времени n частицы, блуждающей по целочисленным точкам числовой оси. Частица совершает скачок в каждый момент времени $k \in \mathbb{N}$, причем она совершает с вероятностью $1/2$ скачок в соседнюю точку справа и с такой же вероятностью – в соседнюю точку слева. В момент времени 0 частица находится в точке 0.

При изображении случайного блуждания удобно соединять все соседние точки с координатами (n, S_n) и $(n+1, S_{n+1})$, $n \in \mathbb{N}_0$, отрезками прямых (см. рис. 1). Полученную ломаную называют *путем* блуждающей частицы. Обозначим $S(t)$, $t \geq 0$, функцию, график которой совпадает с путем. Очевидно, $S(n) = S_n$ при $n \in \mathbb{N}_0$.

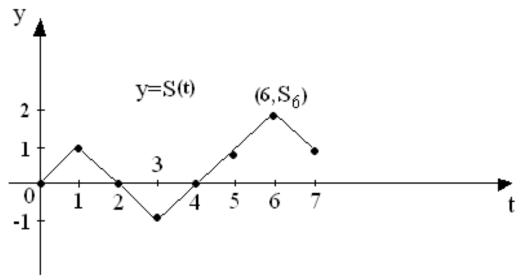

Рис. 1: Случайное блуждание

Число различных путей, которые проходит блуждающая частица за время n, равно 2^n, и все они, очевидно, равновозможны. Поэтому расчет любых вероятностей, связанных со случайной последовательностью $\{S_n\}$, сводится к подсчету числа соответствующих путей.

Покажем, например, что если четности $x \in \mathbb{Z}$ и n, совпадают, то

$$p_{n,x} := \mathbf{P}(S_n = x) = \frac{C_n^{(n+x)/2}}{2^n}. \tag{1}$$

Действительно, случайное событие $\{S_n = x\}$, например при $x > 0$, означает, что число положительных слагаемых в сумме $\sum_{i=1}^n X_i$ на x единиц больше числа отрицательных слагаемых. Следовательно, число положительных слагаемых равно $(n+x)/2$, а число различных расположений этих слагаемых в указанной сумме (а значит, число различных путей блуждания) равно $C_n^{(n+x)/2}$, откуда и следует формула (1).

Иногда вместо символа вероятности $\mathbf{P}$ будем использовать символ $\mathbf{P}^{(y)}$, указывающий на то, что блуждание начинается не в точке 0, а в точке $y \in \mathbb{Z}$, т.е. $S_0 = y$, $S_n = y + \sum_{i=1}^n X_i$, $n \in \mathbb{N}$. Из формулы (1) легко следует, что при x, $y \in \mathbb{Z}$

$$\mathbf{P}^{(y)}(S_n = x) = \mathbf{P}(S_n = x - y) = \frac{C_n^{(n+x-y)/2}}{2^n}.$$

Введем *минимум* и *максимум* случайного блуждания:

$$L_n = \min_{0 \leq i \leq n} S_i, \qquad M_n = \max_{0 \leq i \leq n} S_i.$$

Введем также *момент первого достижения* состояния $x \in \mathbb{Z}$:

$$\tau_x = \min\{n \in \mathbb{N} : S_n = x\}.$$

В первых трех леммах находятся различные вероятности, связанные с блужданием частицы на положительной (отрицательной) полуоси.

Лемма 1 (принцип отражения) . *При $x,\, y \in \mathbb{N}$ число путей, ведущих из точки $(0,y)$ в точку (n,x), которые касаются или пересекают ось $0t$, совпадает с числом путей, ведущих из точки $(0,-y)$ в точку (n,x). Другими словами,*

$$\mathbf{P}^{(y)}\left(S_n = x,\ L_n \leq 0\ \right) = \mathbf{P}^{(-y)}\left(S_n = x\right).$$

Доказательство. Рассмотрим путь, ведущий из точки $(0,y)$ в точку (n,x) и касающийся или пересекающий ось $0t$. И рассмотрим часть этого пути до момента τ_0 (первого достижения состояния 0). Отразим эту часть пути симметрично относительно оси $0t$ (см. рис. 2), тогда мы получим путь, ведущий из точки $(0,-y)$ *в* точку (n,x).

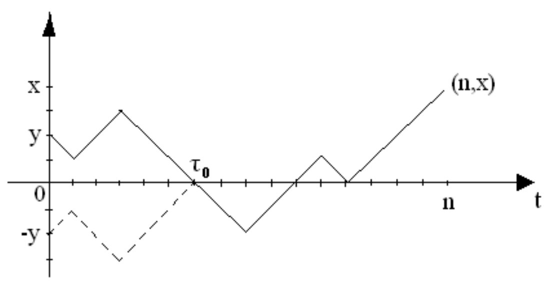

Рис. 2: Принцип отражения

Очевидно, что полученное соответствие путей является взаимно однозначным. Лемма доказана.

Следствие 1. *При $x,\, y \in \mathbb{N}$*

$$\mathbf{P}^{(y)}\left(S_n = x,\ L_n > 0\ \right) = \mathbf{P}^{(y)}\left(S_n = x\right) - \mathbf{P}^{(-y)}\left(S_n = x\right).$$

Лемма 2. *При $x \in \mathbb{N}$*

$$\mathbf{P}\left(S_1 > 0,\ S_2 > 0, \ldots,\ S_{n-1} > 0,\ S_n = x\right) = \frac{1}{2}\left(p_{n-1,x-1} - p_{n-1,x+1}\right).$$

Доказательство. Заметим, что

$$\mathbf{P}\left(S_1 > 0,\ S_2 > 0, \ldots,\ S_{n-1} > 0,\ S_n = x\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\mathbf{P}^{(1)}\left(S_1 > 0,\ S_2 > 0, \ldots,\ S_{n-2} > 0,\ S_{n-1} = x\right). \qquad (2)$$

В силу следствия 1

$$\mathbf{P}^{(1)}\left(S_1 > 0,\ S_2 > 0, \ldots,\ S_{n-2} > 0,\ S_{n-1} = x\right) =$$

$$= \mathbf{P}^{(1)}\left(S_{n-1}=x\right) - \mathbf{P}^{(-1)}\left(S_{n-1}=x,\ \right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(S_{n-1}=x-1\right) - \mathbf{P}\left(S_{n-1}=x+1\right) = p_{n-1,x-1} - p_{n-1,x+1}. \qquad (3)$$

Из соотношений (2) и (3) следует утверждение леммы.

Важное значение в дальнейшем имеет вероятность

$$u_{2n} = \mathbf{P}\left(\ S_{2n}=0\right) = \frac{1}{2^{2n}} C_{2n}^{n}.$$

Найдем асимптотику этой вероятности при $n \to \infty$. Вспомним формулу Стирлинга:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n},\ n \to \infty.$$

Тогда

$$u_{2n} = \frac{1}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{\sqrt{4\pi n}\,(2n)^{2n} e^{-2n}}{2^{2n}\left(\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}\right)^2}.$$

Следовательно, при $n \to \infty$

$$u_{2n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}. \qquad (4)$$

Лемма 3. *Справедливо следующее равенство*:

$$\mathbf{P}\left(S_1 \neq 0,\ S_2 \neq 0, \ldots,\ S_{2n} \neq 0\right) = u_{2n}.$$

Доказательство. Заметим, что

$$\mathbf{P}\left(S_1 \neq 0,\ S_2 \neq 0, \ldots,\ S_{2n} \neq 0\right) = 2\mathbf{P}\left(S_1 > 0,\ S_2 > 0, \ldots,\ S_{2n} > 0\right). \qquad (5)$$

Далее, по лемме 2

$$\mathbf{P}\left(S_1 > 0,\ S_2 > 0, \ldots,\ S_{2n} > 0\right) =$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(S_1 > 0,\ S_2 > 0, \ldots,\ S_{2n-1} > 0,\ S_{2n} = 2r\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\infty} \left(p_{2n-1,2r-1} - p_{2n-1,2r+1}\right) = \frac{1}{2} p_{2n-1,1}. \qquad (6)$$

По формуле полной вероятности

$$u_{2n} = \mathbf{P}\left(\ S_{2n}=0\right) = \frac{1}{2}\mathbf{P}\left(\ S_{2n-1}=1\right) + \frac{1}{2}\mathbf{P}\left(\ S_{2n-1}=-1\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(\ S_{2n-1}=1\right) = p_{2n-1,1}. \qquad (7)$$

Из соотношений (5)-(7) следует утверждение леммы.

Наша основная задача – установить предельные теоремы для различных функционалов от траекторий случайного блуждания. Сначала мы установим законы арксинуса.

Положим
$$\tau(n) = \max\{i : S_i = 0,\ 0 \le i \le n\}.$$
Ясно, что $\tau(n)$ – момент последнего (до момента n) попадания блуждающей частицы в состояние 0.

Лемма 4. *При* $k = 0, 1, \ldots, n$
$$\mathbf{P}(\tau(2n) = 2k) = u_{2k}u_{2n-2k}.$$

Доказательство. Число путей, удовлетворяющих соотношениям $S_{2k} = 0,\ S_{2k+1} \ne 0,\ \ldots,\ S_{2n} \ne 0$, равно произведению числа путей, ведущих из точки $(0,0)$ в точку $(2k,0)$, на число путей, которые выходят из точки $(0,0)$ и в течение всего времени $2n-2k$ не касаются и не пересекают оси $0t$. Следовательно, по определению u_{2k} и по лемме 3 получаем, что
$$\mathbf{P}(S_{2k} = 0,\ S_{2k+1} \ne 0, \ldots,\ S_{2n} \ne 0) =$$
$$= 2^{2k}\mathbf{P}(S_{2k} = 0)\, 2^{2n-2k}\mathbf{P}(\ S_1 \ne 0, \ldots,\ S_{2n-2k} \ne 0)\, 2^{-2n} = u_{2k}u_{2n-2k}.$$
Лемма доказана.

Теорема 1 (*закон арксинуса для последнего попадания*). *При* $0 < x_1 < x_2 < 1$
$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(x_1 < \frac{\tau(2n)}{2n} < x_2\right) = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}\Big|_{x_1}^{x_2}.$$

Доказательство. Ввиду леммы 4
$$\mathbf{P}\left(x_1 < \frac{\tau(2n)}{2n} < x_2\right) = \sum_{x_1<k/n<x_2}\mathbf{P}(\tau(2n) = 2k) = \sum_{x_1<k/n<x_2} u_{2k}u_{2n-2k}. \tag{8}$$
Из соотношения (4) следует, что для произвольного $\varepsilon > 0$ и всех достаточно больших (в зависимости от ε) n
$$\frac{1-\varepsilon}{\sqrt{\pi k}} \le u_{2k} \le \frac{1+\varepsilon}{\sqrt{\pi k}}, \qquad \frac{1-\varepsilon}{\sqrt{\pi(n-k)}} \le u_{2n-2k} \le \frac{1+\varepsilon}{\sqrt{\pi(n-k)}},$$
если $x_1 < k/n < x_2$. Поэтому
$$\sum_{x_1<\frac{k}{n}<x_2}\frac{(1-\varepsilon)^2}{\pi\sqrt{k(n-k)}} \le \sum_{x_1<\frac{k}{n}<x_2} u_{2k}u_{2n-2k} \le \sum_{x_1<\frac{k}{n}<x_2}\frac{(1+\varepsilon)^2}{\pi\sqrt{k(n-k)}}.$$
Но
$$\sum_{x_1<k/n<x_2}\frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} = \sum_{x_1<k/n<x_2}\frac{1}{\sqrt{(k/n)(1-(k/n))}}\frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\to} \int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$
(мы воспользовались тем, что вторая сумма является интегральной суммой для последнего интеграла). Переходя в (8) к пределу при $n \to \infty$ и учитывая, что
$$\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = 2\arcsin\sqrt{x}\Big|_{x_1}^{x_2},$$

получаем, что

$$(1-\varepsilon)^2\,\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}|_{x_1}^{x_2} \le \liminf_{n\to\infty}\sum_{x_1<\frac{k}{n}<x_2} u_{2k}u_{2n-2k} \le$$

$$\le \limsup_{n\to\infty}\sum_{x_1<\frac{k}{n}<x_2} u_{2k}u_{2n-2k} \le (1+\varepsilon)^2\,\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}|_{x_1}^{x_2}.$$

Откуда, переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, находим, что

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{x_1<\frac{k}{n}<x_2} u_{2k}u_{2n-2k} = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}|_{x_1}^{x_2}. \tag{9}$$

Из соотношений (8) и (9) следует утверждение теоремы.

Положим

$$\mu\,(n) = \lambda\left(\{t : S\,(t) > 0,\ 0 \le t \le n\}\right),$$

где $\lambda\,(A)$ – мера Лебега множества $A\in\mathcal{B}\,(\mathbb{R})$. Ясно, что $\mu\,(n)$ можно трактовать, как время проведенное блуждающей частицей на положительной полуоси (до момента n).

Лемма 5 . *При* $k=0,1,\ldots,n$

$$\mathbf{P}\left(\mu\,(2n)=2k\right) = u_{2k}u_{2n-2k}.$$

Доказательство. Предположим, что частица в интервале времени от 0 *до* $2n$ провела на положительной полуоси $2k$ единиц времени. Если $\tau_0 = 2r$ и частица до этого момента находилась на положительной полуоси, то в оставшееся время $2\,(n-r)$ она провела на этой полуоси $2\,(k-r)$ единиц времени; если же до момента τ_0 она находилась на отрицательной полуоси, то в оставшееся время $2\,(n-r)$ она провела на этой полуоси $2k$ единиц времени. Положим при $r\in\mathbb{N}$

$$f_{2r} = \mathbf{P}\left(\tau_0 = 2r\right)$$

и при $k=0,1,\ldots,n$

$$b_{2k,2n} = \mathbf{P}\left(\mu\,(2n)=2k\right).$$

Из сказанного следует по формуле полной вероятности, что

$$\mathbf{P}\left(\mu\,(2n)=2k\right) = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k} f_{2r}b_{2k-2r,2n-2r} + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n-k} f_{2r}b_{2k,2n-2r}. \tag{10}$$

Воспользуемся теперь методом математической индукции по n. При $n=1$ утверждение леммы, очевидно, выполняется. Предположим, что при $m=1,2,\ldots,n-1$

$$\mathbf{P}\left(\mu\,(2m)=2k\right) = u_{2k}u_{2m-2k}. \tag{11}$$

Тогда в силу соотношения (10)

$$\mathbf{P}\left(\mu\,(2n)=2k\right) = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k} f_{2r}u_{2k-2r}u_{2n-2k} + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n-k} f_{2r}u_{2k}u_{2n-2r-2k} =$$

$$= \frac{1}{2} u_{2n-2k} \left(\sum_{r=1}^{k} f_{2r} u_{2k-2r} \right) + \frac{1}{2} u_{2k} \left(\sum_{r=1}^{n-k} f_{2r} u_{2n-2r-2k} \right).$$

Снова применяя формулу полной вероятности, можно показать, что

$$u_{2k} = \sum_{r=1}^{k} f_{2r} u_{2k-2r}.$$

Из двух последних соотношений следует, что

$$\mathbf{P} \left(\mu \left(2n \right) = 2k \right) = \frac{1}{2} u_{2k} u_{2n-2k} + \frac{1}{2} u_{2k} u_{2n-2k} = u_{2k} u_{2n-2k}.$$

Это означает справедливость соотношения (11) при $m = n$. Лемма доказана.

Теорема 2 (*закон арксинуса для времени пребывания*). *При* $0 < x_1 < x_2 < 1$

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P} \left(x_1 < \frac{\mu \left(2n \right)}{2n} < x_2 \right) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x} |_{x_1}^{x_2}.$$

Доказательство. Следует воспользоваться леммой 5 и повторить рассуждения доказательства теоремы 1.

Замечание 1. При игре в волейбол двух команд A и B одного уровня каждое очко выигрывается командой A (или B) с вероятностью $1/2$. Пусть S_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, означает разность числа очков, набранных командой A и командой B в результате i розыгрышей. На первый взгляд кажется, что выигрышная ситуация для команды A (когда $S_i > 0$) должна довольно быстро сменяться выигрышной ситуацией для команды B. На самом деле, с большой вероятностью команда A (или B) будет выигрывать большую часть игры. Подтверждением этому служат теоремы 1 и 2.

Установим теперь предельную теорему для максимума случайного блуждания. Для этого нам потребуется вспомогательное утверждение, доказывающееся аналогично лемме 1.

Лемма 6. *При* $x \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{P} \left(M_n \geq x \right) = 2\mathbf{P} \left(S_n > x \right) + \mathbf{P} \left(S_n = x \right).$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\mathbf{P} \left(M_n \geq x \right) = \mathbf{P} \left(S_n = x \right) + \mathbf{P} \left(S_n > x, \ M_n \geq x \right) + \mathbf{P} \left(S_n < x, \ M_n \geq x \right).$$

Заметим, что число путей, удовлетворяющих условию $\{S_n > x, \ M_n \geq x\}$ совпадает с числом путей, удовлетворяющих условию $\{S_n < x, \ M_n \geq x\}$. Действительно (см. рис. 3), если $M_n \geq x$, то $\tau_x \leq n$; число путей, ведущих за время $n - \tau$ из точки x в точки, лежащие не ниже x, совпадает с числом путей, ведущих в точки, лежащие не выше x. Следовательно,

$$\mathbf{P} \left(S_n > x, \ M_n \geq x \right) = \mathbf{P} \left(S_n < x, \ M_n \geq x \right)$$

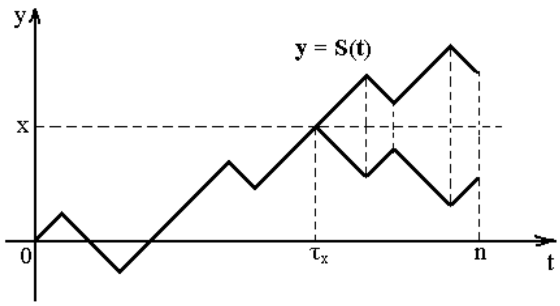

Рис. 3: Принцип отражения

и

$$\mathbf{P}\left(M_n \geq x\right) = 2\mathbf{P}\left(S_n > x,\ M_n \geq x\right) + \mathbf{P}\left(S_n = x\right).$$

Откуда, учитывая, что $\{S_n > x,\ M_n \geq x\} = \{S_n > x\}$, получаем утверждение леммы.

Теорема 3. *При $x > 0$ справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{M_n}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) = 2\Phi\left(x\right) - 1.$$

Доказательство. В силу леммы 6

$$\mathbf{P}\left(M_n \geq \left\lfloor \sigma\sqrt{n}x \right\rfloor\right) = 2\mathbf{P}\left(S_n > \left\lfloor \sigma\sqrt{n}x \right\rfloor\right) + \mathbf{P}\left(S_n = \left\lfloor \sigma\sqrt{n}x \right\rfloor\right). \qquad (12)$$

По центральной предельной теореме

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(S_n \leq \sigma\sqrt{n}x\right) = \Phi\left(x\right).$$

Поэтому из (12) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{M_n}{\sigma\sqrt{n}} \geq x\right) = 2\left(1 - \Phi\left(x\right)\right),$$

что равносильно утверждению теоремы.