

ПРИМЕНЕНИЕ ВЕЙВЛЕТ- ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ АНАЛИЗА ЭКОНОМИЧЕСКИХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Бурнаев Е.В.

1. ВВЕДЕНИЕ

Данные учебные материалы посвящены анализу временных рядов с помощью вейвлет преобразования, т.е. разложения одномерного сигнала по базису, сконструированному из солитоноподобной функции (вейвлета) посредством ее растяжений (сжатий) и переносов вдоль оси времени. Считается, что основные принципы вейвлет анализа были впервые изложены в работе [21], и с тех пор вейвлет анализ стал одним из самых популярных разделов математики и ее приложений. Вейвлет преобразование разработано для решения задач, оказавшихся “не по зубам” традиционному преобразованию Фурье. В настоящее время вейвлет преобразование находит все более широкое применение в обработке временных рядов, будь это Интернет трафик или биржевые котировки, обработке данных дистанционного зондирования, распознавании образов и речи, задачах связи, теоретической физике и математике, сжатии изображений и мультимедиа-информации и т.д.

Основная идея вейвлет преобразования отвечает специфике многих временных рядов, демонстрирующих эволюцию во времени своих основных характеристик – среднего значения, дисперсии, периодов, амплитуд и фаз гармонических компонент. Подавляющее большинство процессов, изучаемых в различных областях знаний, имеют вышеперечисленные особенности.

Теория и практика вейвлет анализа описана в многочисленных книгах и статьях. Хорошим введением в теорию и ее приложения являются работы [2], [4], [5], [8-16], [20], [22], [25]. Применение вейвлетов в математической статистике и анализе временных рядов изложено в работах [1], [26], [27], [28], [29]. В работах [6], [7], [18] описаны пакеты для подсчета вейвлет преобразования, входящие в основные системы компьютерной математики.

К сожалению, на русском языке не опубликовано ни одного учебного пособия, посвященного применению вейвлет преобразования для анализа экономических временных рядов. Данные учебные материалы, посвященные практической стороне использования вейвлет преобразования и ориентированные на исследование экономических временных рядов, призваны в какой-то мере устранить этот недостаток.

Рассматривается как непрерывное, так и дискретное вейвлет преобразование. Освящены основные теоретические свойства вейвлет преобразования. Отметим, что дискретное вейвлет преобразование вводится с использованием понятия кратномасштабного анализа. Хотя такое определение довольно сложно и требует определенных познаний в

математическом анализе, оно наиболее полно отражает “физический смысл” дискретного вейвлет преобразования и помогает понять, откуда при расчетах возникают масштабные и вейвлет фильтры. Подробно рассмотрены практические аспекты подсчета вейвлет преобразования. Примеры применения проиллюстрированы как на модельных, так и на реальных временных рядах.

При изложении будут использоваться следующие буквенные сокращения:

- БЦ – бизнес цикл
- ДВП – дискретное вейвлет преобразование
- ПДВП – периодическое дискретное вейвлет преобразование
- ДВС – дискретный вейвлет спектр
- ПФ – преобразование Фурье
- СФ – спектр Фурье

Если не указаны пределы интегрирования (суммирования), то интегрирование (суммирование) ведется по \mathbf{R} (\mathbf{Z}).

2. Непрерывное вейвлет преобразование

2.1. Преобразование сигналов

Математические преобразования применяются к сигналу для того, чтобы получить о нем какую-то дополнительную информацию, недоступную в исходном виде. Среди многих известных преобразований сигналов наиболее используемым является преобразование Фурье (ПФ).

Большинство сигналов, встречающихся на практике, представлены во временной области, т.е. сигнал есть функция времени. Таким образом, при отображении сигнала на графике одной из координат (независимой) является ось времени, а другой координатой (зависимой) является ось амплитуд. Это представление сигнала называется амплитудно-временным. Для большинства приложений амплитудно-временное представление не является наилучшим. Во многих случаях наиболее значимая информация скрыта в частотной области. Частотный спектр есть совокупность частотных (спектральных) компонент. Спектр показывает наличие в сигнале гармоник с определенными частотами.

Как известно, частота измеряется в Герцах [Гц] или в числе периодов в единицу времени. На рис. 1 изображены три синусоиды с частотами 3, 10 и 50 [Гц]. Частотный состав сигнала определяется с помощью спектра сигнала на основе ПФ. Пусть $y(t) \in L^2(\mathbf{R})$ - анализируемый сигнал. ПФ сигнала задается формулой

$$\hat{y}(\omega) = \int \exp(-i \cdot \omega \cdot t) \cdot y(t) dt . \quad (1)$$

Спектр Фурье (СФ) сигнала равен

$$P(\omega) = |\hat{y}(\omega)|^2 , \quad (2)$$

причем [10]

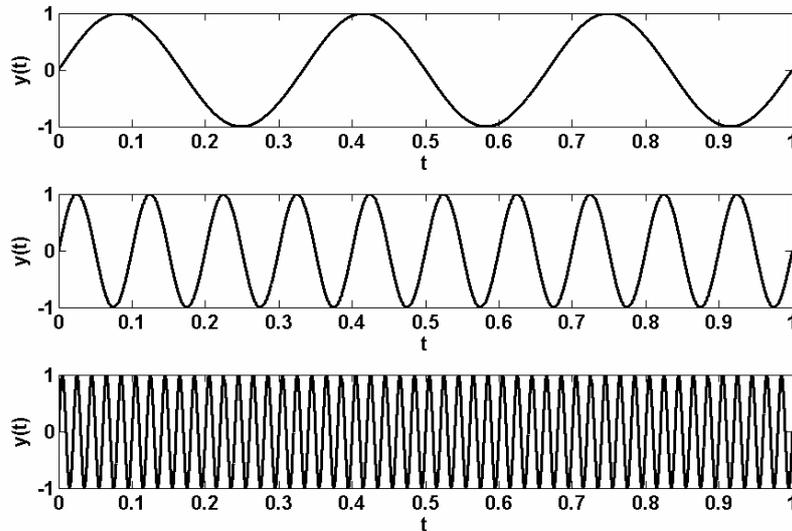


Рис. 1. Синусоиды с частотами 3, 10 и 50 [Гц]

$$\int y^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int P(\omega) d\omega, \quad (3)$$

т.е. СФ показывает, на каких частотах ω сосредоточена энергия сигнала. Заметим, что ω является циклической частотой, значение же частоты в [Гц] равно $f = \omega/2\pi$.

Пусть $y(t) = A \cdot \cos(i \cdot \omega_0 \cdot t)$ - косинусоида с частотой ω_0 , тогда $P(\omega) = \pi^2 \cdot A^2 \cdot (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$, где $\delta(x)$ - дельта функция. Значит, СФ выявляет гармоники на частотах ω_0 и $-\omega_0$, как и должно быть. Этот пример демонстрирует замечательную способность ПФ фокусировать в точку “размазанную” по времени информацию о периодичности функции при переходе из временной области в частотную. Достигается это за счет того, что ядро ПФ, т.е. функция $\exp(-i \cdot \omega \cdot t)$, не локализовано во времени, но имеет предельную локализацию в частотной области. Это обстоятельство и делает ПФ отличным инструментом для изучения процессов, свойства которых не меняются со временем (в нашем примере это обеспечивается условиями $A = \text{const}$ и $\omega_0 = \text{const}$).

В реальности нет непрерывных сигналов, все сигналы задаются дискретно, отсчетами. Пусть $y_n = y(n \cdot t_s)$, $n = 0, 1, \dots, L-1$ - известные отсчеты исследуемого сигнала $y(t)$, измеренные с частотой дискретизации f_s , т.е. $t_s = 1/f_s$. ПФ дискретного сигнала вычисляется по формуле

$$\hat{y}_k = \sum_{n=0}^{L-1} y_n \cdot \exp\left(-\frac{i \cdot 2\pi \cdot k \cdot n}{L}\right), \quad k = 0, 1, \dots, L-1, \quad (4)$$

при этом СФ

$$P(f_k) = |\hat{y}_k|^2, \quad k = 0, 1, \dots, L-1, \quad (5)$$

является линейчатым со значениями в абсциссах $f_k = \frac{k}{L} \cdot f_s$ [Гц], $k = 0, 1, \dots, L-1$. Выполняется закон сохранения энергии сигнала

$$\sum_{n=0}^{L-1} y_n^2 = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} P(f_k) \quad (6)$$

На рис. 2 изображен СФ синусоиды с частотой 50 [Гц]. Видно, что СФ имеет пик не только на частоте 50 [Гц], но и на частоте 950 [Гц]. Причина заключается в том, что для вещественного сигнала $\hat{y}_k = \overline{\hat{y}_{L-k}}$ при $1 \leq k < L/2$ (\bar{a} обозначает комплексное сопряжение числа a), т.е. СФ симметричен. Значит, при построении СФ достаточно отображать коэффициенты $P(f_k)$ при $k = 0, 1, \dots, \lfloor L/2 \rfloor$ ($\lfloor x \rfloor$ обозначает ближайшее снизу целое к x), остальные коэффициенты все равно не несут новой информации. Таким образом, по СФ дискретного сигнала можно выделить гармоники, частоты которых лежат на отрезке $[0; \pi \cdot f_s]$ (на отрезке $[0; f_s/2]$, если выражать частоты в [Гц]). Реальные сигналы обычно состоят из множества гармоник и редко имеют такие простые СФ, как на рис. 2.

Частотная информация крайне необходима для более полного анализа сигналов. Дело в том, что зачастую информация, не заметная во временном представлении, проявляется в частотном представлении. Так бывает, например, с электрокардиограммой (ЭКГ). Типичный вид ЭКГ хорошо известен кардиологам. Любое значительное отклонение от него рассматривается как патология. Эта патология, однако, не всегда может быть заметна во временном представлении сигнала. Поэтому в последних моделях электрокардиографов для анализа используется и частотное представление сигнала.

Кроме ПФ существует и много других часто применяемых преобразований сигнала. Примерами являются преобразование Гильберта, оконное ПФ, распределение Вигнера, преобразование Уолша, вейвлет преобразование и многие другие. Для каждого преобразования можно указать наиболее подходящую область применения, достоинства и недостатки, и вейвлет преобразование (ВП) не является в этом смысле исключением.

Для лучшего понимания потребности в ВП рассмотрим подробнее ПФ и его недостатки. ПФ является обратимым образованием [10]

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int \exp(i \cdot \omega \cdot t) \cdot \hat{y}(\omega) d\omega \quad (7)$$

или

$$y_n = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} \hat{y}_k \cdot \exp\left(\frac{i \cdot 2\pi \cdot k \cdot n}{L}\right), \quad n = 0, 1, \dots, L-1. \quad (8)$$

Однако только одно из представлений доступно для нас в каждый момент времени: либо частотное, либо временное. Возникает естественный вопрос: возможно ли получить совместное частотно - временное

представление сигнала? Напомним, что СФ выявляет наличие той или иной частоты в сигнале. По СФ нельзя узнать, в какой момент времени возникла (исчезла) та или иная частота. Впрочем, эта информация и не требуется, если сигнал стационарный.

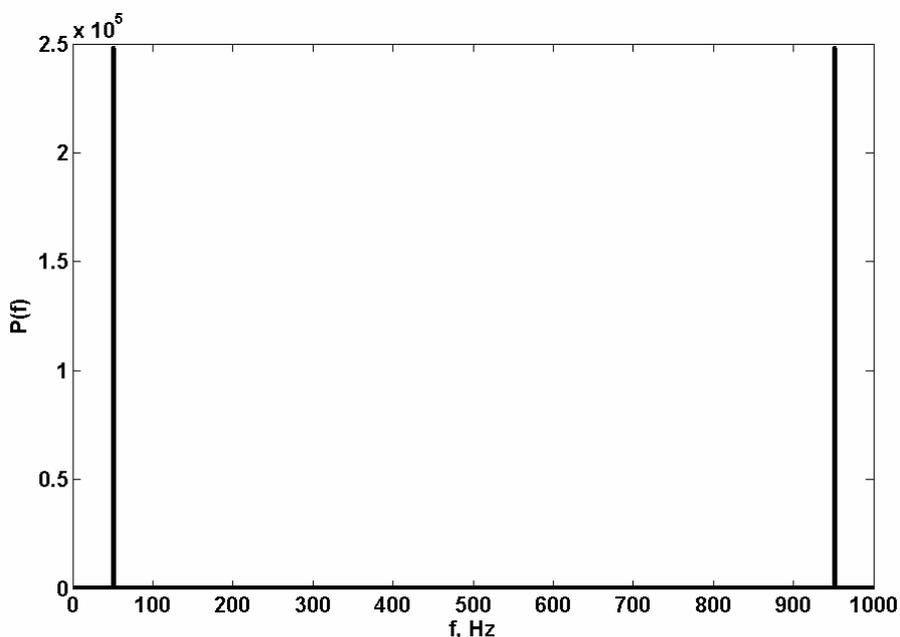


Рис. 2. СФ синусоиды с частотой 50 [Гц]

Обсудим концепцию стационарности, так как она одна из наиболее важных при анализе сигналов. Стационарными называются сигналы, частотное наполнение которых не меняется со временем. Поэтому при частотном анализе таких сигналов не требуется информация о том, в какой момент времени возникла (исчезла) та или иная частота – частоты присутствуют в сигнале на протяжении всей его длительности.

Сигнал $y(t) = \cos(10 \cdot 2\pi \cdot t) + \cos(25 \cdot 2\pi \cdot t) + \cos(50 \cdot 2\pi \cdot t) + \cos(100 \cdot 2\pi \cdot t)$, изображенный на рис. 3, является стационарным, так как содержащиеся в нем частоты 10, 25, 50 и 100 [Гц] не меняются со временем. На этом же рис. изображен СФ этого сигнала. Очевидно, по СФ легко можно определить частотные составляющие сигнала. На рис. 4 показан нестационарный сигнал $y(t) = \cos(f(t) \cdot 2\pi \cdot t)$ и его СФ, где

$$f(t) = \begin{cases} 100, t \in [0; 0.3] \\ 50, t \in [0.3; 0.6] \\ 25, t \in [0.6; 0.8] \\ 10, t \in [0.8; 1] \end{cases}.$$

По сути, этот сигнал состоит из четырех гармоник с

разными частотами, встречающимися на четырех различных интервалах. Как видно из СФ, все четыре частотных компоненты могут быть достаточно точно определены по соответствующим им максимумам. “Ложные” пики (по бокам основных максимумов) имеют небольшую величину в силу того, что частота сигнала изменяется редко. Заметим, что

пики, соответствующие высокочастотным гармоникам, больше и лучше локализованы, чем пики, соответствующие низкочастотным гармоникам. Это связано с тем, что “время жизни” высокочастотных гармоник больше. Все кажется правильным - СФ имеет четыре пика, соответствующие четырем гармоникам, присутствующим в сигнале. Впрочем, не все уж так хорошо, поскольку СФ показывает, что все четыре гармоники существуют в течение всего промежутка времени. Сравнив СФ сигналов на рис. 3 и рис. 4, мы не обнаружим качественной разницы. На обоих графиках выделяются четыре частотные составляющие 10, 25, 50 и 100 [Гц]. СФ двух столь разных сигналов оказались похожи. Поэтому, ПФ непригодно для анализа нестационарных сигналов, за одним исключением: ПФ может использоваться для анализа нестационарных сигналов, если нас интересует лишь информация о частотном составе сигнала, а время существования частотных составляющих неважно. В противном случае надо искать более подходящий метод анализа.

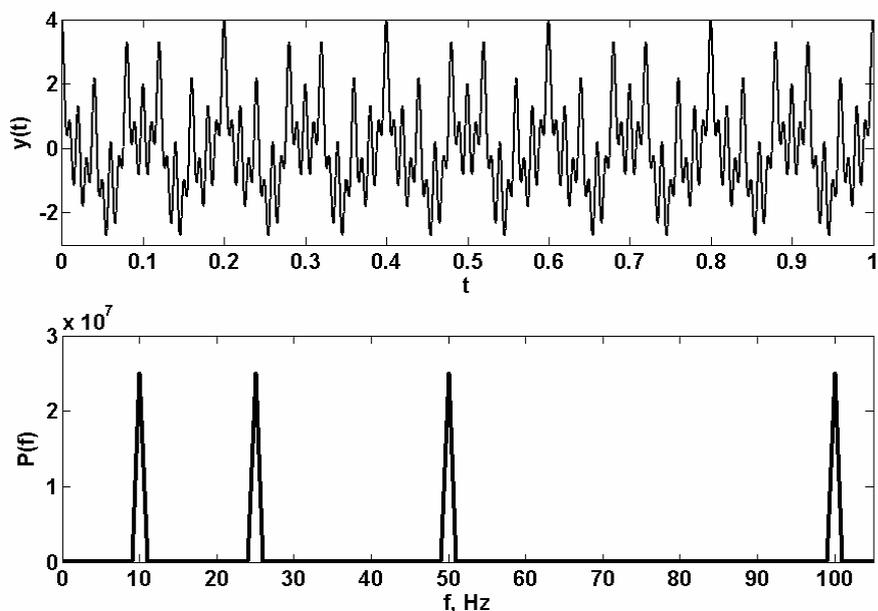


Рис. 3. Сигнал и его СФ

Рассмотрим ещё один пример. Сигнал $y(t) = \cos(30 \cdot 2\pi \cdot t^2 + 10 \cdot 2\pi \cdot t + \pi)$, изображенный на рис. 5, нестационарный. Его частота линейно увеличивается со временем. Такой сигнал называется сигналом с линейной частотной модуляцией. В зарубежной литературе он называется chirp-сигналом. На этом же рис. изображен СФ этого сигнала. Очевидно, СФ не позволяет определить частотное наполнение сигнала.

Таким образом, ПФ имеет следующие недостатки:

- Для получения преобразования на одной частоте требуется вся временная информация о сигнале. Это означает, что должно быть известно будущее поведение сигнала.

- Если исследуемый сигнал не имеет четкого периодического характера и его структура неоднородна во времени, эффективность ПФ в значительной мере снижается, хотя он и остается полностью в силе. В частности, не удастся сэкономить объем данных за счет перехода от амплитудно-временного к амплитудно-частотному представлению сигнала.
- ПФ обладает “глобальной” чувствительностью к “локальным” скачкам и резким пикам амплитуды сигнала. Пик сигнала во временной области распространяется по всей частотной области его ПФ. При этом модификация коэффициентов Фурье (например, обрезание высокочастотных гармоник с целью фильтрации шума) вносит одинаковые изменения в поведение сигнала на всей области определения.

При анализе сигналов непостоянного характера часто выгодно определить корреляцию между временем и СФ сигнала, т.е. необходимо обратиться к частотно – временному представлению сигнала, которое ВП как раз и обеспечивает. При этом стоит отметить, что ВП ни в коем случае не является заменой традиционного ПФ и не умаляет его значимости при работе со стационарными сигналами, т.е. в случае, когда нет необходимости исследовать локальную структура сигнала. ВП просто иное и позволяет взглянуть на исследуемый сигнал с другой точки зрения.

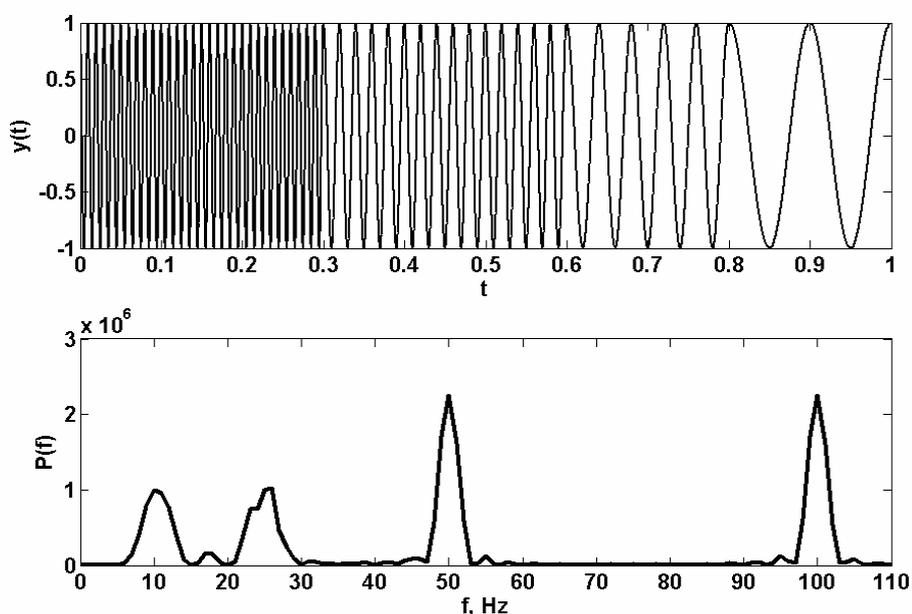


Рис. 4. Сигнал и его СФ

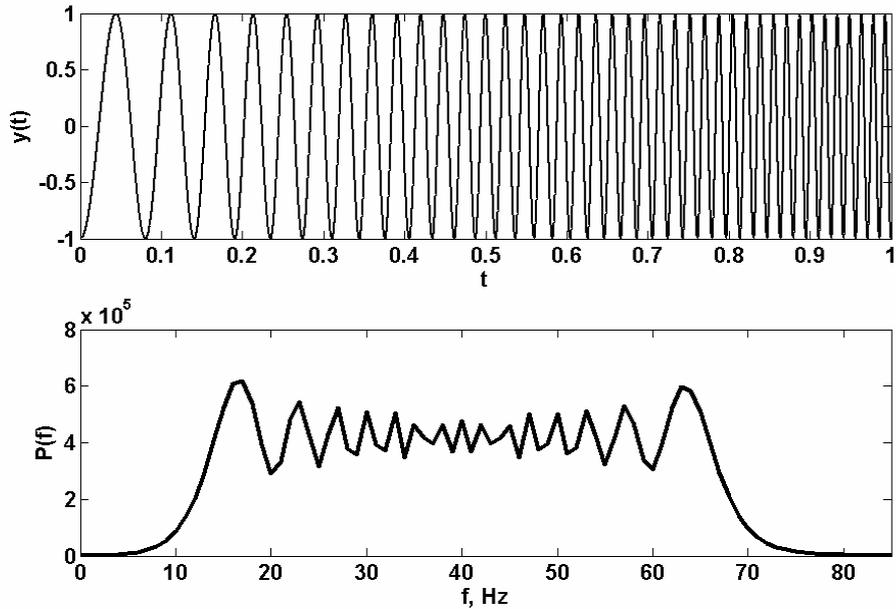


Рис. 5. Сигнал и его СФ

2.2 Оконное ПФ

Итак, при исследовании нестационарных сигналов, не имеющих четко выраженного периодического характера, наиболее эффективным было бы использование не тригонометрических, а некоторых локализованных во времени компактных базисов, разложение по которым сохраняет информацию об изменении характеристик исследуемого сигнала со временем. Вначале попытки построения таких базисов сводились к сегментированию сигнала на отдельные фрагменты (окна) с последующим применением ПФ для этих фрагментов. Соответствующее преобразование – оконное преобразование Фурье (ОПФ) – было предложено ещё в 1946 - 1947 гг.

Пусть $y(t)$ - анализируемый сигнал, $h(t)$ - некоторая локализованная по времени, принимающая вещественные значения, функция. Обычно используют такие непрерывные функции $h(t) \in L^2(\mathbf{R})$, для которых $t \cdot h(t) \in L^2(\mathbf{R})$. Примером является оконная функция Хэннинга

$$h(t) = \begin{cases} \cos^2\left(\frac{\pi \cdot t}{\tau}\right), & t \in \left[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right] \\ 0, & t \notin \left[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right] \end{cases}. \quad (9)$$

ПФ оконной функции Хэннинга имеет вид

$$\hat{h}(\omega) = \frac{\sin(\omega \cdot \tau/2)}{\omega} + \frac{\sin(\pi - \omega \cdot \tau/2)}{2\pi/\tau - \omega} + \frac{\sin(\pi + \omega \cdot \tau/2)}{2\pi/\tau + \omega}. \quad (10)$$

Параметр τ отвечает за ширину оконной функции $h(t)$. На рис. 6 приведены графики функций $h(t)$ и $\hat{h}(\omega)$ при $\tau=2$. Для $\forall b \in R$ функция $h(t-b)$ является сдвигом функции $h(t)$ на b . Умножим сигнал на эту функцию, получим $y_h(t) = y(t) \cdot h(t-b)$. Полученный сигнал $y_h(t)$ как раз и является выделенным фрагментом сигнала $y(t)$ на отрезке времени $[b-\tau/2, b+\tau/2]$.

ОПФ вычисляется по формуле

$$H(\omega, b) = \int y(t) \cdot h(t-b) \cdot \exp(-i \cdot \omega \cdot t) dt, \quad (11)$$

а его спектр называется спектрограммой и равен

$$PH(\omega, b) = |H(\omega, b)|^2 \quad (12)$$

Поскольку оконная функция локализована во времени, то спектрограмма является как бы последовательностью “локальных” СФ сигнала $y(t)$.

ОПФ обратимо и сохраняет энергию сигнала [10]

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \iint H(\omega, b) \cdot h(t-b) \cdot \exp(i \cdot \omega \cdot t) d\omega db, \quad (13)$$

$$\int y^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \iint PH(\omega, b) d\omega db \quad (14)$$

если используемая оконная функция нормирована, т.е. $\|h\|_2 = \sqrt{\int |h(t)|^2 dt} = 1$.

Заметим, что окно Хэннинга нормировано так, что $h(0) = 1$, но при этом $\|h\|_2 \neq 1$. ОПФ для дискретного сигнала вычисляется следующим образом.

Пусть $y_n = y(n \cdot t_s)$, $n = 0, 1, \dots, L-1$ - известные отсчеты исследуемого сигнала $y(t)$, измеренные с частотой дискретизации f_s , т.е. $t_s = 1/f_s$, тогда

$$H(f_k, m) = \sum_{n=0}^{L-1} y_n \cdot h(n-m) \cdot \exp\left(-\frac{i \cdot 2\pi \cdot k \cdot n}{L}\right), \quad k = 0, 1, \dots, L-1, m = 0, 1, \dots, L-1, \quad (15)$$

где $f_k = \frac{k}{L} \cdot f_s$ [Гц], при этом спектрограмма равна

$$PH(f_k, m) = |H(f_k, m)|^2, \quad k = 0, 1, \dots, L-1, m = 0, 1, \dots, L-1. \quad (16)$$

Как и в случае СФ дискретного сигнала, коэффициенты $PH(f_k, m)$ достаточно отображать при $m = 0, 1, \dots, L-1$, $k = 0, 1, \dots, \lfloor L/2 \rfloor$, остальные коэффициенты все равно не несут новой информации. Если $\sum_n h^2(n) = 1$, то

так определенное ОПФ обратимо и сохраняет энергию сигнала [10], т.е.

$$y_n = \frac{1}{L} \sum_{m=0}^{L-1} \sum_{k=0}^{L-1} H(f_k, m) \cdot h(n-m) \cdot \exp\left(\frac{i \cdot 2\pi \cdot k \cdot n}{L}\right), \quad n = 0, 1, \dots, L-1 \quad (17)$$

$$\sum_{n=0}^{L-1} y_n^2 = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{m=0}^{L-1} PH(f_k, m)^2. \quad (18)$$

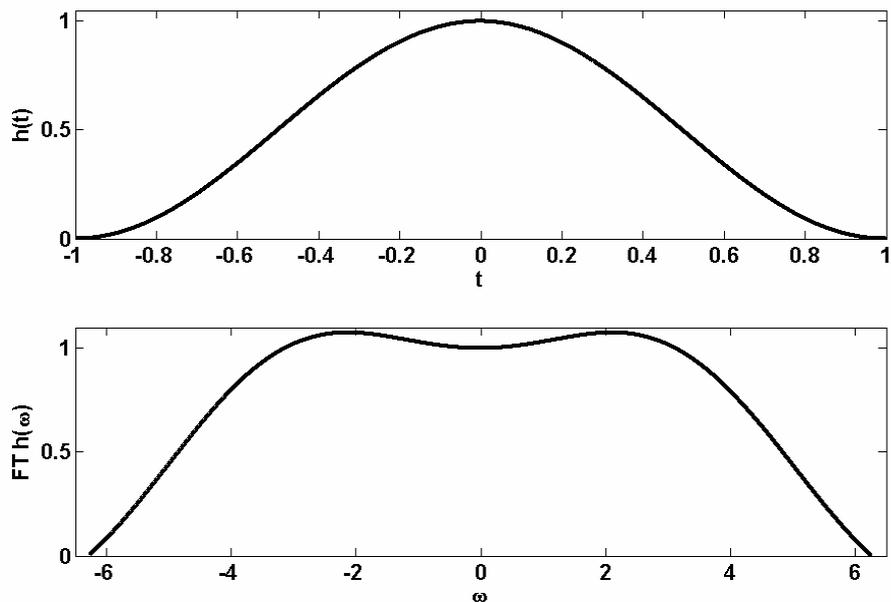


Рис. 6. Оконная функция Хэннинга $h(t)$ и ее ПФ $\hat{h}(\omega)$, $\tau = 2$

Недостаток ОПФ заключается в том, что хотя ширина окна τ и может быть выбрана произвольно, она не изменяется в зависимости от локальных особенностей сигнала. Для лучшей локализации “короткоживущих” особенностей сигнала (например, момента времени, когда произошло резкое изменение частоты колебаний сигнала) ширина окна должна уменьшаться. Для лучшей локализации “долгоживущих” особенностей сигнала (например, низкочастотных колебаний) ширина окна должна увеличиваться. Если использовать только “широкое” или только “узкое” окно, будет теряться информация либо во временной области, либо в частотной области.

2.3. Непрерывное вейвлет преобразование

Инженер-геофизик Д. Морле в конце 70-х годов XX в. столкнулся с проблемой анализа сигналов от сейсмодатчиков, которые содержали высокочастотную компоненту (сейсмическая активность) в течение короткого промежутка времени и низкочастотные составляющие (спокойное состояние земной коры) – в течение длительного периода.

ОПФ позволяет анализировать либо высокочастотную составляющую, либо низкочастотную составляющую, но не обе составляющие сразу. Поэтому был предложен метод анализа, в котором ширина оконной функции для низких частот увеличивалась, а для высоких частот – уменьшалась.

Новое оконное преобразование получалось в результате растяжения (сжатия) и смещения по времени одной порождающей (так называемой скэйлинг функции – scaling function, scalet) функции. Эта порождающая функция была названа вейвлетом (англ. слово wavelet – вейвлет –

являющееся переводом французского “ondelette”, можно формально перевести на русский язык словосочетанием “маленькая волна”, “небольшое колебание”, “компактная волна”, “всплеск”). На базе такого подхода возникло целое направление в теории обработки сигналов, получившее название вейвлет анализа.

Вейвлет – это функция $\psi(t) \in L^2(\mathbf{R})$ с нулевым средним значением

$$\int \psi(t) dt = \widehat{\psi}(0) = 0, \quad (19)$$

единичной нормой $\|\psi\|_2 = 1$ и центром в точке $t = 0$. Также необходимо, чтобы ПФ вейвлет функции достаточно быстро убывало, а именно

$$|\widehat{\psi}(\omega)| \leq C \cdot (1 + |\omega|)^{-1-\varepsilon} \quad (20)$$

при некоторых $C > 0$ и $\varepsilon \geq 0$. Для приложений бывает важно, чтобы вейвлет функция имела $N \in \mathbb{N}$ нулевых моментов, т.е.

$$\int \psi(t) \cdot t^p dt = 0, p = 0, 1, \dots, N-1. \quad (21)$$

Вейвлет функция, имеющая N нулевых моментов, позволяет анализировать более тонкую (высокочастотную) структуру сигнала, подавляя медленно изменяющиеся составляющие сигнала (полиномиальный тренд $N-1$ порядка). Типичным примером вейвлет функции является функция (МНАТ вейвлет)

$$\psi(t) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \cdot (1-t^2) \cdot \exp(-t^2/2). \quad (22)$$

На рис. 7 изображен МНАТ вейвлет $\psi(t)$ и его ПФ

$\widehat{\psi}(\omega) = 4\sqrt{2}/3 \cdot \omega^2 \cdot \exp(-\omega^2/2)$. Отметим, что МНАТ вейвлет имеет $N = 2$ нулевых момента.

ВП сигнала $y(t) \in L^2(\mathbf{R})$ определяется как

$$W(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int y(t) \cdot \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt. \quad (23)$$

Вейвлет спектр называется скалограммой и равен

$$PW(a, b) = |W(a, b)|^2. \quad (24)$$

Параметр $a > 0$ называется параметром масштаба и отвечает за растяжение вейвлет функции. Соотношение между параметром масштаба a и циклической частотой Фурье ω задается формулой

$$a = \frac{\omega_0}{\omega}, \quad (25)$$

где константа ω_0 определяется видом используемой вейвлет функции. Таким образом, скалограмма характеризует распределение энергии сигнала вдоль двумерной масштабной (частотно) – временной плоскости. Следует сказать, что понятие масштаба – более широкое (хотя и менее наглядное), чем понятие частоты Фурье. Связано это с тем, что в ПФ функциональный вид ядра преобразования, т.е. функция $\exp(-i \cdot \omega \cdot t)$, зафиксирован раз и навсегда, в то время как ВП одного и того же сигнала можно получить с помощью разных вейвлет функций.

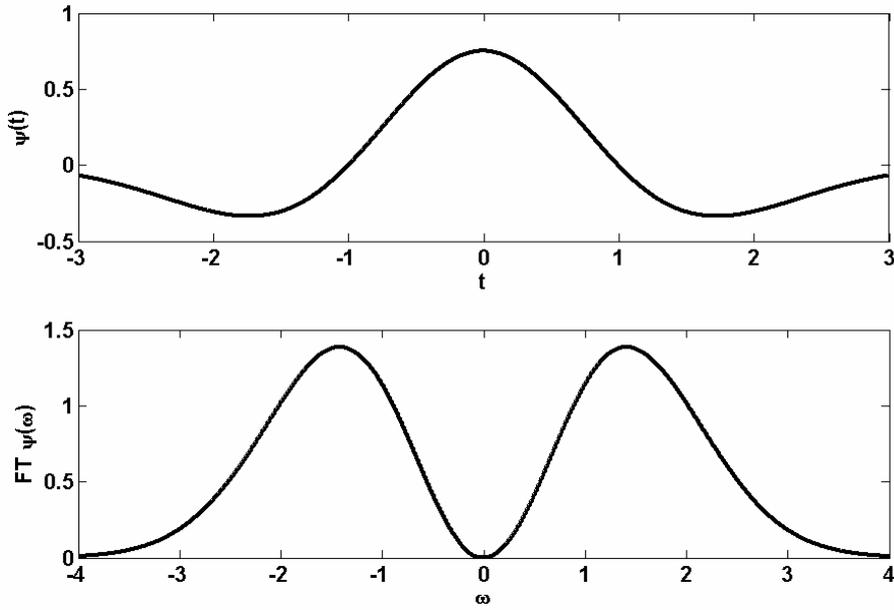


Рис. 7. МНАТ вейвлет $\psi(t)$ и его ПФ $\hat{\psi}(\omega)$

Если проинтегрировать скалограмму по времени, то получится функция

$$PW(a) = \int PW(a,b) db = \frac{a}{2\pi} \cdot \int P(\omega) \cdot |\hat{\psi}(a \cdot \omega)|^2 d\omega, \quad (26)$$

т.е. распределение энергии сигнала по масштабам представляет собой сглаженный СФ, причем характер сглаживания определяется ПФ вейвлет функции $\psi(t)$.

Чтобы ВП было обратимым и сохраняло энергию сигнала, требуется, чтобы ПФ вейвлет функции удовлетворяло следующему соотношению [10]

$$C_{\hat{\psi}} = \int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty, \quad (27)$$

тогда, если используется вещественная вейвлет функция,

$$y(t) = \frac{1}{C_{\hat{\psi}}} \int_0^{+\infty} \int W(a,b) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) db \frac{da}{a^2}, \quad (28)$$

$$\int y^2(t) dt = \frac{1}{C_{\hat{\psi}}} \int_0^{+\infty} \int PW(a,b) db \frac{da}{a^2}, \quad (29)$$

или, если используется комплексная вейвлет функция,

$$y(t) = \frac{2}{C_{\hat{\psi}}} \cdot \text{Re} \left[\int_0^{+\infty} \int W(a,b) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) db \frac{da}{a^2} \right], \quad (30)$$

$$\int y^2(t) dt = \frac{2}{C_{\hat{\psi}}} \cdot \int_0^{+\infty} \int PW(a,b) db \frac{da}{a^2}. \quad (31)$$

Отметим, что для всех практических целей условие (27) эквивалентно выполнению условия (19).

2.4. Сравнение ОПФ и ВП

Необходимо прояснить причину, по которой ВП позволяет получить более точную информацию о частотном – временном составе сигнала, чем ОПФ.

Причина заключается в том, что ВП представляет собой как бы непрерывную последовательность ОПФ с окнами, ширина которых увеличивается при уменьшении частоты колебаний анализируемого сигнала и наоборот. Докажем это утверждение. Пусть произвольная функция $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$ удовлетворяет условию $t \cdot f(t) \in L^2(\mathbf{R})$. Для такой функции можно подсчитать центр и радиус по формулам

$$x_f = \frac{1}{\|f\|_2^2} \int t \cdot |f(t)|^2 dt, \quad (32)$$

$$\Delta_f = \frac{1}{\|f\|_2} \sqrt{\int (t - x_f)^2 \cdot |f(t)|^2 dt}. \quad (33)$$

Будем использовать величину $2\Delta_f$ в качестве количественной меры локализации функции $f(t)$ с центром в точке x_f .

Сначала рассмотрим ОПФ. Используя равенство Парсеваля, несложно показать, что для ОПФ сигнала $y(t) \in L^2(\mathbf{R})$ выполняется следующее соотношение [16]

$$H(\omega, b) = \int y(t) \cdot \exp(-i \cdot \omega \cdot t) \cdot h(t - b) dt = \int \hat{y}(\eta) \cdot \frac{\exp(-i \cdot b \cdot (\omega - \eta))}{2\pi} \cdot \overline{\hat{h}(\eta - \omega)} d\eta \quad (34)$$

Отсюда следует, что функция $\exp(-i \cdot \omega \cdot t) \cdot h(t - b)$ отфильтровывает локальную информацию о сигнале $y(t)$ во временном окне

$$[x_h + b - \Delta_h, x_h + b + \Delta_h], \quad (35)$$

а функция $\frac{\exp(-i \cdot b \cdot (\omega - \eta))}{2\pi} \cdot \overline{\hat{h}(\eta - \omega)}$ отфильтровывает локальную информацию о ПФ $\hat{y}(\omega)$ сигнала $y(t)$ в частотном окне

$$[x_{\hat{h}} + \omega - \Delta_{\hat{h}}, x_{\hat{h}} + \omega + \Delta_{\hat{h}}]. \quad (36)$$

Заметим, что при повышении частоты ω ширина окон (35) и (36) не изменяется, в то время как для реальных сигналов характерна следующая особенность: высокочастотные колебания длятся короткое время, а низкочастотные колебания - достаточно длинное. Значит необходимо, чтобы при увеличении частоты ω колебаний сигнала ширина окна уменьшалась во временной области и увеличивалась в частотной области и наоборот.

Теперь рассмотрим ВП. Используя равенство Парсеваля, несложно показать, что для ВП сигнала $y(t) \in L^2(\mathbf{R})$ выполняется следующее соотношение [16]

$$W(a,b) = \int y(t) \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt = \int \hat{y}(\eta) \cdot \frac{\sqrt{a}}{2\pi} \cdot \exp(i \cdot b \cdot \eta) \cdot \overline{\hat{\psi}\left(a \cdot \left(\eta - \frac{x_{\bar{\psi}}}{a}\right) + x_{\bar{\psi}}\right)} d\eta. \quad (37)$$

Отсюда следует, что функция $\frac{1}{\sqrt{a}} \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)}$ отфильтровывает локальную информацию о сигнале $y(t)$ во временном окне

$$[b + a \cdot x_{\bar{\psi}} - a \cdot \Delta_{\bar{\psi}}, b + a \cdot x_{\bar{\psi}} + a \cdot \Delta_{\bar{\psi}}], \quad (38)$$

а функция $\exp(i \cdot b \cdot \eta) \cdot \overline{\hat{\psi}\left(a \cdot \left(\eta - \frac{x_{\bar{\psi}}}{a}\right) + x_{\bar{\psi}}\right)}$ отфильтровывает локальную информацию о ПФ $\hat{y}(\omega)$ сигнала $y(t)$ в частотном окне

$$\left[\frac{x_{\bar{\psi}}}{a} - \frac{\Delta_{\bar{\psi}}}{a}, \frac{x_{\bar{\psi}}}{a} + \frac{\Delta_{\bar{\psi}}}{a} \right]. \quad (39)$$

Как уже говорилось, частота Фурье и параметр масштаба связаны соотношением $a = \frac{\omega_0}{\omega}$. В качестве ω_0 обычно используют константу $x_{\bar{\psi}}$.

Таким образом, в случае высокочастотных явлений (т.е. при малых значениях параметра масштаба a) ширина $\Delta T_a = 2 \cdot a \cdot \Delta_{\bar{\psi}}$ окна (38) во временной области уменьшается, а ширина $\Delta \omega_a = 2 \cdot \Delta_{\bar{\psi}} / a$ окна (39) в частотной области увеличивается и наоборот. Именно поэтому ВП лучше подходит для анализа реальных сигналов, чем ОПФ.

Отметим также, что площадь частотно-временного окна ВП равна $\Delta \omega_a \cdot \Delta T_a = \left(\frac{2 \cdot \Delta_{\bar{\psi}}}{a}\right) \cdot (2 \cdot a \cdot \Delta_{\bar{\psi}}) = 4 \cdot \Delta_{\bar{\psi}} \cdot \Delta_{\bar{\psi}}$. Таким образом, $\Delta \omega_a \propto \frac{1}{\Delta T_a}$ (принцип Гейзенберга). Отсюда видно, что естественное для анализа нестационарных сигналов стремление повысить разрешение во временной области всегда приводит к уменьшению разрешения в частотной области.

2.5. Численная реализация ВП

В дальнейшем будет использоваться комплексный вейвлет Морле

$$\psi(t) = \left(\frac{2}{\pi \cdot \tau^2}\right)^{1/4} \cdot \exp\left(-\frac{t^2}{\tau^2}\right) \cdot \exp(i \cdot 2\pi \cdot f_0 \cdot t), \quad (40)$$

где параметры τ и f_0 задают форму вейвлет функции и определяют так называемый фактор качества $Q = 2\pi \cdot f_0 \cdot \tau$. ПФ вейвлета Морле задается формулой

$$\hat{\psi}(\omega) = (2\pi \cdot \tau^2)^{1/4} \cdot \exp\left(-(\pi \cdot f_0 - \omega/2)^2 \cdot \tau^2\right). \quad (41)$$

Если перейти от циклической частоты ω к частоте $f = \omega/2\pi$ [Гц] и выразить параметры τ и f_0 через параметры Q и f_0 , то ПФ вейвлета Морле примет вид

$$\tilde{\psi}(f) = \left(\frac{Q^2}{2\pi}\right)^{1/4} \cdot \frac{1}{\sqrt{f_0}} \cdot \exp\left(-\left(\frac{f}{f_0} - 1\right)^2 \cdot \frac{Q^2}{4}\right). \quad (42)$$

Несложно подсчитать, что для вейвлета Морле $x_\psi = 0$, $\Delta_\psi = Q/(4 \cdot \pi \cdot f_0)$, $x_{\tilde{\psi}} = 2 \cdot \pi \cdot f_0$, $\Delta_{\tilde{\psi}} = (2 \cdot \pi \cdot f_0)/Q$. Таким образом, увеличение параметра Q приводит к увеличению радиуса Δ_ψ и уменьшению радиуса $\Delta_{\tilde{\psi}}$, т.е. происходит уменьшение разрешения по времени, но увеличение разрешения по частоте. Заметим, что площадь частотно-временного окна для вейвлет Морле равна $\Delta\omega_a \cdot \Delta T_a = 1/2$, т.е. минимально возможная. На рис. 8 приведены графики функций $\text{Re}\psi(t)$, $\text{Im}\psi(t)$ и $\tilde{\psi}(f)$ при $Q=6$ и $f_0=1$. Необходимо также отметить, что в случае вейвлета Морле соотношение между частотой Фурье f в [Гц] и параметром масштаба a принимает вид $f = f_0/a$.

Заметим, что вейвлет Морле действительно имеет единичную норму, но при этом $\int \psi(t) dt = \left(\frac{Q^2}{2\pi}\right)^{1/4} \cdot \frac{1}{\sqrt{f_0}} \cdot \exp\left(-\frac{Q^2}{4}\right) \neq 0$, т.е. условие $\int \psi(t) dt = 0$, накладываемое на вейвлет функцию, выполняется только приближенно при достаточно больших значениях Q . Тем не менее, даже такой точности достаточно для приложений. Единственно, при анализе сигнала необходимо вычесть из него выборочное среднее. Моменты более высоких порядков у вейвлета Морле также не равны нулю.

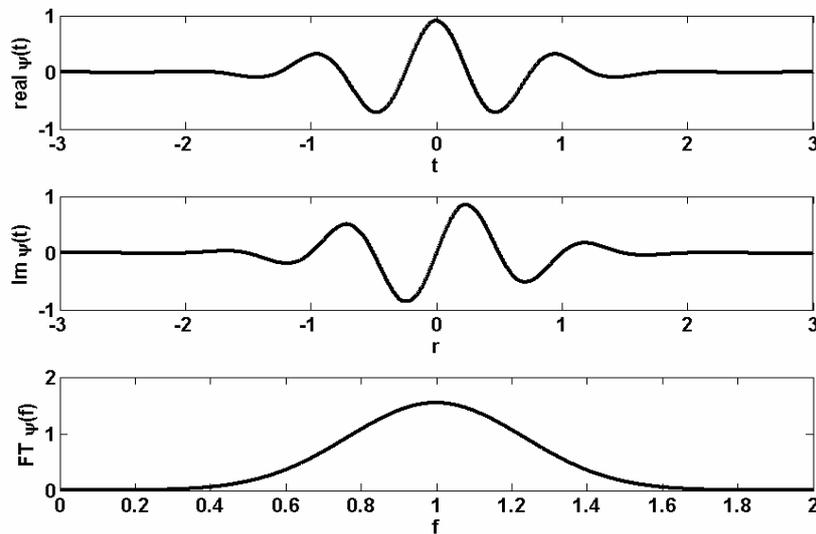


Рис. 8. Графики функций $\text{Re}\psi(t)$, $\text{Im}\psi(t)$ и $\tilde{\psi}(f)$, $Q=6$, $f_0=1$

Как уже отмечалось в формуле (37), для ВП сигнала $y(t)$ выполняется равенство

$$W(a,b) = \int y(t) \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt = \int \widehat{y}(f) \cdot \overline{\widehat{\psi}(a \cdot f)} \cdot \exp(i \cdot 2\pi \cdot f \cdot b) \cdot \sqrt{a} df, \quad (43)$$

где вместо циклической частоты ω использована частота $f = \omega/2\pi$ [Гц]. Применим равенство (43) для подсчета ВП.

Итак, пусть $y_n = y(n \cdot t_s)$, $n = 0, 1, \dots, L-1$ - известные отсчеты исследуемого сигнала $y(t)$, измеренные с частотой дискретизации f_s , т.е. $t_s = 1/f_s$. Будем использовать частотно – временное представление ВП, как более привычное. Временную ось разобьем равномерной сеткой $t_m = m \cdot t_s$, $m = 0, 1, \dots, L-1$ на L частей. Выберем минимальную частоту fa_{\min} [Гц] и максимальную частоту fa_{\max} [Гц], разобьем исследуемый отрезок частот $[fa_{\min}, fa_{\max}]$ равномерной сеткой $fa_k = fa_{\min} + k \cdot (fa_{\max} - fa_{\min}) / (L_f - 1)$, $k = 0, 1, \dots, L_f - 1$ на L_f частей.

Обсудим выбор параметров fa_{\min} и fa_{\max} . Каждая вейвлет функция имеет свою форму и характерный размер, который при фиксированном значении параметра масштаба согласно формуле (38) определяется величиной $\Delta T_a = 2 \cdot a \cdot \Delta_\psi$, где Δ_ψ - радиус вейвлет функции.

Коэффициент $W(a,b)$ определяет корреляцию между вейвлет функцией, помещенной в точку b , и какой-нибудь особенностью сигнала размера ΔT_a с центром в точке b . Модуль коэффициента $W(a,b)$ принимает наибольшее значение в том случае, когда размер вейвлета совпадает с размером “текущей” особенности сигнала. В случае полигармонического сигнала естественной мерой масштаба его особенностей является период гармонических компонент, мера же протяженности вейвлета ΔT_a определяется значением параметра масштаба a . Для дискретного полигармонического сигнала, заданного на сетке с шагом $t_s = \text{const}$, диапазон периодов гармоник определяется величинами $T_{\min} = 2 \cdot t_s$ и $T_{\max} = (L-1) \cdot t_s$. В соответствии с этим выберем наибольшее и наименьшее значения параметра масштаба из условия соответствия размеров вейвлета и предельных периодов гармонических компонент: $2 \cdot \Delta_\psi \cdot a_{\min} = T_{\min}$, $2 \cdot \Delta_\psi \cdot a_{\max} = T_{\max}$. Откуда

$$a_{\min} = \frac{t_s}{2 \cdot \Delta_\psi}, \quad a_{\max} = \frac{(L-1) \cdot t_s}{2 \cdot \Delta_\psi}. \quad (44)$$

Значит, с учетом соотношения (25) и того, что $\omega_0 = x_{\overline{\psi}}$, $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$, параметры fa_{\min} и fa_{\max} равны

$$fa_{\min} = \frac{x_{\overline{\psi}} \cdot \Delta_\psi}{\pi \cdot (L-1) \cdot t_s}, \quad fa_{\max} = \frac{x_{\overline{\psi}} \cdot \Delta_\psi}{2 \cdot \pi \cdot t_s}. \quad (45)$$

Для вейвлета Морле эти параметры принимают значения

$$fa_{\min} = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot (L-1) \cdot t_s}, \quad fa_{\max} = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot t_s}. \quad (46)$$

Значение ВП дискретного сигнала в момент времени t_m на частоте fa_k [Гц] равно

$$W_{k,m} = \frac{1}{L \cdot t_s} \cdot \sum_{p=0}^{L-1} \hat{y}_p \cdot \overline{\hat{\psi}_{p,k}} \cdot \exp\left(\frac{i \cdot 2\pi \cdot m \cdot p}{L}\right), \quad (47)$$

где $\hat{y}_p = t_s \cdot \sum_{n=0}^{L-1} y_n \cdot \exp\left(-\frac{i \cdot 2\pi \cdot p \cdot n}{L}\right)$ - дискретное ПФ исследуемого сигнала,

$$\hat{\psi}_{p,k} = \left(\frac{Q^2}{2\pi}\right)^{1/4} \cdot \frac{1}{\sqrt{fa_k}} \cdot \exp\left(-\left(\frac{f_p}{fa_k} - 1\right)^2 \cdot \frac{Q^2}{4}\right) \quad (48)$$

и $f_p = p/L \cdot t_s$ - частота Фурье, по которой происходит суммирование в (47).

Использование быстрых алгоритмов для подсчета ПФ позволяет подсчитать ВП сигнала по формуле (47) для всех значений сетки частот fa_k одновременно. Заметим, что коэффициенты $W_{k,m}$ явно не зависят от параметра f_0 . Таким образом, входными данными являются

- Сигнал $y_n = y(n \cdot t_s)$, $n = 0, 1, \dots, L-1$, частота дискретизации сигнала $f_s = 1/t_s$.
- Параметр качества Q .
- Параметры частотной сетки fa_{\min} , fa_{\max} и L_f .

Выходными данными является матрица размера $L_f \times L$ коэффициентов $W_{k,m}$.

Необходимо отметить одну важную особенность вейвлета Морле. Пусть анализируемый сигнал представляет собой комплексную синусоиду, т.е. $g(t) = A \cdot \exp(i \cdot 2\pi \cdot \theta \cdot t)$, тогда ПФ этого сигнала равно $\hat{g}(f) = A \cdot \delta(\theta - f)$ и ВП в силу формулы (43) имеет вид

$$W(a, b) = A \cdot \overline{\hat{\psi}(a \cdot \theta)} \cdot \exp(i \cdot 2\pi \cdot \theta \cdot b) \cdot \sqrt{a}. \quad (49)$$

Значение скалограммы на частоте $f = f_0/a$ [Гц] в момент времени для вейвлета Морле равно

$$PW(a, b) = PW\left(\frac{f_0}{f}, b\right) = A^2 \cdot \left(\frac{Q^2}{2\pi}\right)^{1/2} \cdot \exp\left(-\left(\frac{\theta}{f} - 1\right)^2 \cdot \frac{Q^2}{2}\right) \cdot \frac{1}{f}. \quad (50)$$

Заметим, что скалограмма вообще не зависит от параметра b . Чтобы частота сигнала θ [Гц] точно определялась, скалограмма должен иметь максимум на частоте $f = \theta$. Поэтому в случае вейвлета Морле надо подсчитывать нормированную скалограмму

$$\frac{PW(a, b)}{a} = PW\left(\frac{f_0}{f}, b\right) \cdot f \quad (51)$$

для определения частотно – временного состава сигнала. Как следует из формулы (50) скалограммы комплексной синусоиды, именно нормированная скалограмма (51) будет иметь явный максимум при $f = \theta$. Таким образом, при реализации на практике ВП с использованием

вейвлета Морле необходимо строить контурный график матрицы не со значениями $W_{k,m}$, а со значениями $W_{k,m} \cdot fa_k$.

2.6. Модельный пример

Проиллюстрируем применение ВП и ОПФ для частотно - временного разрешения модельного сигнала. Используем вейвлет Морле с $f_0 = 1$ и фактором качества $Q = 5$. В качестве оконной функции для ОПФ используем окно Хэннинга.

Поскольку спектрограмма и скалограмма зависят от двух параметров (времени и частоты), будем строить контурные графики этих величин, где по оси ординат отложена частота в [Гц], а по оси абсцисс – время. При подсчетах будем использовать $L = 2500$ отсчетов модельного сигнала с частотой дискретизации $f_s = L$. Параметры частотной сетки $L_f = 500$, $fa_{\min} = 0.5$, $fa_{\max} = 80$.

Рассмотрим сигнал $y(t) = \begin{cases} 2 \cdot \sin(10 \cdot 2\pi \cdot t) + 2 \cdot \sin(50 \cdot 2\pi \cdot t), & t \in [0; 0.5] \cup [0.512; 1] \\ 2 \cdot \sin(10 \cdot 2\pi \cdot t), & t \in [0.5; 0.512] \end{cases}$. Этот сигнал и его

СФ изображены на рис. 9. СФ выявляет обе гармоники, присутствующие в сигнале, но не способен выявить промежуток времени, когда высокочастотная гармоника была “выключена”.

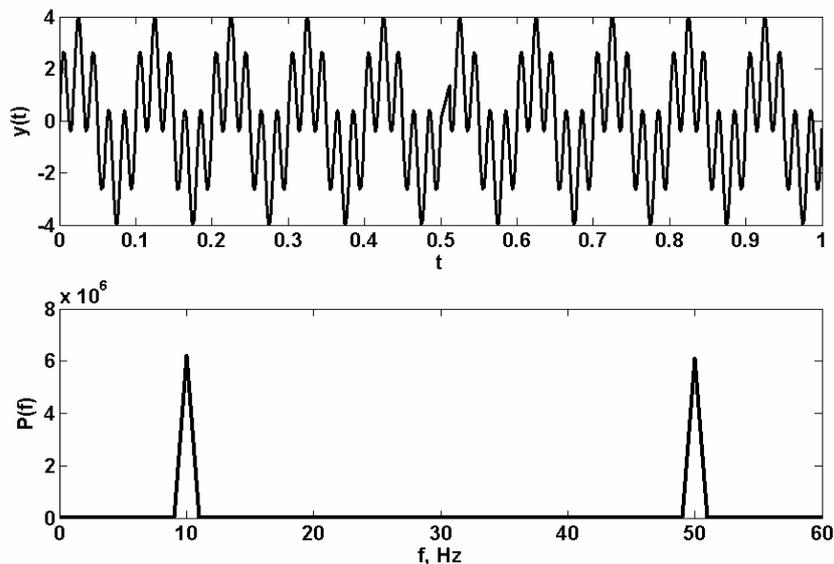


Рис. 9. Сигнал и его СФ

На рис. 10 изображена спектрограмма ОПФ при ширине окна $\tau = 100$, а на рис. 11 – при ширине окна $\tau = 350$. Первая спектрограмма не смогла разрешить гармоники сигнала, но выявила промежуток времени, когда высокочастотная гармоника была “выключена”. Вторая спектрограмма

позволяет выявить обе гармоники сигнала (низкочастотная гармоника определяется менее точно, чем высокочастотная), но промежуток времени, когда высокочастотная гармоника была “выключена”, практически не выявляется. При дальнейшем изменении ширины окна τ также не получается выявить все особенности исследуемого сигнала на одной спектрограмме. На рис. 12 изображена нормированная скалограмма. Удастся определить все особенности сигнала на одной скалограмме.

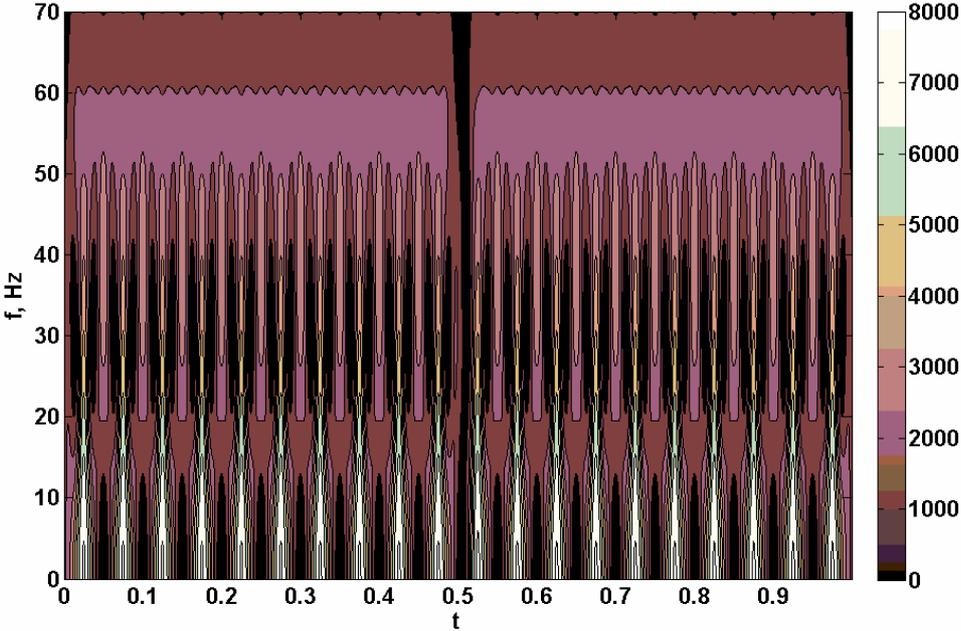


Рис. 10. Контурный график спектрограммы, $\tau = 100$

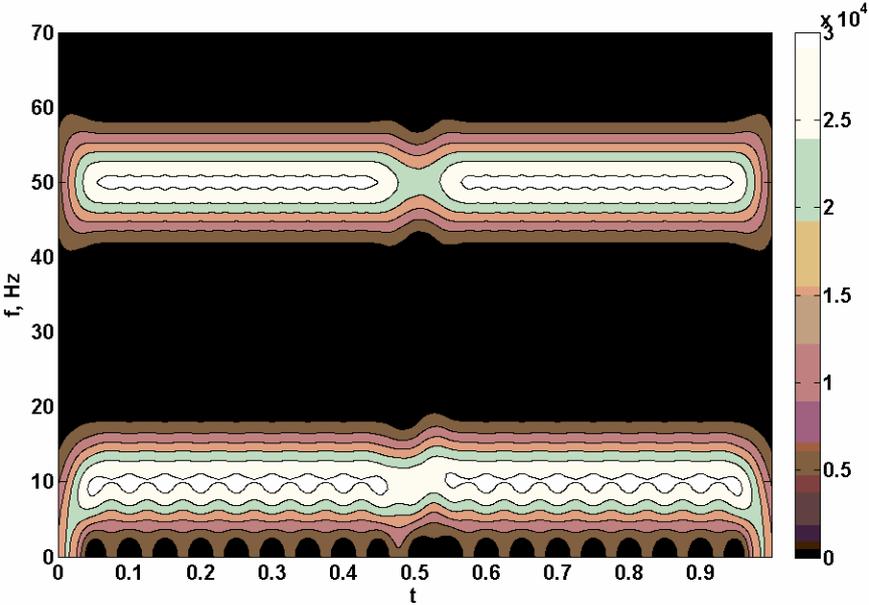


Рис. 11. Контурный график спектрограммы, $\tau = 350$

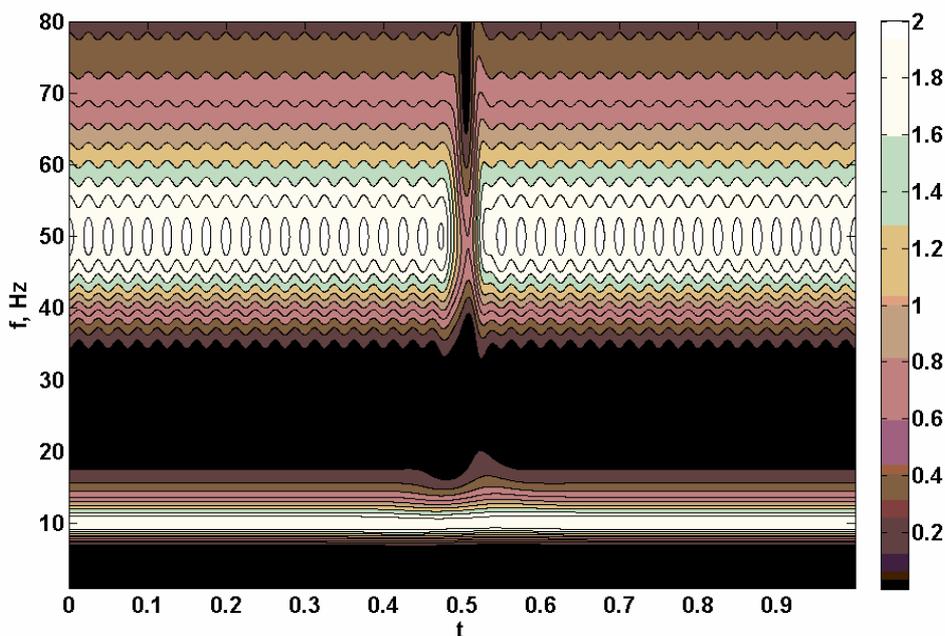


Рис. 12. Контурный график нормированной скалограммы, $Q = 5$

3. Применение ВП для выявления бизнес циклов

Одной из основных проблем при изучении бизнес циклов (БЦ) является проблема нестационарности рассматриваемого временного ряда макроэкономического показателя. Рыночная экономика эволюционирует во времени и, поэтому, макроэкономические временные ряды содержат стохастические компоненты, характеристики которых изменяются. Традиционные методы анализа БЦ, такие как корреляционный и спектральный анализы, не могут выявить нестационарные БЦ. Применение ВП для анализа может помочь выявить:

- Влияние “шоковых” исторических событий на появление и\или исчезновение БЦ.
- Моменты появления и\или исчезновения и продолжительность БЦ.
- Зависимость частоты БЦ от времени.

В дальнейшем будет исследоваться временной ряд Quarterly Growth in real GDP at annual rates, Percent, значения с 1960, 1 квартал по 2000, 1 квартал (USA Bureau of Economic Analysis), изображенный вместе со своим СФ на рис. 13. Ясно, что СФ не дает никакой информации о наличии или отсутствии БЦ.

Начиная со Второй Мировой Войны экономика США испытала серьезные институциональные изменения. Эти изменения оказали серьезное влияние на структуру экономики США. Изменения происходили как из-за перемен во внутренней политике США, так и из-за мировых “шоковых” событий. В частности, стоит упомянуть события, оказавшие

существенное влияние на цены на нефть, и, как следствие, на экономику США:

- Повышением цен на нефть из-за арабского нефтяного эмбарго в 1973 г.
- Иранская революция в 1978-1979 гг.
- Начало ирано-иракской войны в 1980 г.
- Увеличение нефтедобычи Саудовской Аравией в 1986 г.
- Вторжение Ирака в Кувейт в 1990 г.
- Операция "Буря в пустыне" в 1991 г.

Вполне возможно, какие-то из вышеперечисленных событий были причиной появления или исчезновения каких-то новых БЦ, или, по крайней мере, привели к изменению параметров уже существующих БЦ. С помощью вейвлет анализа макроэкономического ряда можно попытаться проанализировать достоверность этого утверждения. Параметры, использованные при расчетах: длина ряда $L=161$, $t_s=1$ (квартал), $f_0=1$, параметры частотной сетки $fa_{\min} \approx 0.005$, $fa_{\max} \approx 0.5$, $L_f=500$, фактор качества $Q=5$.

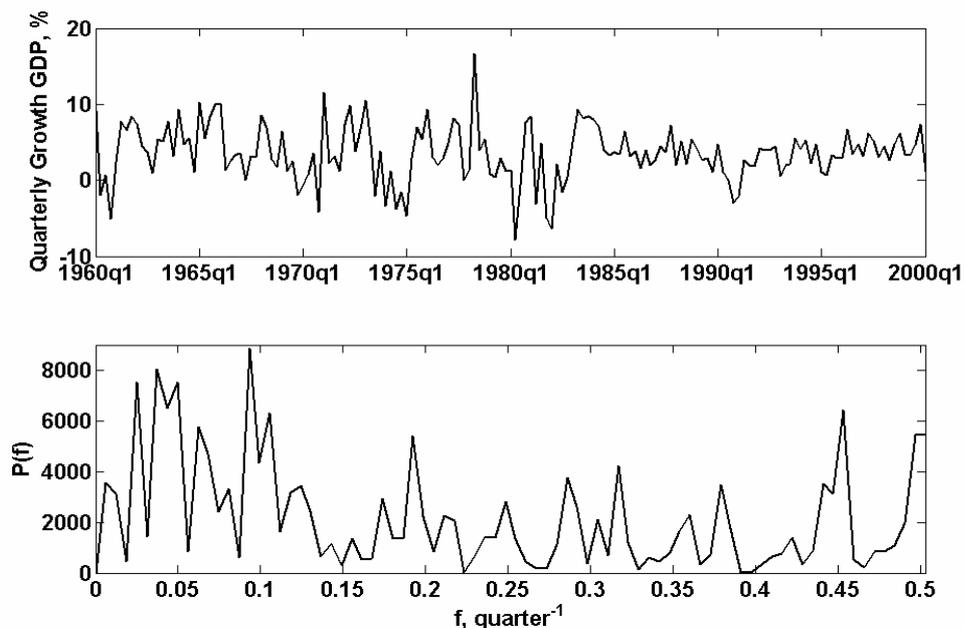


Рис. 13. Временной ряд Quarterly Growth in real GDP at annual rates, Percent, значения с 1960, 1 квартал по 2000, 1 квартал и его СФ

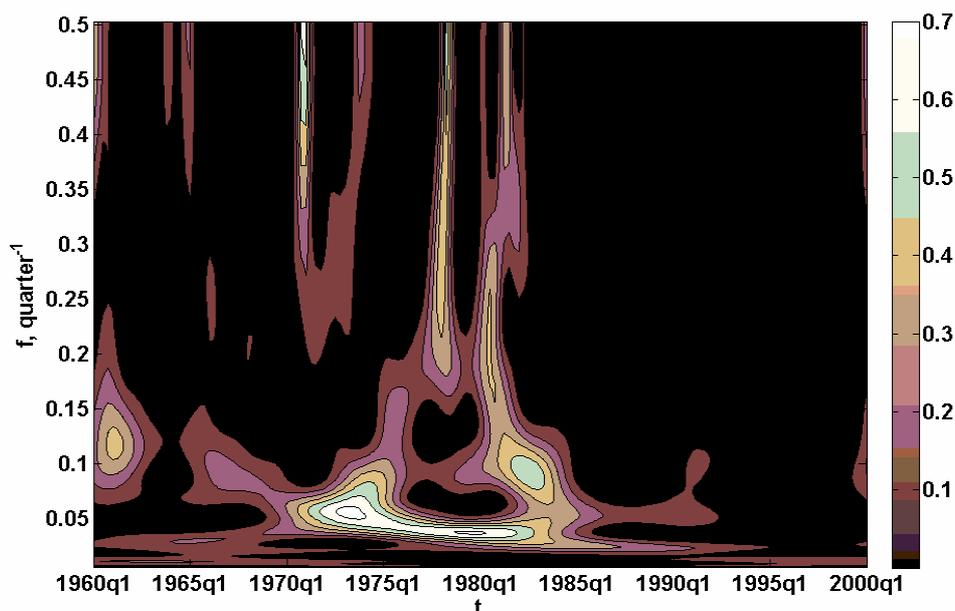


Рис. 14. Контурный график нормированной скалограммы временного ряда Quarterly Growth in real GDP at annual rates, Percent, значения с 1960, 1 квартал по 2000, 1 квартал (USA Bureau of Economic Analysis), $Q = 5$.

На рис. 14 изображен контурный график нормированной скалограммы вышеупомянутого макроэкономического временного ряда. Наибольший интерес представляют низкие частоты, поэтому на рис. 15 изображена увеличенная нижняя часть контурного графика. Проанализировав контурный график нормированной скалограммы, можно сделать следующие выводы:

- БЦ за весь рассматриваемый период в основном имеют частоты, меньшие 0.12 (0.12 примерно соответствует периоду в 8.3 квартала). По всей видимости, основная причина появления БЦ - различные внешние "шоковые" события. Начиная с 1960 г., существовало четыре наиболее значимых БЦ и ряд менее значимых БЦ.
- Первый явный БЦ появился в 1961 г. и, по всей видимости, был вызван каким-то важным внешним событием. Этот БЦ имеет частоту около 0.11 (период примерно 2.2 года) и является довольно коротко живущим (около одного года).
- Еще три явных БЦ проявляются около 1973 г., 1979 г. и 1983 г. и, вероятно, вызваны вышеперечисленными событиями в странах востока - поставщиках дешевой нефти. Период первого БЦ равен примерно 5 годам ("время жизни" составляет 3 - 4 года), второго - 6.6 лет ("время жизни" составляет 3 - 4 года), третьего - 2.7 лет ("время жизни" составляет 2 - 3 года).
- Заметим, что около 1965 - 1967 гг. и 1990 г. тоже проявляются БЦ, но они существенно слабее вышеупомянутых БЦ. Сложно сказать, были ли это какие-либо внешние или внутренние "шоковые" события, вызвавшие появление этих БЦ.

- Конечно, нельзя наверняка утверждать, что тот или иной БЦ вызван внешними событиями на мировой политической арене, но можно с уверенностью сказать, что значимые мировые события оказали свое влияние на появление и характеристики того или иного БЦ. По крайней мере, события, вызвавшие сильные колебания цен на нефть в 1970 - 1980 гг., наверняка оказали такое влияние.

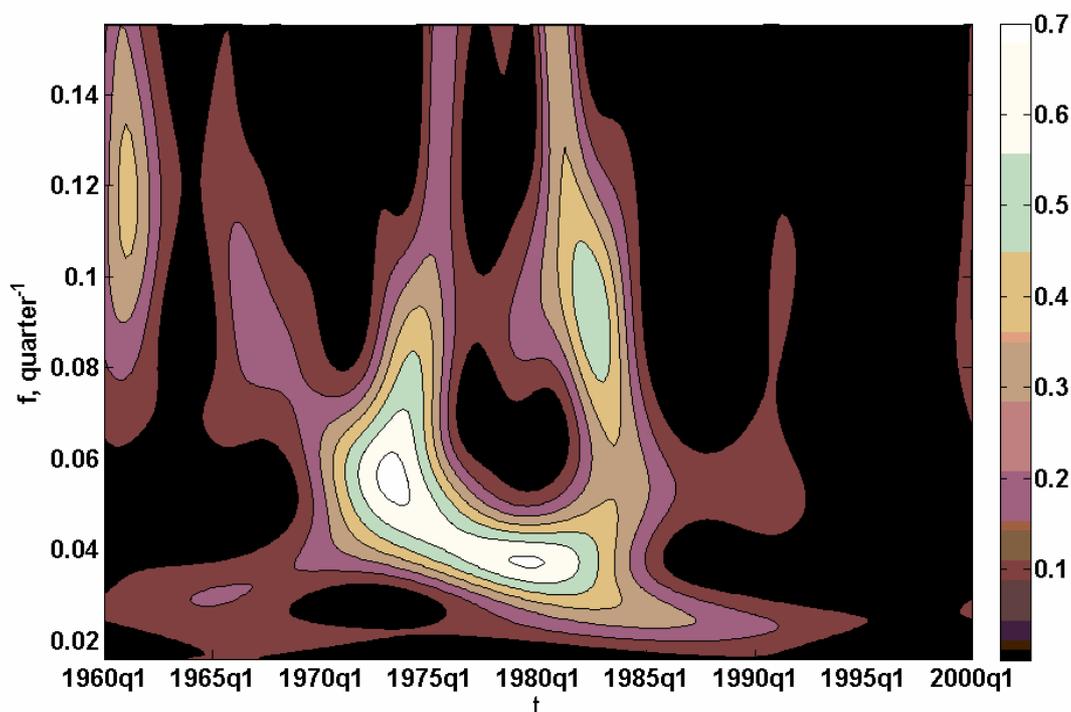


Рис. 15. Увеличенный контурный график нормированной скалограммы временного ряда Quarterly Growth in real GDP at annual rates, Percent, значения с 1960, 1 квартал по 2000, 1 квартал (USA Bureau of Economic Analysis), $Q = 5$.

Ясно видно, что БЦ существуют, но являются нестабильными. Механизм этой нестабильности ещё предстоит объяснить. Заметим, что существующие макроэкономические модели предсказывают существование стабильных БЦ. В то же время проведенный анализ показывает противоположное: БЦ нестабильны, они появляются на разных частотах и в разные моменты времени.

4. Дискретное вейвлет преобразование

4.1. Основные обозначения, свертки, фильтры

Большинство обозначений будет введено по ходу изложения. Два непересекающихся подпространства A и B пространства S составляют прямую сумму пространства S ($S = A \oplus B$), если каждый элемент пространства S может быть единственным образом представлен как сумма

некоторого элемента из A и некоторого элемента из B . Пространства интегрируемых по Лебегу функций $L^p(\mathbf{R})$ определяется как пространство таких измеримых по Лебегу функций $y(t)$, у которых

$$\|y\|_p = \left(\int |y(t)|^p dt \right)^{1/p} < \infty. \quad (52)$$

Пространство последовательностей $l^p(\mathbf{Z})$ определяется как пространство таких числовых последовательностей $h_n, n \in \mathbf{Z}$, у которых

$$\|h\|_p = \left(\sum_n |h_n|^p \right)^{1/p} < \infty. \quad (53)$$

Скалярное произведение двух функций $f(t), y(t) \in L^2(\mathbf{R})$ определяется как

$$\langle f, y \rangle = \int f(t) \cdot \overline{y(t)} dt. \quad (54)$$

Будут использоваться два вида формулы суммирования Пуассона

$$\sum_l y(t-l) = \sum_k \hat{y}(2\pi \cdot k) \cdot \exp(i \cdot 2\pi \cdot k \cdot t), \quad (55)$$

$$\sum_l \langle f, y(\square-l) \rangle \cdot \exp(-i \cdot \omega \cdot l) = \sum_k \hat{f}(\omega + 2\pi \cdot k) \cdot \overline{\hat{y}(\omega + 2\pi \cdot k)}. \quad (56)$$

Счетное множество $\{y_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$ некоторого Гильбертова пространства F является базисом Рисса, если каждый элемент y этого пространства единственным образом может быть представлен как $y = \sum_k c_n \cdot y_n$, причем

найдутся такие универсальные положительные константы C_1 и C_2 , что

$$C_1 \cdot \|y\|_F^2 \leq \sum_n c_n^2 \leq C_2 \cdot \|y\|_F^2, \quad (57)$$

где $\|y\|_F$ - норма элемента y в пространстве F .

Свертка функции $y(t)$ с функцией $h(t)$ вычисляется по формуле

$$y * h(t) = \int y(u) \cdot h(t-u) du = \int y(t-u) h(u) du. \quad (58)$$

ПФ свертки двух функций $y(t)$ и $h(t)$ есть произведение ПФ каждой из функций

$$\hat{y} * \hat{h}(\omega) = \hat{y}(\omega) \cdot \hat{h}(\omega). \quad (59)$$

ПФ бесконечной последовательности $y_n \in l^1(\mathbf{Z})$ вычисляется по формуле

$$\hat{y}(\omega) = \sum_n y_n \cdot \exp(-i \cdot \omega \cdot n). \quad (60)$$

Считаем, что в (60) $\omega \in [-\pi; \pi]$, поскольку $\hat{y}(\omega)$ - 2π -периодическая функция. Свертка последовательности $y_n, n \in \mathbf{Z}$ с последовательностью $h_n, n \in \mathbf{Z}$ вычисляется по формуле

$$y * h_n = \sum_p y_p \cdot h_{n-p}. \quad (61)$$

ПФ свертки последовательностей $y_n, n \in \mathbf{Z}$ и $h_n, n \in \mathbf{Z}$ равно произведению ПФ каждой из последовательностей

$$\hat{y} * \hat{h}(\omega) = \hat{y}(\omega) \cdot \hat{h}(\omega). \quad (62)$$

Чтобы вычислить свертку двух конечных последовательностей $y_n, n = 0, 1, \dots, L-1$ и $h_n, n = 0, 1, \dots, L-1$

$$y * h_n = \sum_{p=0}^{L-1} y_p \cdot h_{n-p}, \quad (63)$$

надо знать значения последовательности h_n при $n < 0$ и $n > L-1$. Один из возможных подходов состоит в периодическом продолжении последовательности h_n при $n \leq -1$, т.е.

$$h_{-1} = h_{L-1}, \quad h_{-2} = h_{L-2}, \quad \text{и т.д.} \quad (64)$$

При таком подходе свертка двух конечных последовательностей называется периодической (обозначается символом \otimes) и может быть записана в виде

$$y * h_n \equiv y \otimes h_n = \sum_{p=0}^{L-1} y_p \cdot h_{(n-p) \bmod L}, \quad n = 0, 1, \dots, L-1, \quad (65)$$

где операция типа $(n-p) \bmod L$ определяется следующим образом. Если m такое целое число, что $0 \leq m \leq L-1$, то $m \bmod L \equiv m$; если m - любое другое целое число, то $m \bmod L \equiv m + q \cdot L$, где $q \in \mathbf{Z}$ подобрано так, чтобы $0 \leq m + q \cdot L \leq L-1$. Подсчитываемое по формуле (8) дискретное ПФ периодической свертки (65) двух конечных последовательностей длины L равно произведению дискретных ПФ каждой из последовательностей, т.е.

$$\widehat{y \otimes h}_k = \widehat{y}_k \cdot \widehat{h}_k, \quad k = 0, 1, \dots, L-1. \quad (66)$$

Пусть дан дискретный бесконечный вещественнозначный сигнал $y_n, n \in \mathbf{Z}$ и некоторая вещественнозначная последовательность $h_n, n \in \mathbf{Z}$, а сигнал

$$f_n = y * h_n, \quad n \in \mathbf{Z} \quad (67)$$

является сверткой. В силу формулы (62)

$$|\widehat{f}(\omega)|^2 = |\widehat{y}(\omega)|^2 \cdot |\widehat{h}(\omega)|^2. \quad (68)$$

Считаем, что в (68) $\omega \in [0; \pi]$, поскольку $|\widehat{f}(-\omega)| = |\overline{\widehat{f}(\omega)}| = |\widehat{f}(\omega)|$. Пусть СФ $|\widehat{h}(\omega)|^2$ последовательности $h_n, n \in \mathbf{Z}$ имеет вид, как на рис. 16 (верх), при этом $|\widehat{h}(0)|^2 \neq 0$ и $|\widehat{h}(\pi)|^2 \approx 0$. Тогда последовательность $h_n, n \in \mathbf{Z}$ является низкочастотным фильтром [27] для отрезка частот $[0; \pi/2]$ и выделяет из сигнала $y_n, n \in \mathbf{Z}$ такой сигнал $f_n, n \in \mathbf{Z}$, который содержит преимущественно низкие частоты сигнала $y_n, n \in \mathbf{Z}$. Аналогично, если СФ последовательности $h_n, n \in \mathbf{Z}$ имеет вид, как на рис. 16 (низ), при этом $|\widehat{h}(0)|^2 \approx 0$ и $|\widehat{h}(\pi)|^2 \neq 0$, то последовательность $h_n, n \in \mathbf{Z}$ является высокочастотным фильтром [27] для отрезка частот $[\pi/2; \pi]$ и выделяет из сигнала $y_n, n \in \mathbf{Z}$ такой сигнал $f_n, n \in \mathbf{Z}$, который содержит преимущественно высокие частоты сигнала $y_n, n \in \mathbf{Z}$. Понятия

низкочастотного и высокочастотного фильтров для непрерывных или дискретных конечных сигналов определяются аналогично.

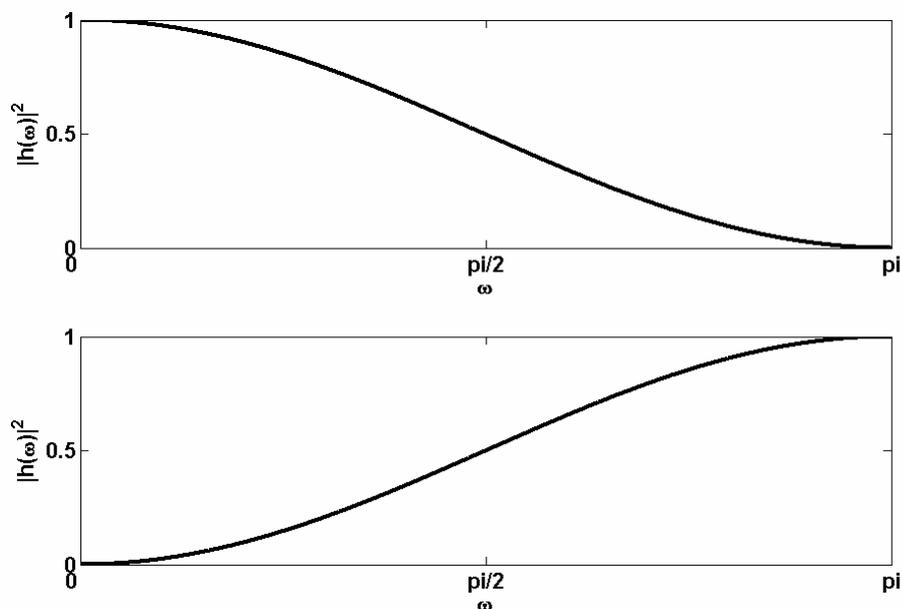


Рис. 16. Качественный вид функции $|\hat{h}(\omega)|^2$ низкочастотного (верх) и высокочастотного (низ) фильтров

4.2. Кратномасштабный анализ пространства $L^2(\mathbf{R})$

Наиболее просто ввести понятие дискретного вейвлет преобразования на основе кратномасштабного анализа, поскольку вейвлет анализ сигналов, по сути, и является кратномасштабным анализом (используются сдвинутые и растянутые (сжатые) версии одной и той же функции). Условно способ кратномасштабного, кратно-разрешающего или многомасштабного анализа (англ. слова – multiscale и multiresolution), состоит в том, чтобы взглянуть на исследуемый объект (в данном случае сигнал) сначала с помощью микроскопа, потом - через лупу, затем посмотреть невооруженным взглядом, и, наконец, оценить издали, отойдя на пару шагов. Глядя в бинокль, кинокамеру или микроскоп и пытаясь уловить максимально четкое изображение интересующих объектов, во многих случаях наблюдатель, не осознавая этого, проводит подобный анализ.

4.2.1. Масштабная функция и подпространства V_j

Определение. Кратномасштабным анализом пространства $L^2(\mathbf{R})$ называется последовательность замкнутых подпространств $V_j \in L^2(\mathbf{R}), j \in \mathbf{Z}$ со следующими свойствами [2], [5], [10-13], [16], [22], [25]:

- $V_j \subset V_{j+1}$;
- $y(t) \in V_j \Leftrightarrow y(2 \cdot t) \in V_{j+1}$;

- $y(t) \in V_0 \Leftrightarrow y(t+1) \in V_0$;
- $\cup_{j \in \mathbf{Z}} V_j$ плотно в $L^2(\mathbf{R})$, $\cap_{j \in \mathbf{Z}} V_j = \{0\}$;
- найдется такая масштабная функция $\varphi(t) \in V_0$ с ненулевым интегралом, что набор функций $\{\varphi(t-n) | n \in \mathbf{Z}\}$ составляет базис Рисса в подпространстве V_0 .

Заметим, что из второго и третьего свойств определения следует, что набор функций $\{\varphi_{j,n}(t) = \sqrt{2^j} \varphi(2^j \cdot t - n) | n \in \mathbf{Z}\}$ составляет базис Рисса подпространства V_j . Индекс j будем называть уровнем разрешения.

Поскольку $\varphi(t) \in V_0 \subset V_1$, то найдется такая последовательность $h_n \in l^2(\mathbf{Z})$, что выполняется следующее двухмасштабное соотношение

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \cdot \sum_n h_n \cdot \varphi(2 \cdot t - n). \quad (69)$$

Последовательность $h_n \in l^2(\mathbf{Z})$ называют масштабным фильтром.

Интегрируя равенство (69) и деля обе части на ненулевой интеграл от $\varphi(t)$, получаем

$$\sum_n h_n = \sqrt{2}. \quad (70)$$

Если $\varphi(t) \in L^1(\mathbf{R})$, то при весьма общих условиях она однозначно определяется двухмасштабным соотношением (69) и нормировкой

$$\int \varphi(t) dt = \hat{\varphi}(0) = 1. \quad (71)$$

Обозначим $H(\omega) = \hat{h}(\omega) = \sum_n h_n \cdot \exp(-i \cdot \omega \cdot n)$, тогда, применяя ПФ к обеим частям двухмасштабного соотношения (69), получаем

$$\hat{\varphi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} H(\omega/2) \cdot \hat{\varphi}(\omega/2). \quad (72)$$

Поскольку $\hat{\varphi}(0) = 1$, то, последовательно применяя (72), имеем

$$\hat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{+\infty} \frac{H(2^{-j} \omega)}{\sqrt{2}}. \quad (73)$$

Таким образом, при выполнении весьма общих требований, последовательность $h_n \in l^2(\mathbf{Z})$ задает ПФ масштабной функции $\varphi(t)$.

Чтобы с помощью набора функций $\{\varphi(t-n) | n \in \mathbf{Z}\}$ можно было приблизить хотя бы самую простую функцию – константу – необходимо, чтобы целочисленные сдвиги масштабной функции формировали разбиение единицы, т.е.

$$\forall t \in \mathbf{R} \rightarrow \sum_n \varphi(t-n) = 1. \quad (74)$$

Используя формулу суммирования Пуассона, получаем, что (74) равносильно

$$\hat{\varphi}(2 \cdot \pi \cdot n) = \delta_n, n \in \mathbf{Z}. \quad (75)$$

Из (75) и (72) следует, что

$$H(\pi) = 0 \Leftrightarrow \sum_n (-1)^n \cdot h_n = 0. \quad (76)$$

Поскольку

$$H(0) = \sum_n h_n = \sqrt{2}, \quad (77)$$

то масштабный фильтр $h_n, n \in \mathbf{Z}$ является низкочастотным фильтром.

В большинстве случаев для функции $\varphi(t)$ нет явного выражения. Тем не менее, существуют быстрые алгоритмы на основе двухмасштабного соотношения (69) для вычисления значений функции $\varphi(t)$ с произвольной точностью в диадических точках $t = 2^{-j} \cdot n, (j, n) \in \mathbf{Z}^2$. Для приложений обычно достаточно знать коэффициенты $h_n, n \in \mathbf{Z}$.

Подпространства $V_j, j \in \mathbf{Z}$ используются для аппроксимации функций с помощью проекций на эти подпространства. Так как объединение всех V_j плотно в $L^2(\mathbf{R})$, то любая квадратично интегрируемая функция может быть приближена с произвольной точностью такими проекциями. Например, определим подпространства V_j как

$$V_j = \left\{ y(t) \in L^2(\mathbf{R}) \mid \forall n \in \mathbf{Z} \rightarrow y \Big|_{[2^{-j} \cdot n, 2^{-j} \cdot (n+1)]} = \text{const} \right\}. \quad (78)$$

Так определенные подпространства V_j порождаются сдвигами и растяжениями (сжатиями) масштабной функции Хаара $\varphi_{Haar}(t) = I_{[0,1]}(t)$.

Рассмотрим 2π -периодическую функцию

$$F(\omega) = \sum_n |\hat{\varphi}(\omega + 2\pi \cdot n)|^2. \quad (79)$$

Очевидно, условие того, что целочисленные сдвиги $\varphi(t)$ формируют базис Рисса в V_0 равносильно условию того, что существуют такие положительные константы C_1 и C_2 , что

$$0 < C_1 \leq F(\omega) \leq C_2. \quad (80)$$

Используя (72) и перегруппировывая слагаемые с четными и нечетными индексами в (79), получаем, что

$$2 \cdot F(2 \cdot \omega) = |H(\omega)|^2 \cdot F(\omega) + |H(\omega + \pi)|^2 \cdot F(\omega + \pi). \quad (81)$$

4.2.2. Вейвлет функция и подпространства W_j

Пусть $W_j, j \in \mathbf{Z}$ обозначает такие подпространства, что

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j. \quad (82)$$

Подпространство W_j содержит “уточняющую” информацию, необходимую для перехода с уровня разрешения j на уровень разрешения $j+1$. Следовательно,

$$L^2(\mathbf{R}) = \text{closure} \left\{ \bigoplus_j W_j \right\}, \quad (83)$$

или, фиксируя некоторый уровень разрешения j_0 ,

$$L^2(\mathbf{R}) = \text{closure} \left\{ V_{j_0} \oplus \left(\bigoplus_{j=j_0}^{+\infty} W_j \right) \right\}. \quad (84)$$

Формулы (83) и (84) задают кратномасштабное разложения пространства $L^2(\mathbf{R})$.

Функция $\psi(t)$ называется вейвлет функцией, если набор функций $\{\psi(t-n) | n \in \mathbf{Z}\}$ составляет базис Рисса подпространства W_0 . Заметим, что тогда набор функция $\{\psi_{j,n}(t) = \sqrt{2^j} \psi(2^j \cdot t - n) | n \in \mathbf{Z}\}$ составляет базис Рисса подпространства W_j . Хотя требование ортогональности на подпространства $W_j, j \in \mathbf{Z}$ и не накладывалось, предполагается, что W_j и $W_{j'}$ приближенно ортогональны для достаточно больших значений $|j - j'|$, что позволяет набору функций $\psi_{j,n}(t)$ формировать базис Рисса для всего пространства $L^2(\mathbf{R})$.

Поскольку $\psi(t) \in V_1$, то найдется такая последовательность $g_n \in l^2(\mathbf{Z})$, что выполняется двухмасштабное равенство

$$\psi(t) = \sqrt{2} \cdot \sum_n g_n \cdot \varphi(2 \cdot t - n). \quad (85)$$

Последовательность $g_n \in l^2(\mathbf{Z})$ называют вейвлет фильтром. Из (85) следует, что ПФ вейвлет функции удовлетворяет равенству

$$\bar{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot G(\omega/2) \cdot \bar{\varphi}(\omega/2), \quad (86)$$

где $G(\omega) = \bar{g}(\omega) = \sum_n g_n \cdot \exp(-i \cdot \omega \cdot n)$.

Каждое из подпространств V_j и W_j имеет дополнение в пространстве $L^2(\mathbf{R})$, которые обозначим V_j^c и W_j^c соответственно. Ясно, что

$$V_j^c = \bigoplus_{i=j}^{+\infty} W_i \text{ и } W_j^c = \bigoplus_{i \neq j} W_i. \quad (87)$$

Обозначим P_j - оператор проектирования на подпространство V_j параллельно V_j^c и Q_j - оператор проектирования на подпространство W_j параллельно W_j^c . Тогда функция $y(t) \in L^2(\mathbf{R})$ может быть представлена в виде

$$y(t) = \sum_j Q_j y(t) = \sum_{j,n} \alpha_{j,n} \psi_{j,n}(t). \quad (88)$$

Далее будет описано, какие условия необходимо наложить на масштабную и вейвлет функции, чтобы их сдвиги и растяжения (сжатия) образовывали ортонормальный базис пространства $L^2(\mathbf{R})$, а также как найти коэффициенты $\alpha_{j,n}$ в (88).

4.3. Ортонормальный базис вейвлетов

Введем понятие ортогонального кратномасштабного анализа. Это такой кратномасштабный анализ, в котором уточняющие подпространства W_j являются ортогональными дополнениями V_j до V_{j+1} . Достаточным условием ортогональности кратномасштабного анализа является условие того, что

$$V_0 \perp W_0, \quad (89)$$

или

$$\langle \psi, \varphi(t-n) \rangle = 0, n \in \mathbf{Z}. \quad (90)$$

С учетом формулы суммирования Пуассона, (90) эквивалентно условию

$$\forall \omega \in \mathbf{R} \rightarrow \sum_n \widehat{\psi}(\omega + 2 \cdot \pi \cdot n) \cdot \overline{\widehat{\varphi}(\omega + 2 \cdot \pi \cdot n)} = 0. \quad (91)$$

Ортонормальная масштабная функция, это такая функция $\varphi(t)$, что набор функций $\{\varphi(t-n) | n \in \mathbf{Z}\}$ составляет ортонормальный базис подпространства V_0 , т.е.

$$\langle \varphi, \varphi(t-n) \rangle = \delta_n, n \in \mathbf{Z}. \quad (92)$$

Тогда набора функций $\{\varphi_{j,n}(t) = \sqrt{2^j} \varphi(2^j \cdot t - n) | n \in \mathbf{Z}\}$ является ортонормальным базисом подпространства V_j . Учитывая формулу суммирования Пуассона, получаем, что (92) эквивалентно условию

$$\forall \omega \in \mathbf{R} \rightarrow \sum_n |\widehat{\varphi}(\omega + 2 \cdot \pi \cdot n)|^2 = F(\omega) = 1. \quad (93)$$

Из формул (81) и (93) следует, что

$$\forall \omega \in \mathbf{R} \rightarrow |H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 2 \Leftrightarrow \forall p \in \mathbf{Z} \rightarrow \sum_n h_n \cdot h_{n-2p} = \delta_p. \quad (94)$$

Условия (93) и (94) эквивалентны, но они обеспечивают только необходимое условие ортогональности сдвигов масштабной функции.

Ортонормальная вейвлет функция, это такая функция $\psi(t)$, что набор функций $\{\psi(t-n) | n \in \mathbf{Z}\}$ составляет ортонормальный базис подпространства W_0 , т.е.

$$\langle \psi, \psi(t-n) \rangle = \delta_n, n \in \mathbf{Z}. \quad (95)$$

Тогда набор функций $\{\psi_{j,n}(t) = \sqrt{2^j} \psi(2^j \cdot t - n) | n \in \mathbf{Z}\}$ является ортонормальным базисом подпространства W_j . Учитывая формулу суммирования Пуассона, получаем, что (95) эквивалентно условию

$$\forall \omega \in \mathbf{R} \rightarrow \sum_n |\widehat{\psi}(\omega + 2 \cdot \pi \cdot n)|^2 = 1. \quad (96)$$

Используя аналогичные рассуждения, что и выше, получаем необходимое условие ортогональности сдвигов вейвлет функции

$$\forall \omega \in \mathbf{R} \rightarrow |G(\omega)|^2 + |G(\omega + \pi)|^2 = 2 \Leftrightarrow \forall p \in \mathbf{Z} \rightarrow \sum_n g_n \cdot g_{n-2p} = \delta_p. \quad (97)$$

Так как подпространства W_j взаимно ортогональны, то набор функций $\{\psi_{j,n}(t) | (j,n) \in \mathbf{Z}^2\}$ составляет ортонормальный базис пространства $L^2(\mathbf{R})$.

В случае ортонормальных вейвлет и масштабных функций операторы P_j и Q_j могут быть записаны в виде

$$P_j y(t) = \sum_n \langle y, \varphi_{j,n} \rangle \cdot \varphi_{j,n}(t) \text{ и } Q_j y(t) = \sum_n \langle y, \psi_{j,n} \rangle \cdot \psi_{j,n}(t). \quad (98)$$

Значит, в силу кратномасштабных разложений (83) и (84) для некоторого фиксированного уровня разрешения $j_0 \in \mathbf{Z}$ и $y(t) \in L^2(\mathbf{R})$ выполняется, что

$$y(t) = \sum_{j,n} \alpha_{j,n} \cdot \psi_{j,n}(t) = \sum_n \beta_{j_0,n} \cdot \varphi_{j_0,n}(t) + \sum_{j=j_0}^{+\infty} \sum_n \alpha_{j,n} \cdot \psi_{j,n}(t), \quad (99)$$

где масштабные коэффициенты $\beta_{j_0,n} = \langle y, \varphi_{j_0,n} \rangle$ и вейвлет коэффициенты $\alpha_{j,n} = \langle y, \psi_{j,n} \rangle$.

Используя равенство (93), можно показать, что условие (91) записывается в виде

$$\forall \omega \in \mathbf{R} \rightarrow G(\omega) \cdot \overline{H(\omega)} + G(\omega + \pi) \cdot \overline{H(\omega + \pi)} = 0. \quad (100)$$

Отсюда следует, что функция $G(\omega)$ должна иметь вид

$$G(\omega) = A(\omega) \cdot \overline{H(\omega + \pi)}, \quad (101)$$

где $A(\omega)$ такая 2π -периодическая функция, что

$$A(\omega + \pi) = -A(\omega). \quad (102)$$

Из ортогональности набора функций $\varphi_{j,n}(t)$ непосредственно следует ортогональность набора функций $\psi_{j,n}(t)$, если

$$|A(\omega)| = 1. \quad (103)$$

Для приложений важно, чтобы масштабная и вейвлет функции имели компактные носители во временной области. Это будет иметь место, если функции $H(\omega)$ и $G(\omega)$ - тригонометрические полиномы, т.е. последовательности $h_n, n \in \mathbf{Z}$ и $g_n, n \in \mathbf{Z}$ содержат конечное число ненулевых коэффициентов. В таком случае, если масштабная функция имеет компактный носитель, то, благодаря равенству (85), и вейвлет функция будет иметь компактный носитель, при условии, что $A(\omega)$ является тригонометрическим полиномом. Единственные тригонометрические полиномы, удовлетворяющие условиям (102) и (103) имеют вид

$$A(\omega) = C \cdot \exp(-i \cdot \omega \cdot (2 \cdot n + 1)), |C| = 1, n \in \mathbf{Z}. \quad (104)$$

С точностью до константы и целого сдвига такой вид $A(\omega)$ определяет одну и ту же вейвлет функцию. Любой другой выбор $A(\omega)$ приводит к вейвлет функции с неограниченным носителем. Если коэффициенты $h_n, n \in \mathbf{Z}$ - действительные, то и коэффициенты $g_n, n \in \mathbf{Z}$ - действительные при условии, что $C = \pm 1$. Обычно полагают $A(\omega) = -\exp(i \cdot \omega)$. Значит,

ортонормальная вейвлет функция выражается через ортонормальную масштабную функцию по формуле (85), где коэффициенты $g_n, n \in \mathbf{Z}$ определяются по коэффициентам $h_n, n \in \mathbf{Z}$ согласно равенству

$$G(\omega) = -\exp(i \cdot \omega) \cdot \overline{H(\omega + \pi)} \Leftrightarrow g_n = (-1)^n \cdot \overline{h_{-n}}. \quad (105)$$

Таким образом, если построить ортонормальную масштабную функцию с компактным носителем (т.е., по сути, найти подходящий масштабный фильтр $h_n, n \in \mathbf{Z}$ конечной длины), то по формуле (105) однозначно определяется вейвлет фильтр $g_n, n \in \mathbf{Z}$, по которому, используя формулу (85), можно построить ортонормальную вейвлет функцию с компактным носителем.

Существует процедура ортогонализации, которая позволяет построить ортонормальную масштабную функцию. Действительно, пусть целочисленные сдвиги некоторой масштабной функции $\varphi(t)$ формируют базис Рисса в подпространстве V_0 , тогда соответствующая функция $F(\omega) > 0 \forall \omega \in \mathbf{R}$ и ортонормальный базис подпространства V_0 можно задать целочисленными сдвигами такой масштабной функции $\varphi_{orth}(t)$, что ее ПФ имеет вид

$$\widehat{\varphi}_{orth}(\omega) = \frac{\widehat{\varphi}(\omega)}{\sqrt{F(\omega)}}. \quad (106)$$

При этом $\varphi_{orth}(t)$ будет удовлетворять условию (93). К сожалению, такой подход не гарантирует, что функция $\varphi_{orth}(t)$ будет иметь компактный носитель.

Также, построение ортонормальной масштабной функции может быть произведено согласно следующей теореме [10].

Теорема 1. Пусть $\varphi(t) \in L^2(\mathbf{R})$ - ортонормальная масштабная функция.

Тогда ПФ $H(\omega) = \sum_n h_n \cdot \exp(-i \cdot \omega \cdot n)$ последовательности

$h_n = \langle 2^{-1/2} \cdot \varphi, \varphi(2\Box - n) \rangle, n \in \mathbf{Z}$ удовлетворяет условиям

$$\forall \omega \in \mathbf{R} \rightarrow |H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 2, \quad (107)$$

$$H(0) = \sqrt{2}. \quad (108)$$

Обратно, если $H(\omega)$ - 2π -периодическая и непрерывно дифференцируемая в окрестности точки $\omega = 0$ функция, удовлетворяющая условиям (107) и (108), и при этом

$$\inf_{\omega \in [-\pi/2; \pi/2]} |H(\omega)| > 0, \quad (109)$$

то функция

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{+\infty} \frac{H(2^{-j} \cdot \omega)}{\sqrt{2}}. \quad (110)$$

является ПФ ортонормальной масштабной функции $\varphi(t) \in L^2(\mathbf{R})$.

Остается наложить некоторые дополнительные условия на масштабный фильтр $h_n, n \in \mathbf{Z}$, чтобы полученная из формулы (110) масштабная функция (а, следовательно, и вейвлет функция) имела компактный носитель и обладала некоторыми другими полезными свойствами.

Простейшим примером ортонормальной масштабной функции является масштабная функция Хаара $\varphi_{Haar}(t) = I_{[0,1]}(t)$, которой соответствует вейвлет функция Хаара

$$\psi_{Haar}(t) = \varphi_{Haar}(2 \cdot t) - \varphi_{Haar}(2 \cdot t - 1) = I_{[0,1/2]}(t) - I_{[1/2,1]}(t). \quad (111)$$

Сдвиги и растяжения (сжатия) масштабной и вейвлет функций Хаара как раз и образуют простейший ортонормальный базис, базисные функции которого имеют компактные носители. Недостатком функций такого базиса является их негладкость и медленное убывание ПФ функций Хаара на бесконечности.

4.4. Вейвлеты и полиномы

Моменты масштабной и вейвлет функций для $p \in \square \cup \{0\}$ равны

$$k_p^\varphi = \int t^p \cdot \varphi(t) dt \text{ и } k_p^\psi = \int t^p \cdot \psi(t) dt. \quad (112)$$

Из формулы (71) получаем, что $k_0^\varphi = 1$. Из формул (76) и (105) следует, что $G(0) = \sum_k g_k = 0$. Поэтому, согласно формуле (86), $\tilde{\psi}(0) = 0 \Leftrightarrow k_0^\psi = 0$.

Пусть N обозначает число нулевых моментов вейвлет функции, т.е.

$$k_p^\psi = 0 \quad (0 \leq p < N), \quad k_N^\psi \neq 0. \quad (113)$$

Гладкость масштабной и вейвлет функций увеличивается при увеличении числа нулевых моментов. С помощью вейвлет коэффициентов можно характеризовать гладкость анализируемой функции [5], [25]. Действительно, пусть $y(t) \in C^s(\mathbf{R})$ - функция из пространства Гельдера порядка $s > 0$ ($s \notin \square$). В таком случае $\langle y, \varphi_{0,n} \rangle = O(1)$ и $\langle y, \psi_{j,n} \rangle = O(2^{-j(s+1/2)})$ при $s < N$, $j \geq 0$, $n \in \mathbf{Z}$ и $\varphi(t), \psi(t) \in C^r(\mathbf{R})$, где $r > s$. От количества нулевых моментов N вейвлет функции также зависит скорость сходимости аппроксимации гладкой функции $y(t) \in C^N(\mathbf{R})$, поскольку

$$\|P_j y - y\|_2 = O(2^{-j \cdot N}) \text{ при } j \geq 0. \quad (114)$$

Таким образом, наличие определенного количества нулевых моментов у вейвлет функции крайне важно для приложений.

В дальнейшем будем считать, что вейвлет и масштабный фильтры связаны соотношением (105). Пусть $N \geq 1$, тогда из определения ПФ следует, что функция $\tilde{\psi}(\omega)$ и ее $N-1$ производная равны нулю при $\omega = 0$. Поскольку $\tilde{\varphi}(0) \neq 0$, то, согласно формуле (86), функция $G(\omega)$ и ее $N-1$ производная равны нулю при $\omega = 0$. Значит, вейвлет фильтр $g_n, n \in \mathbf{Z}$ имеет N нулевых дискретных моментов, т.е.

$$\sum_n g_n \cdot n^p = 0, p = 0, 1, \dots, N-1. \quad (115)$$

Как следует из формулы (105), это эквивалентно тому, что функция $H(\omega)$ и $N-1$ ее производная равны нулю в окрестности точки $\omega = \pi$. Согласно формуле (72) это равносильно тому, что

$$i^p \cdot \widehat{\varphi}^{(p)}(2 \cdot \pi \cdot n) = \delta_n \cdot k_p^p, p = 0, 1, \dots, N-1. \quad (116)$$

Из формулы суммирования Пуассона получаем, что (116) равносильно

$$\sum_n (t-n)^p \cdot \varphi(t-n) = k_p^p, p = 0, 1, \dots, N-1. \quad (117)$$

Перегруппировывая слагаемые в (117) получаем, что если вейвлет функция имеет N нулевых моментов, то любой многочлен степени не выше $N-1$ может быть записан в виде линейной комбинации функций $\varphi(t-n), n \in \mathbf{Z}$.

4.5. Ортонормальный базис Добеши с компактным носителем

Итак, необходимо построить ортонормальную масштабную функцию с компактным носителем. Как уж упоминалось, для этого необходимо наложить некоторые дополнительные ограничения на масштабный фильтр $h_n, n \in \mathbf{Z}$. Разумным кажется наложить такие ограничения, при которых соответствующая ортонормальная вейвлет функция будет иметь N нулевых моментов. Как следует из раздела 4.4, в таком случае функция $H(\omega)$ и ее $N-1$ производная равны нулю при $\omega = \pi$. Значит, функция $H(\omega)$ представима в виде

$$H(\omega) = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1 + \exp(-i \cdot \omega)}{2} \right)^N \cdot K(\omega), \quad (118)$$

где $K(\omega)$ - некоторый тригонометрический многочлен. Трудность заключается в том, чтобы найти такой тригонометрический многочлен $K(\omega)$ минимальной степени (минимальная степень необходима, чтобы соответствующие базисные функции имели компактный носитель минимально возможной длины), что функция $H(\omega)$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Пусть

$$|H(\omega)|^2 = 2 \cdot \cos^{2N} \left(\frac{\omega}{2} \right) \cdot \sum_{n=0}^{N-1} C_{N-1+n}^n \cdot \sin^{2n} \left(\frac{\omega}{2} \right). \quad (119)$$

Базис Добеши порождается такими ортонормальными масштабной и вейвлет функциями с компактными носителями, что соответствующая им функция $H(\omega)$ удовлетворяет условию (119) при некотором $N \in \mathbb{N}$, а функция $G(\omega) = -\exp(i \cdot \omega) \cdot H(\omega + \pi)$. Выполняется следующая [10]

Теорема 2. Если $\psi(t)$ - вейвлет функция с $N \in \mathbb{N}$ нулевыми моментами, которая порождает ортонормальный базис пространства $L^2(\mathbf{R})$, то она имеет носитель, размера больше либо равного $2 \cdot N - 1$. Вейвлет и масштабная функции Добеши имеют носители минимальной длины,

равные $[-N+1; N]$ и $[0; 2 \cdot N - 1]$ соответственно. Соответствующие этим функциям вейвлет и масштабный фильтры Добеши имеют $M = 2 \cdot N$ ненулевых коэффициентов.

Таким образом, формулы (105) и (119) дают явные выражения для вычисления масштабного и вейвлет фильтров, которым будет соответствовать ортонормальная вейвлет функция с N нулевыми моментами и компактным носителем. Заметим, что равенство (105) в случае вейвлет и масштабных фильтров конечной длины M принимает вид

$$g_n = (-1)^n \cdot h_{M-1-n} \text{ или } h_n = (-1)^{n+1} \cdot g_{M-1-n}, \quad n = 0, 1, \dots, M-1. \quad (120)$$

Тем не менее, имеется некоторый произвол в определении функции $H(\omega)$, а значит и в определении вейвлет и масштабных фильтров, так как формула (119) определяет только модуль, но не фазу комплекснозначной функции $H(\omega)$. Решение, которое первоначально предложила Добеши, соответствует выбору функции $H(\omega)$ с экстремальной фазой. Пусть $h_n, n = 0, 1, \dots, M-1$ - масштабный фильтр, полученный при произвольном определении фазы функции $H(\omega)$, а $h_n^{(ep)}, n = 0, 1, \dots, M-1$ - масштабный фильтр Добеши с экстремальной фазой. Тогда $\sum_{n=0}^m h_n^2 \leq \sum_{n=0}^m (h_n^{(ep)})^2, m = 0, 1, \dots, M-1$. В дальнейшем будут использоваться фильтры Добеши, имеющие экстремальную фазу. В приложении А приведены масштабные фильтры Добеши для разных значений N , вейвлет фильтры Добеши могут быть подсчитаны по формуле (120), при этом соответствующие вейвлет и масштабная функции Добеши являются липшецевыми функциями с показателем ≈ 0.55 в случае $N = 2$, с показателем ≈ 1.08 в случае $N = 3$ (т.е. непрерывно дифференцируемы), а в случае достаточно больших N удовлетворяют равномерному условию Липшица с показателем порядка $0.2 \cdot N$.

На рис. 17 изображены графики масштабной (верх) и вейвлет (низ) функций Добеши для $N = 2$, а на рис. 18 – для $N = 4$.

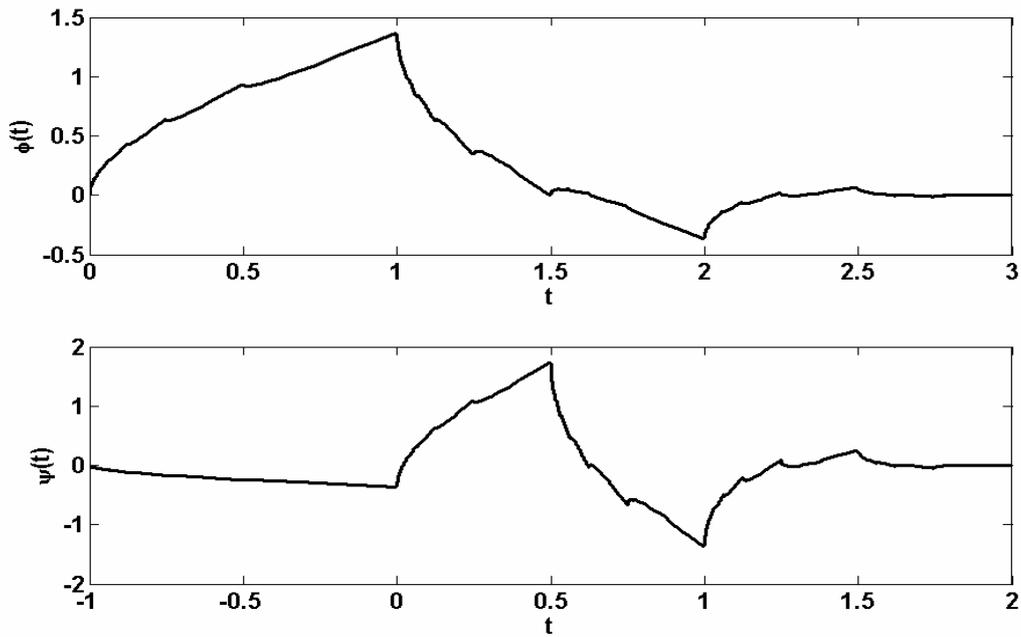


Рис. 17. Масштабная (верх) и вейвлет (низ) функции Добеши, $N = 2$.

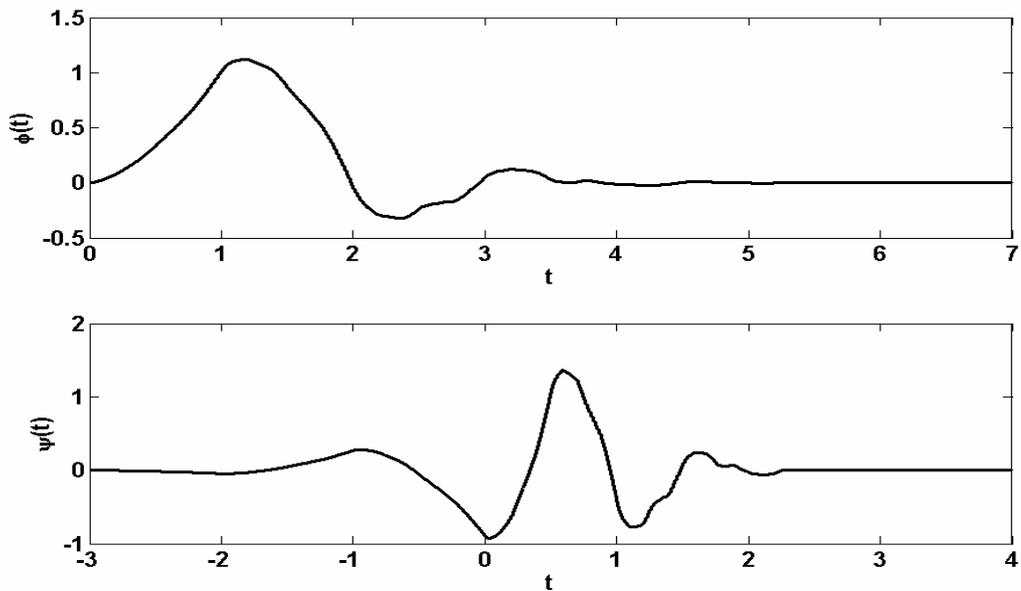


Рис. 18. Масштабная (верх) и вейвлет (низ) функции Добеши, $N = 4$.

4.6. Вейвлеты и фильтры

4.6.1. Дискретное вейвлет преобразование (ДВП)

В дальнейшем будем использовать только ортонормальные базисы Добеши с компактным носителем. Поскольку наборы функций $\{\psi_{j,n}(t) | n \in \mathbf{Z}\}$ и $\{\varphi_{j,n}(t) | n \in \mathbf{Z}\}$ составляют ортонормальные базисы подпространств W_j и V_j соответственно, то проекции функции $y(t) \in L^2(\mathbf{R})$ на эти подпространства задаются коэффициентами

$$\alpha_{j,n} = \langle y, \psi_{j,n} \rangle \text{ и } \beta_{j,n} = \langle y, \varphi_{j,n} \rangle \quad (121)$$

соответственно. Обозначим $\bar{a}_n = a_{-n}$, $\overline{\overline{a_n}} = \begin{cases} a_n, & \text{если } n = 2 \cdot k; \\ 0, & \text{если } n = 2 \cdot k + 1. \end{cases}$ Выполняется [10]

Теорема 3. Пусть $g_n, n \in \mathbf{Z}$ и $h_n, n \in \mathbf{Z}$ - вейвлет и масштабный фильтры соответственно. Прямое ДВП задается формулами

$$\alpha_{j-1,n} = \sum_l g_{l-2n} \cdot \beta_{j,l} = \beta_{j,n} * \hat{g}_{2n} \text{ и } \beta_{j-1,n} = \sum_l h_{l-2n} \cdot \beta_{j,l} = \beta_{j,n} * \hat{h}_{2n}. \quad (122)$$

Обратное ДВП задается формулами

$$\beta_{j,n} = \sum_l g_{n-2l} \cdot \alpha_{j-1,l} + \sum_l h_{n-2l} \cdot \beta_{j-1,l} = \overline{\overline{\alpha_{j-1,n}}} * g_n + \overline{\overline{\beta_{j-1,n}}} * h_n. \quad (123)$$

Поскольку, в силу формул (76), (77), (97) и (105), $H(0) = G(\pi) = \sqrt{2}$ и $H(\pi) = G(0) = 0$, то масштабный фильтр $h_n, n \in \mathbf{Z}$ действует, как низкочастотный фильтр для отрезка частот $[0; \pi/2]$, а вейвлет фильтр $g_n, n \in \mathbf{Z}$ действует как высокочастотный фильтр для отрезка частот $[\pi/2; \pi]$. Таким образом, из равенств (72) и (86) следует, что основная часть энергии функций из подпространств V_0 и W_0 сконцентрирована на отрезках частот $[0; \pi]$ и $[\pi; 2\pi]$ соответственно. Значит, с хорошей точностью можно считать, что кратномасштабное разложение (83) пространства $L^2(\mathbf{R})$ на вейвлет подпространства W_j в частотной области эквивалентно разбиению оси частот на отрезки вида $[2^j \cdot \pi; 2^{j+1} \cdot \pi]$ при $j \in \mathbf{Z}$.

4.6.2. Задание начальных условий для ДВП

Пусть для некоторой функции $y(t) \in L^2(\mathbf{R})$ известны масштабные коэффициенты $\beta_{j_i,n} = \langle y, \varphi_{j_i,n} \rangle$ (т.е., по сути, известна проекция этой функции на подпространство V_{j_i}). Для произвольно выбранного уровня разрешения $j_0 < j_1$ в силу кратномасштабного разложения (84) подпространство V_{j_1} можно представить в виде прямой суммы следующих подпространств

$$V_{j_1} = V_{j_0} \oplus \left(\bigoplus_{j=j_0}^{j_1-1} W_j \right). \quad (124)$$

Тогда, согласно соотношениям (122), можно подсчитать коэффициенты, задающие проекцию функции $y(t)$ на эти подпространства. Это будут коэффициенты

$$\left[\left\{ \beta_{j_0,n} \right\}_{n \in \mathbf{Z}} ; \left\{ \alpha_{j,n} \right\}_{n \in \mathbf{Z}}, j = j_1 - 1, j_1 - 2, \dots, j_0 \right]. \quad (125)$$

Обычно в приложениях сигнал $y(t)$ измеряется прибором с конечным разрешением, т.е. аналоговый сигнал усредняется и преобразуется в дискретную форму $y_n, n \in \mathbf{Z}$. Пусть расстояние между отсчетами равно $L^{-1} : \exists J \in \mathbf{N} \rightarrow L = 2^J$. По сути, дискретный сигнал $y_n, n \in \mathbf{Z}$

равен усреднению сигнала $y(t)$ по участкам длины $L^{-1} = 2^{-J}$, т.е.

$$y_n \approx y\left(\frac{n}{L}\right), n \in \mathbf{Z}.$$

Итак, необходимо определить коэффициенты $\beta_{J,n}$. Поскольку набор функций $\{\varphi_{J,n}(t) = 2^{J/2} \cdot \varphi(2^J \cdot t - n) | n \in \mathbf{Z}\}$ - ортонормальный и $L = 2^J$, то

$$L^{1/2} \cdot \beta_{J,n} = \int y(t) \cdot \frac{1}{L^{-1}} \varphi\left(\frac{t - L^{-1} \cdot n}{L^{-1}}\right) dt \quad (126)$$

представляет собой взвешенное среднее значений сигнала $y(t)$ в окрестности точки $L^{-1} \cdot n$ по области, размер которой пропорционален L^{-1} . Значит, если сигнал $y(t)$ регулярен в окрестности точки $L^{-1} \cdot n$, то

$$L^{1/2} \cdot \beta_{J,n} \approx y\left(\frac{n}{L}\right) \approx y_n. \quad (127)$$

Таким образом, по формуле (127) можно вычислить коэффициенты $\beta_{J,n}, n \in \mathbf{Z}$, которые и являются своего рода начальными условиями для прямого ДВП.

4.6.3. ДВП сигналов конечной длины

Реальный сигнал $y(t)$ длится конечное время, поэтому будем считать, что $t \in [0; T]$. На практике обычно известна только некоторая равномерная выборка $y_n = y(n \cdot t_s), n = 0, 1, \dots, L-1$ значений сигнала $y(t)$, где $t_s = T/L$. Пусть $\mathcal{JON} : L = 2^J$. Положим $\beta_{J,n} = L^{-1/2} \cdot y_n, n = 0, 1, \dots, L-1$. Это значит, что сигнал $y(t)$ рассматривается как некоторая функция из пространства $L^2([0; T])$, для которой известны коэффициенты $\beta_{J,n}, n = 0, 1, \dots, L-1$ ее проекции на подпространство $V_J \subset L^2([0; T])$ (аналогично построению кратномасштабного анализа пространства $L^2(\mathbf{R})$, можно построить кратномасштабный анализ пространства $L^2([0; T])$). Большой информации о дискретном сигнале получить не удастся, поскольку расстояние между отсчетами обычно фиксировано и не может изменяться. Для вычисления сверток с фильтрами $g_n, n \in \mathbf{Z}$ и $h_n, n \in \mathbf{Z}$ по формулам (122) и (123) необходимо знать значения $\beta_{J,n}$ при $n < 0$ и $n > L-1$. Самым простым решением этой проблемы является периодизация последовательности $\beta_{J,n}, n = 0, 1, \dots, L-1$ (по сути, это периодизация анализируемого сигнала). При таком подходе вычисления по формулам (122) и (123) проводятся не с обычной сверткой $*$, а с периодической сверткой \otimes .

На самом деле, использование периодических сверток эквивалентно тому, что по вейвлет базису пространства $L^2(\mathbf{R})$ строится периодический вейвлет базис пространства $L^2([0; T])$ [10], [19]. Пусть

$[\varphi_{j_0,n}(t), \psi_{j,n}(t) | j_0 \leq j, (j,n) \in \mathbf{Z}^2]$ - некоторый вейвлет базис пространства $L^2(\mathbf{R})$ для произвольного фиксированного целого $j_0 \geq 0$. Тогда

$$\left[\left\{ \varphi_{j_0,n}^{(per)}(t) \right\}_{0 \leq n \leq 2^{j_0-1}}, \left\{ \psi_{j,n}^{(per)}(t) \right\}_{0 \leq n \leq 2^j-1} | j_0 \leq j, (j,n) \in \mathbf{Z}^2 \right], \quad (128)$$

где

$$\varphi_{j_0,n}^{(per)}(t) = T^{-1/2} \cdot 2^{j_0/2} \cdot \sum_p \varphi(2^{j_0} \cdot (T^{-1} \cdot t + p) - n), \quad (129)$$

$$\psi_{j,n}^{(per)}(t) = T^{-1/2} \cdot 2^{j/2} \cdot \sum_p \psi(2^j \cdot (T^{-1} \cdot t + p) - n). \quad (130)$$

При этом

$$\int_0^T y(t) \cdot \psi_{j,n}^{(per)}(t) dt = \int y^{(per)}(t) \cdot \psi_{j,n}(t) dt, \quad (131)$$

где $y^{(per)}(t) = T^{1/2} \cdot \sum_n y(T \cdot (t+n))$. Как раз из (131) и следует, что

использование базиса (128) эквивалентно использованию периодических сверток при подсчете ДВП сигнала конечной длины.

Из вида периодического вейвлет базиса (128) ясно, что на каждом уровне разрешения j будет 2^j масштабных коэффициентов и 2^j вейвлет коэффициентов. Итак, пусть количество отсчетов в равномерной выборке сигнала равно $L = 2^J$, $J \in \mathbf{N}$. Тогда из вышеизложенного следует, что максимальный и минимальный уровни разрешения в разложении (124), для которых еще можно определить масштабные и вейвлет коэффициенты по соотношениям (122) с использованием периодических сверток вместо обычных, равны $j_1 = J$ и $j_0 = 0$. При таких значениях уровней разрешения набор коэффициентов (125) принимает вид

$$\left[\beta_{0,0}; \left\{ \alpha_{j,n} \right\}_{n=0,1,\dots,2^j-1}, j = J-1, J-2, \dots, 0 \right]. \quad (132)$$

Понятно, что разложение можно было бы провести до некоторого $j_0 > 0$. Тогда в (132) было бы больше масштабных, но меньше вейвлет коэффициентов, а именно

$$\left[\left\{ \beta_{j_0,n} \right\}_{n=0,1,\dots,2^{j_0-1}}; \left\{ \alpha_{j,n} \right\}_{n=0,1,\dots,2^j-1}, j = J-1, J-2, \dots, j_0 \right]. \quad (133)$$

Используя формулы (70), (76), (94), (97) и (105), можно показать [27], что коэффициент $\beta_{0,0}$ равен $\frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} y_n$ - среднему дискретного сигнала $y_n, n = 0, 1, \dots, L-1$. При этом периодическое ДВП (ДВП с использованием периодических сверток вместо обычных) по прежнему остается ортогональным и, поэтому, сохраняет энергию сигнала [27]. Действительно, из равенств (70), (76), (94), (97) и (105) следует, что периодическое ДВП (ПДВП) сохраняет скалярное произведение двух произвольных последовательностей $a_i, i = 0, 1, \dots, 2 \cdot q - 1$ и $b_i, i = 0, 1, \dots, 2 \cdot q - 1$ ($q \in \mathbf{N}$), т.е.

$$\sum_{i=0}^{2 \cdot q - 1} a_i \cdot b_i = \sum_{i=0}^{q-1} (a_i \otimes \hat{g}_{2 \cdot i}) \cdot (b_i \otimes \hat{g}_{2 \cdot i}) + \sum_{i=0}^{q-1} (a_i \otimes \hat{h}_{2 \cdot i}) \cdot (b_i \otimes \hat{h}_{2 \cdot i}). \quad (134)$$

Значит, выполняются равенства типа равенства Парсеваля

$$\frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} y_n^2 = \beta_{0,0}^2 + \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{n=0}^{2^j-1} \alpha_{j,n}^2, \quad (135)$$

$$\frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} y_n^2 = \sum_{n=0}^{2^{j_0}-1} \beta_{j_0,n}^2 + \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_{n=0}^{2^j-1} \alpha_{j,n}^2, 0 < j_0 < J. \quad (136)$$

Необходимо отметить следующее. При подсчете обратного ПДВП с использованием набора коэффициентов (132) или (133) получаются коэффициенты $\beta_{j,n}, n=0,1,\dots,2^j-1$. Тогда отсчеты исходного дискретного сигнала подсчитываются по формуле $y_n = L^{1/2} \cdot \beta_{j,n}, n=0,1,\dots,2^j-1$.

Несложно показать, что если длины фильтров $g_n, n \in \mathbf{Z}$ и $h_n, n \in \mathbf{Z}$ равны M , то прямое или обратное ПДВП сигнала длины L состоит максимум из $2 \cdot M \cdot L$ сложений и умножений [10]. В приложении Б приведен алгоритм прямого и обратного ПДВП.

Прямое ПДВП имеет следующий недостаток. Дело в том, что при подсчете периодических сверток используется периодическое продолжение последовательности коэффициентов $\beta_{j,n} = L^{-1/2} \cdot y_n, n=0,1,\dots,L-1$. Если значения y_0 и y_{L-1} значительно отличаются, то периодизированная последовательность коэффициентов $\beta_{j,n}, n=0,1,\dots,L-1$ будет “разрывна”, поэтому вейвлет коэффициенты $\alpha_{j,n}$ при $j \leq J-1$ и значениях n , близких к 0, будут иметь большую амплитуду. С другой стороны, так как используемые вейвлет и масштабные фильтры имеют небольшое число ненулевых элементов, то количество таких “граничных” вейвлет коэффициентов невелико, их можно отбросить и не использовать при анализе сигнала. Количество и расположение “граничных” коэффициентов для фильтров разной длины приведено в приложении В.

Итак, чтобы подсчитать ПДВП некоторого конечного дискретного сигнала, необходимо, чтобы его длина L удовлетворяла условию $L=2^J$, $J \in \mathbf{N}$. Если это не так, то ПДВП можно провести либо с частью сигнала, длина которой удовлетворяет этому условию, либо дополнить сигнал значениями, равными среднему сигнала, пока длина сигнала не будет равна степени двух. Если же длина сигнала равна $L=L' \cdot 2^{J'}$, $J' \in \mathbf{N}$, то можно подсчитать частичное прямое ПДВП, в результате которого будут получены коэффициенты

$$\left[\{ \beta_{0,n} \}_{n=0,1,\dots,L'-1}, \{ \alpha_{j,n} \}_{n=0,1,\dots,L' \cdot 2^j-1}, j=J'-1, J'-2, \dots, 0 \right]. \quad (137)$$

Заметим, что порядок нумерации уровней разрешения j у полученных в результате прямого ПДВП набора масштабных и вейвлет коэффициентов (132) или (133) не имеет большого значения. Зачастую, нумерацию уровней разрешения проводят в обратном порядке. Это значит, что дискретный сигнал $y_n, n=0,1,\dots,L-1$ ($L=2^J, J \in \mathbf{N}$) как бы “живет” на нулевом уровне разрешения и ему соответствуют масштабные коэффициенты $\beta_{0,n} = L^{-1/2} \cdot y_n, n=0,1,\dots,L-1$, а в результате прямого ПДВП

(естественно, в алгоритме приложения Б надо изменить нумерацию уровней разрешения j на обратную) начиная от уровня разрешения $j=1$ до некоторого конечного уровня разрешения $1 < j = j_0 \leq J$ получается следующий набор масштабных и вейвлет коэффициентов

$$\left[\left\{ \beta_{j_0, n} \right\}_{n=0,1,\dots,L/2^{j_0-1}}, \left\{ \alpha_{j, n} \right\}_{n=0,1,\dots,L/2^j-1}, j=1,2,\dots, j_0 \right]. \quad (138)$$

Заметим, что такой нумерации уровней разрешения j в кратномасштабном анализе пространства $L^2(\mathbf{R})$ соответствуют функции $\psi_{j,n}(t) = 2^{-j/2} \cdot \psi(2^{-j} \cdot t - n)$, а не функции $\psi_{j,n}(t) = 2^{j/2} \cdot \psi(2^j \cdot t - n)$, как было раньше, т.е. теперь детализация происходит при уменьшении j , а не при увеличении.

4.7. Физический смысл вейвлет коэффициентов

Рассмотрим для примера вейвлет Добеши с $N=1$. Для него $h_0 = h_1 = 1/\sqrt{2}$ и $g_0 = 1/\sqrt{2}$, $g_1 = -1/\sqrt{2}$. Пусть $y_n = y\left(\frac{n}{16}\right)$, $n=0,1,\dots,15$ - равномерная выборка некоторого сигнала $y(t) \in L^2([0;1])$ ($J=4$). По формуле (127) положим $\beta_{j,n} = y_n/4$, $n=0,1,\dots,15$. Тогда вычисленный с помощью прямого ПДВП вектор коэффициентов (132) имеет вид

$$\begin{bmatrix} \beta_{0,0} \\ \alpha_{0,0} \\ \alpha_{1,0} \\ \alpha_{1,1} \\ \alpha_{2,0} \\ \vdots \\ \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,0} \\ \vdots \\ \alpha_{3,7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/16 \cdot (y_0 + y_1 + \dots + y_{15}) \\ 1/16 \cdot (y_{15} + y_{14} + \dots + y_8 - y_7 - y_6 - \dots - y_0) \\ 1/8\sqrt{2} \cdot (y_7 + y_6 + y_5 + y_4 - y_3 - y_2 - y_1 - y_0) \\ 1/8\sqrt{2} \cdot (y_{15} + y_{14} + y_{13} + y_{12} - y_{11} - y_{10} - y_9 - y_8) \\ 1/8 \cdot (y_3 + y_2 - y_1 - y_0) \\ \vdots \\ 1/8 \cdot (y_{15} + y_{14} - y_{13} - y_{12}) \\ 1/4\sqrt{2} \cdot (y_1 - y_0) \\ \vdots \\ 1/4\sqrt{2} \cdot (y_{15} - y_{14}) \end{bmatrix}. \quad (139)$$

Для положительного целого λ определим скользящее среднее длины λ с началом в точке $n - \lambda + 1$ и равными весами по формуле

$$my_n(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{p=0}^{\lambda-1} f_{n-p}. \quad (140)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \beta_{0,0} &= my_{15}(16), \\ \alpha_{0,0} &= 1/2 \cdot [my_{15}(8) - my_7(8)], \\ \alpha_{1,0} &= 1/2\sqrt{2} \cdot [my_7(4) - my_3(4)], \quad \alpha_{1,1} = 1/2\sqrt{2} \cdot [my_{15}(4) - my_{11}(4)], \\ \alpha_{2,0} &= 1/4 \cdot [my_3(2) - my_1(2)], \quad \dots, \quad \alpha_{2,3} = 1/4 \cdot [my_{15}(2) - my_{13}(2)], \\ \alpha_{3,0} &= 1/4\sqrt{2} \cdot [my_1(1) - my_0(1)], \quad \dots, \quad \alpha_{3,7} = 1/4\sqrt{2} \cdot [my_{15}(1) - my_{14}(1)]. \end{aligned}$$

Таким образом, вейвлет коэффициенты уровня разрешения j пропорциональны разностям (изменениям) смежных скользящих средних длины 2^{J-j-1} с равными весами. Масштабные коэффициенты уровня разрешения j пропорциональны скользящему среднему длины 2^{J-j} с равными весами. Пусть теперь используется масштабный и вейвлет фильтры Добеши длины M . Тогда в силу свойств (70), (76), (94), (97) и (105) фильтров Добеши, вейвлет коэффициенты уровня разрешения j пропорциональны разностям (изменениям) смежных скользящих средних длины $\frac{(2^{J-j}-1) \cdot (M-1) + 1}{2}$ с разными весами, а масштабные коэффициенты уровня разрешения j пропорциональны скользящему среднему длины $(2^{J-j}-1) \cdot (M-1) + 1$ с разными весами [27].

Допустим, что известна равномерная выборка конечной длины некоторого зависящего от времени сигнала $y_n = y(n \cdot t_s), n = 0, 1, \dots, L-1, L = 2^J, J \in \mathbb{Z}$ с частотой дискретизации $f_s = 1/t_s$. Как уже отмечалось в разделе 2.1, СФ такого дискретного сигнала, подсчитываемый на основе дискретного ПФ, является линейчатым и задается на отрезке частот $[0; \pi \cdot f_s]$ в точках с абсциссами $f_k = \frac{2\pi \cdot k}{L} \cdot f_s, k = 0, 1, \dots, \lfloor L/2 \rfloor$ (на отрезке частот $[0; f_s/2]$ в точках с абсциссами $f_k = \frac{k}{L} \cdot f_s, k = 0, 1, \dots, \lfloor L/2 \rfloor$, если измерять частоту в [Гц]). Тогда, в силу частотных свойств вейвлет и масштабного фильтров $g_n, n \in \mathbb{Z}$ и $h_n, n \in \mathbb{Z}$, отмеченных в разделе 4.6.1, получаем, что разложение по подпространствам

$$V_J = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \dots \oplus W_J \oplus \dots \oplus W_{J-1} \quad (141)$$

упомянутого дискретного сигнала с помощью прямого ПДВП приблизительно задает разбиение отрезка частот $[0; \pi \cdot f_s]$ СФ сигнала на отрезки вида [27]

$$\left[0; \frac{\pi \cdot f_s}{2^J}\right], \left[\frac{\pi \cdot f_s}{2^J}; \frac{\pi \cdot f_s}{2^{J-1}}\right], \left[\frac{\pi \cdot f_s}{2^{J-1}}; \frac{\pi \cdot f_s}{2^{J-2}}\right], \dots, \left[\frac{\pi \cdot f_s}{2^{J-j}}; \frac{\pi \cdot f_s}{2^{J-j-1}}\right], \dots, \left[\frac{\pi \cdot f_s}{2}; \pi \cdot f_s\right]. \quad (142)$$

Проекция на подпространства V_j и W_j однозначно определяется коэффициентами $\beta_{j,n}$ и $\alpha_{j,n}$, которые можно сопоставить моментам времени $t \approx 2^{J-j} \cdot n \cdot t_s$. Значит, в силу закона сохранения энергии сигнала (136), квадрат вейвлет коэффициента $\alpha_{j,n}$ характеризует, сколько энергии сигнала приходится на отрезок частот $\left[\frac{\pi \cdot f_s}{2^{J-j}}; \frac{\pi \cdot f_s}{2^{J-j-1}}\right]$ в момент времени $t \approx 2^{J-j} \cdot n \cdot t_s$. Аналогично, квадрат масштабного коэффициента $\beta_{j,n}$ характеризует, сколько энергии сигнала приходится на отрезок частот $\left[0; \frac{\pi \cdot f_s}{2^j}\right]$ в момент времени $t \approx 2^{J-j} \cdot n \cdot t_s$. Значит, на основе прямого ПДВП также можно определить, какие частотные составляющие и в какие

моменты времени присутствуют в сигнале. Можно также сказать, что масштабные коэффициенты $\beta_{j,n}$ несут информацию о трендовом, глобальном поведении сигнала на масштабах размера $(2^{J-j} - 1) \cdot (M - 1) + 1$, в то время как вейвлет коэффициенты $\alpha_{j,n}$ несут информацию о локальном отклонении сигнала от тренда на масштабах размера $\frac{(2^{J-j} - 1) \cdot (M - 1) + 1}{2}$.

4.8. Пример ДВП реального сигнала

На рис. 19 изображен сигнал ЭКГ. Сигнал ЭКГ имеет следующие характеристики:

- интервал между отсчетами равен 1/180 с.;
- время измерения равно $\square 11.3722$ с.;
- единицы измерения - мВ;
- сигнал содержит $L = 2048$ отсчетов, т.е. $J = 11$.

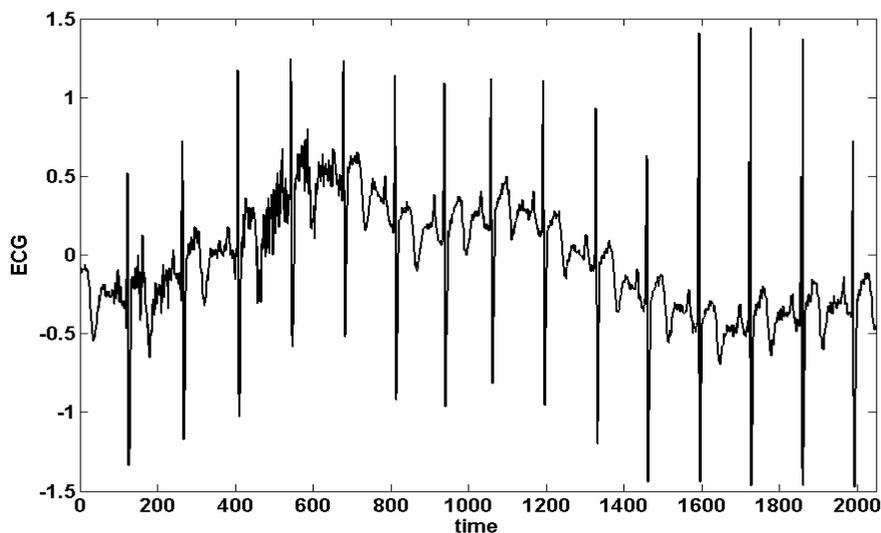


Рис. 19. Сигнал ЭКГ

На рис. 20 изображен СФ сигнала ЭКГ. Видно, что СФ имеет пики как на низких частотах (что говорит о наличии тренда), так и на высоких частотах.

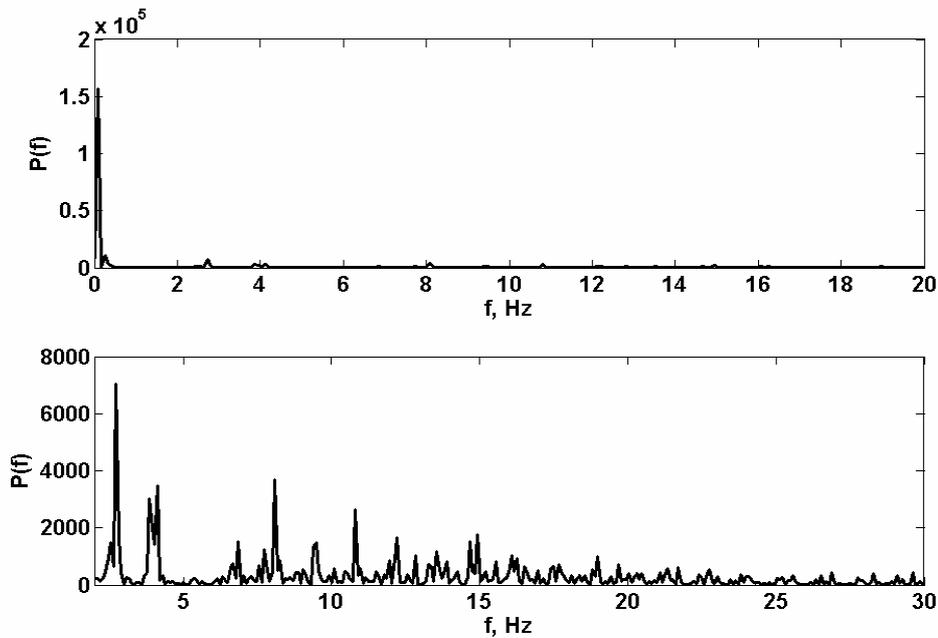


Рис. 20. СФ сигнала ЭКГ (верх), увеличенный СФ сигнала ЭКГ (низ)

Используя рекомендации раздела 4.6 и алгоритм прямого ПДВП из приложения Б, подсчитываем масштабные и вейвлет коэффициенты сигнала ЭКГ. На рис. 21 представлены графики масштабных коэффициентов $\beta_{6,n}$, $\beta_{7,n}$, $\beta_{8,n}$, а на рис. 22 – графики вейвлет коэффициентов $\alpha_{6,n}$, $\alpha_{7,n}$, $\alpha_{8,n}$ сигнала ЭКГ. Для подсчетов использовался фильтр Добеши с $N = 4$.

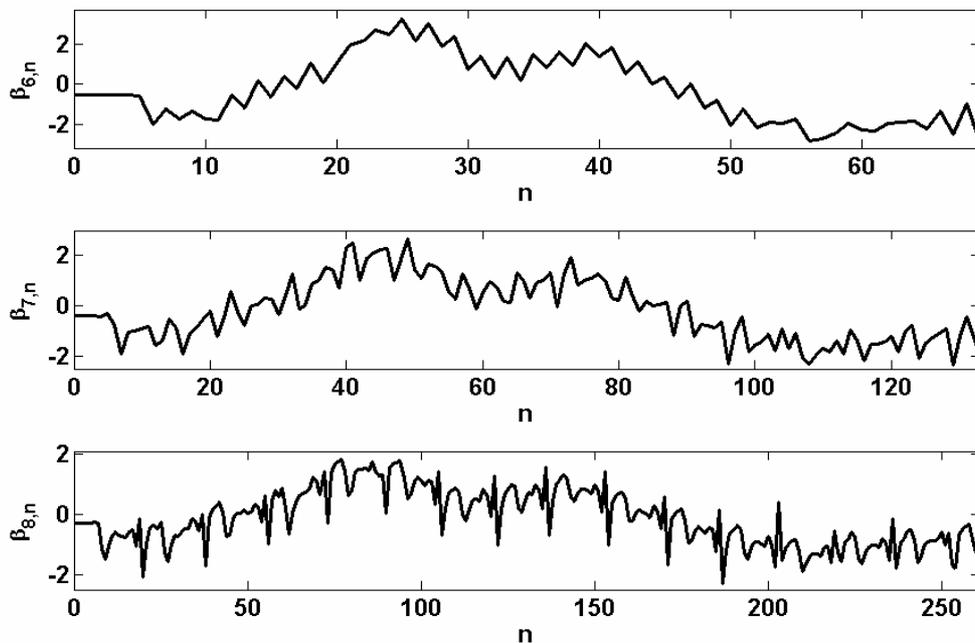


Рис. 21. Графики масштабных коэффициентов $\beta_{6,n}$, $\beta_{7,n}$, $\beta_{8,n}$ (сверху вниз)

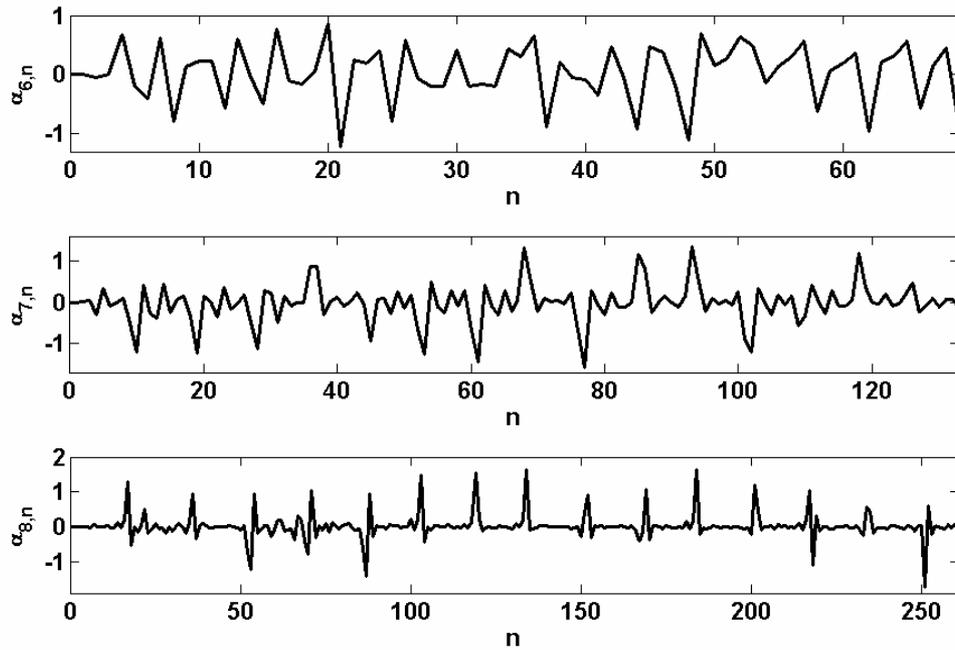


Рис. 22. График вейвлет коэффициентов $\alpha_{6,n}$, $\alpha_{7,n}$, $\alpha_{8,n}$ (сверху вниз)

Как уже упоминалось, масштабные коэффициенты $\beta_{j,n}$ несут информацию о трендовом, глобальном поведении сигнала, в то время как вейвлет коэффициенты $\alpha_{j,n}$ несут информацию о локальном отклонении сигнала от тренда. Проиллюстрируем это утверждение. Например, используя только масштабные коэффициенты $\{\beta_{7,n}\}_{n=0,1,\dots,2^7-1}$ (остальные вейвлет и масштабные коэффициенты в разложении как бы приравниваем к нулю), проводим обратное ПДВП (результат обратного ПДВП надо не забыть умножить на $L^{1/2}$). Получим сигнал A_7 (рис. 23), который является огрубленной версией сигнала ЭКГ и, по сути, представляет собой тренд. Аналогично, если для обратного ПДВП использовать только масштабные коэффициенты $\{\beta_{8,n}\}_{n=0,1,\dots,2^8-1}$, то тоже получится трендовая составляющая A_8 (рис. 23), при этом она будет более информативной, т.е. будет содержать больше мелких деталей. Если провести обратное ПДВП только с использованием вейвлет коэффициентов $\{\alpha_{7,n}\}_{n=0,1,\dots,2^7-1}$, то получится детальная составляющая D_7 (рис. 26), которую надо прибавить к тренду A_7 , чтобы получить тренд A_8 . Так и должно быть, поскольку вейвлет коэффициенты $\{\alpha_{7,n}\}_{n=0,1,\dots,2^7-1}$ содержат информацию, которая необходима, чтобы перейти с уровня разрешения $j=7$ к более информативному уровню разрешения $j=8$. На рис. 23 изображены трендовые составляющие A_7 и A_8 , на рис. 24 изображен СФ трендовой составляющей A_7 , на рис. 25 изображен СФ трендовой составляющей A_8 , на рис. 26 изображены детальные составляющие D_7 и D_8 , на рис. 27 изображены увеличенные СФ

детальных составляющих D_7 и D_8 . Сравнение СФ детальных D_7 , D_8 и трендовых A_7 , A_8 составляющих и СФ сигнала ЭКГ показывает, что разбиение СФ сигнала ЭКГ на частотные отрезки согласно формуле (142) действительно имеет место.

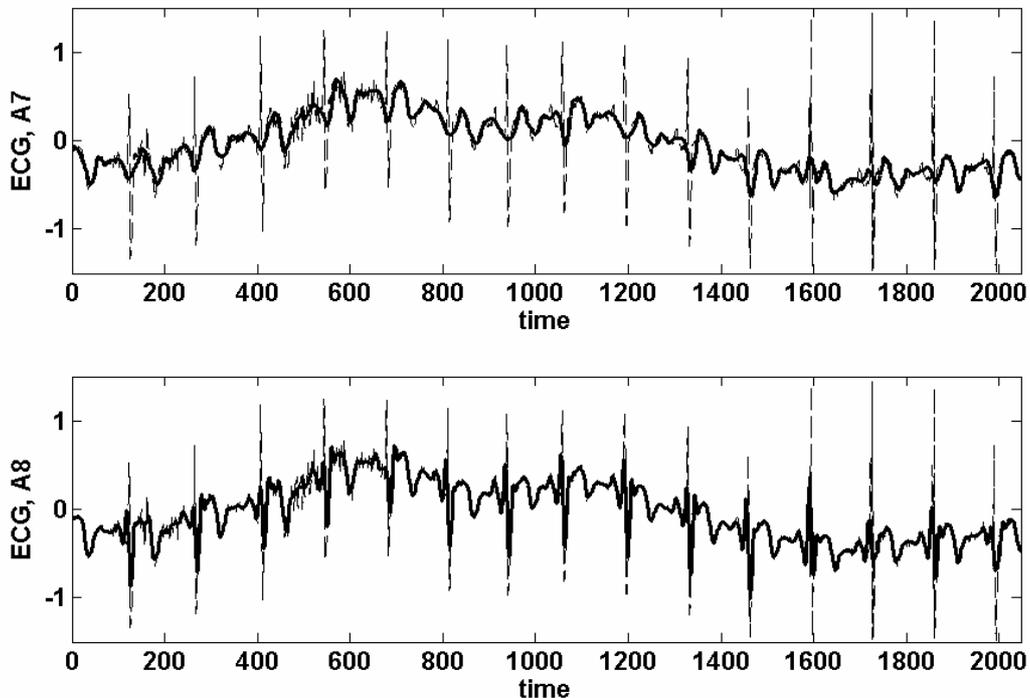


Рис. 23. Графики трендовых составляющих A_7 и A_8 с наложением сигнала ЭКГ

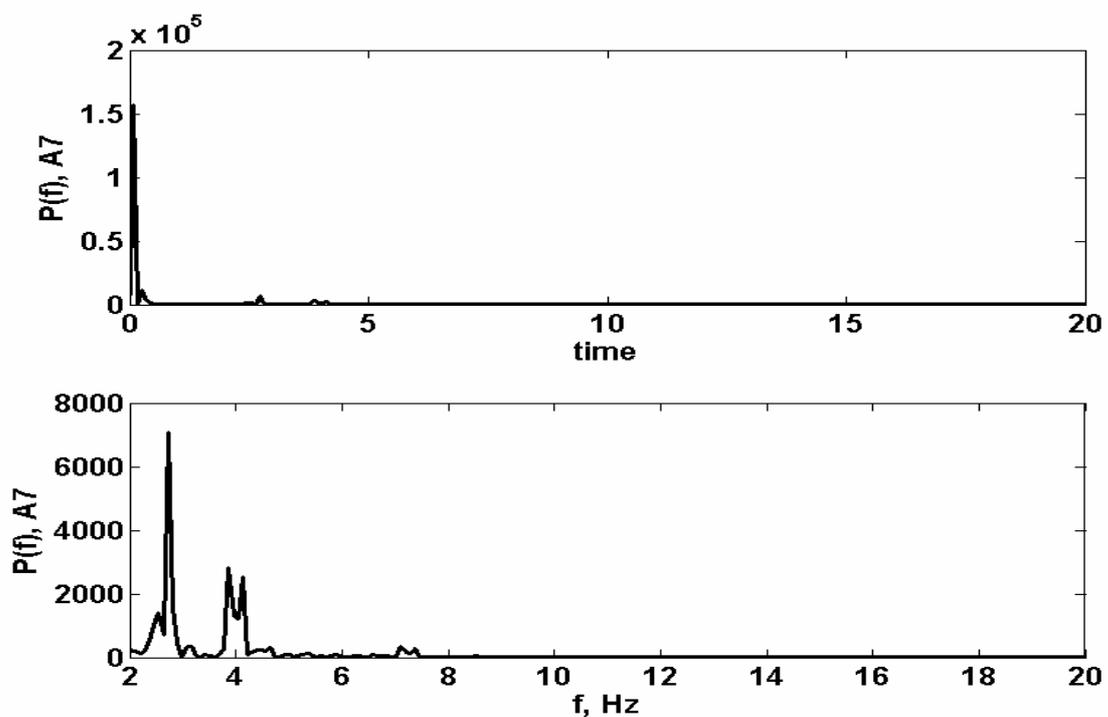


Рис. 24. СФ трендовой составляющей A_7 (верх) и его увеличение (низ)

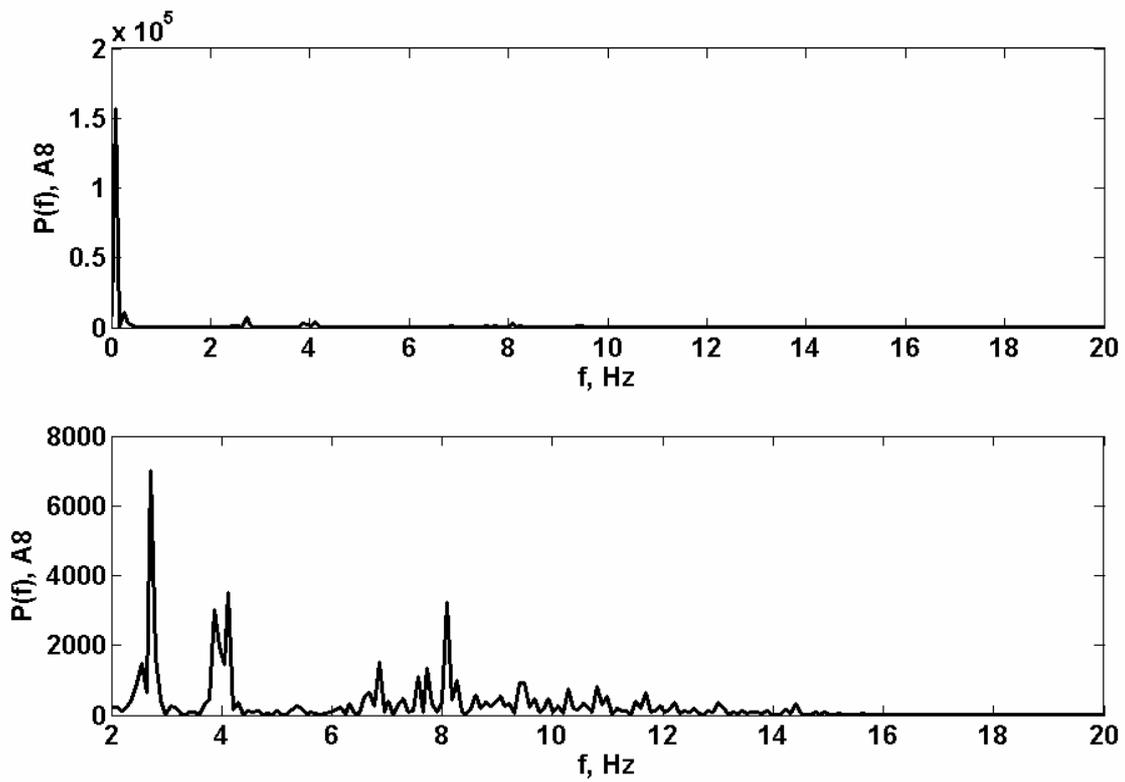


Рис. 25. СФ трендовой составляющей A_8 (верх) и его увеличение (низ)

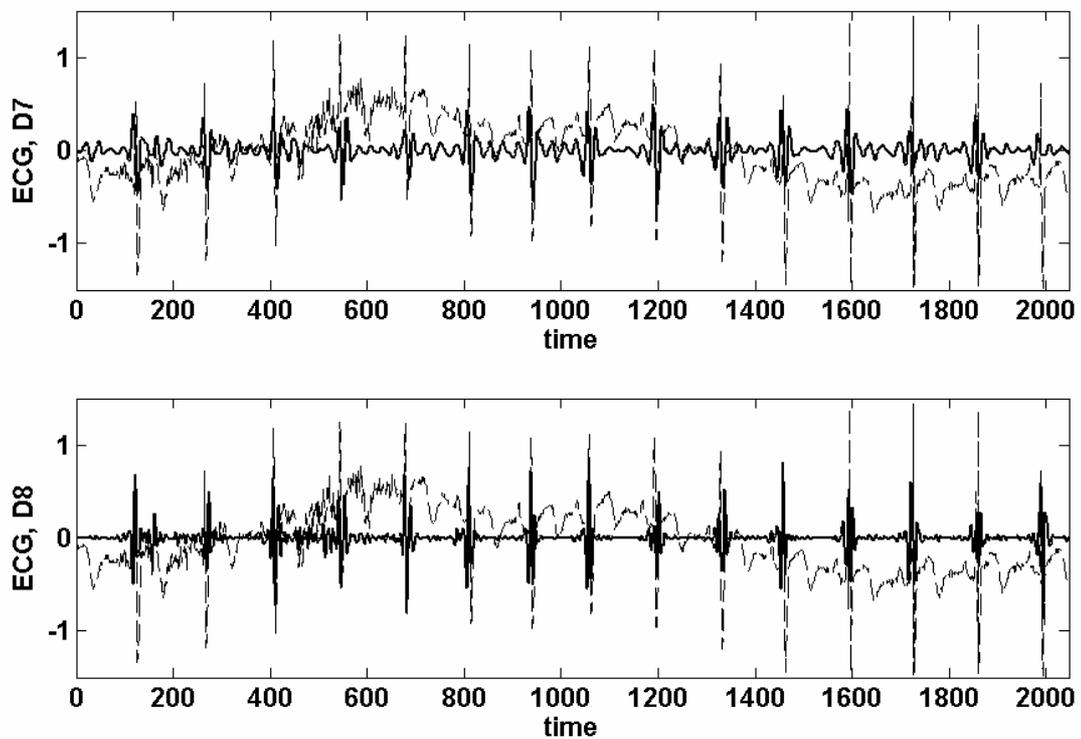


Рис. 26. Графики детальных составляющих D_7 и D_8 с наложением сигнала ЭКГ

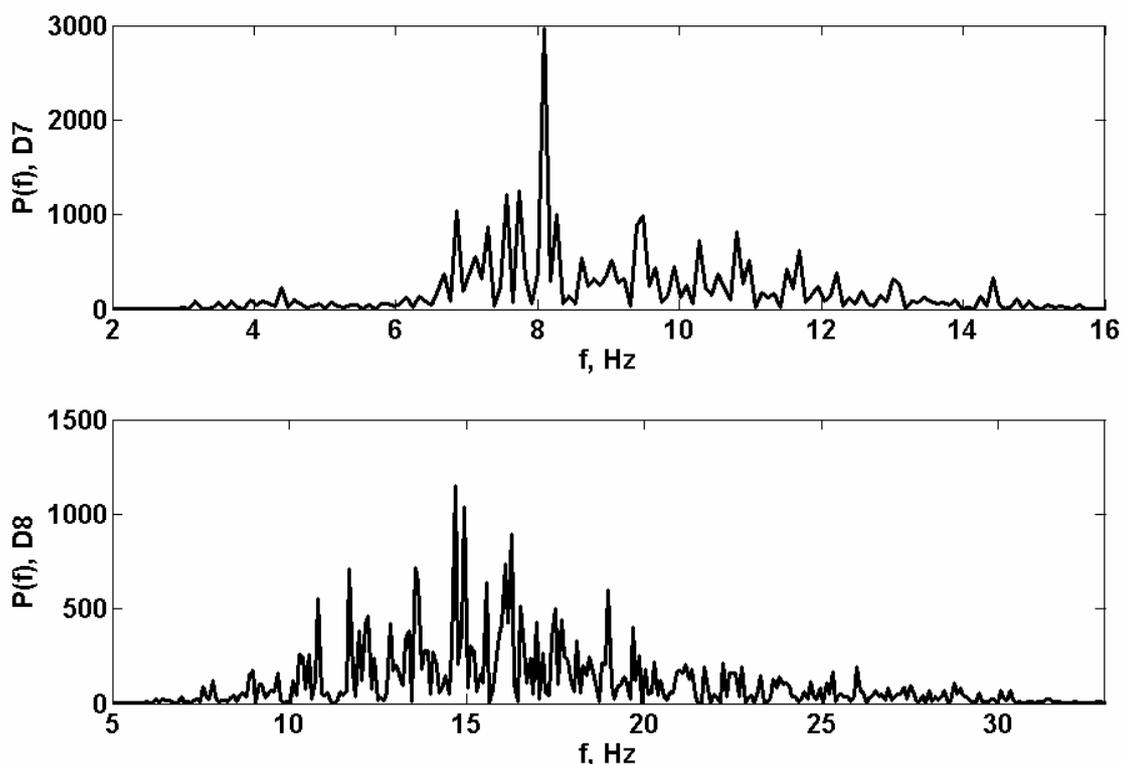


Рис. 27. СФ детальных составляющих D_7 (верх) и D_8 (низ)

4.9. Декоррелирующее свойство вейвлетов

Пусть $X(t), t \in \mathbf{R}$ - стационарный стохастический процесс, $\alpha_{j,n} = \int X(t) \cdot \psi_{j,n}(t) dt$ - вейвлет коэффициенты. Выполняется следующая [28]

Теорема 4. Пусть $\hat{\psi}(\omega) \in C^p(\mathbf{R}), p > 1$. Тогда вейвлет коэффициенты $\alpha_{j,n}$ и $\alpha_{m,l}$

- некоррелированы при $|j - m| > 1$;
- имеют произвольно малую корреляцию при $|j - m| = 1$;
- имеют корреляцию порядка $O(|n - l|^{-p})$ при $j = m$.

Более того, при ограниченных $j \geq 0$ и любых $j < 0$ с хорошей точностью можно считать, что $\alpha_{j,k} \sim N(0, \sigma_j^2)$, где $\sigma_j \approx 2^{-j} \cdot \sigma^2$ [23]. Значит, вейвлет коэффициенты вектора (132) с хорошей точностью можно моделировать вектором, компоненты которого независимые в совокупности нормально распределенные случайные величины с нулевым средним.

На рис. 28 приведены графики эмпирической корреляции сигнала ЭКГ и последовательностей вейвлет коэффициентов $\alpha_{6,n}, \alpha_{7,n}, \alpha_{8,n}$ (максимальный лаг равнялся 60). Видно, что в случае сигнала ЭКГ

корреляция значительна даже для больших значений лага, в то время как для вейвлет коэффициентов значения корреляции остаются в пределах доверительного интервала.

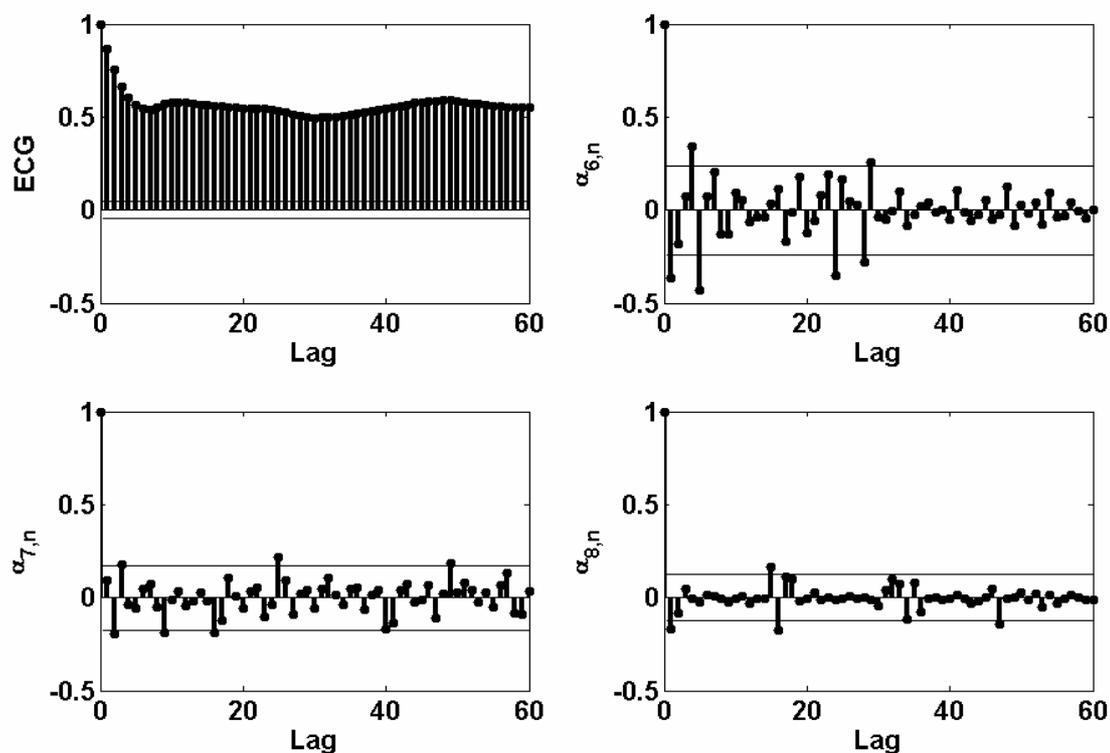


Рис. 28. Выборочная автоковариационная функция сигнала ЭКГ, вейвлет коэффициентов $\alpha_{6,n}$, $\alpha_{7,n}$, $\alpha_{8,n}$.

5. Меры близости на основе вейвлет коэффициентов

5.1. Введение

Мера близости между данными является центральным понятием большинства алгоритмов для поиска знаний в базах данных (data mining algorithms). Также мера близости необходима при идентификации макроэкономической модели для сравнения статистических и расчетных временных рядов. В данном контексте временные ряды считаются близкими, если они близки как функции времени (другими словами, между значениями временных рядов существует сильная, возможно нелинейная, связь). Для “сложных” данных, таких как, например, финансовые или макроэкономические временные ряды, обычная мера близости типа евклидова расстояния, зачастую не применима. На рис. 29 изображены обменные курсы South Africa rand и Switzerland franc по отношению к US dollar с 01.01.90 по 29.10.93, 1000 отсчётов. Ясно, что подсчитанное для этих рядов евклидово расстояние значительно, хотя, если удалить тренд и

провести подходящее масштабирование по оси ординат, окажется, что эти временные ряды имеют схожее поведение (рис. 30), при этом евклидово расстояние значительно уменьшается.

Из вышеприведенного примера ясно, что меру близости между временными рядами следует рассчитывать на основе некоторых характеристик этих временных рядов, а не на основе значений временных рядов. Причем эти характеристики должны быть робастны по отношению к наличию тренда, изменениям в уровне и масштабе ряда. Также, в случае применения мер близости в алгоритмах поиска схожих временных рядов в больших базах данных, характеристики должны рассчитываться сравнительно быстро. Предлагается определять характеристики на основе вейвлет коэффициентов [3].

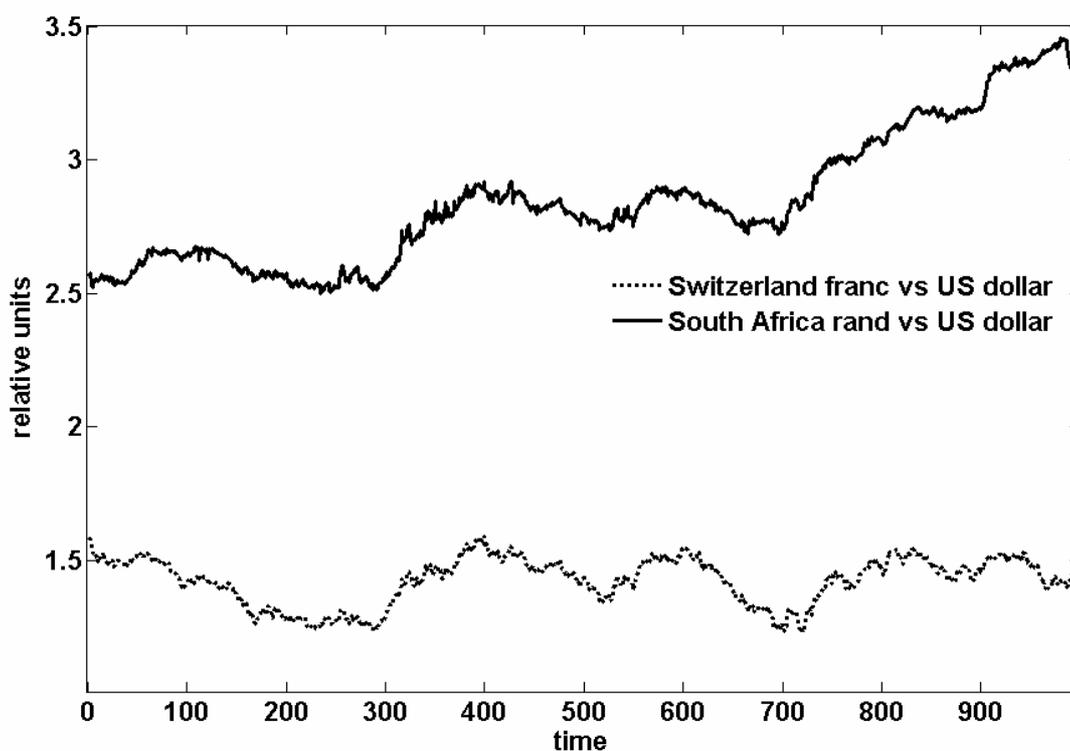


Рис. 29. Обменные курсы South Africa rand и Switzerland franc по отношению к US dollar с 01.01.90 по 29.10.93, 1000 отсчётов

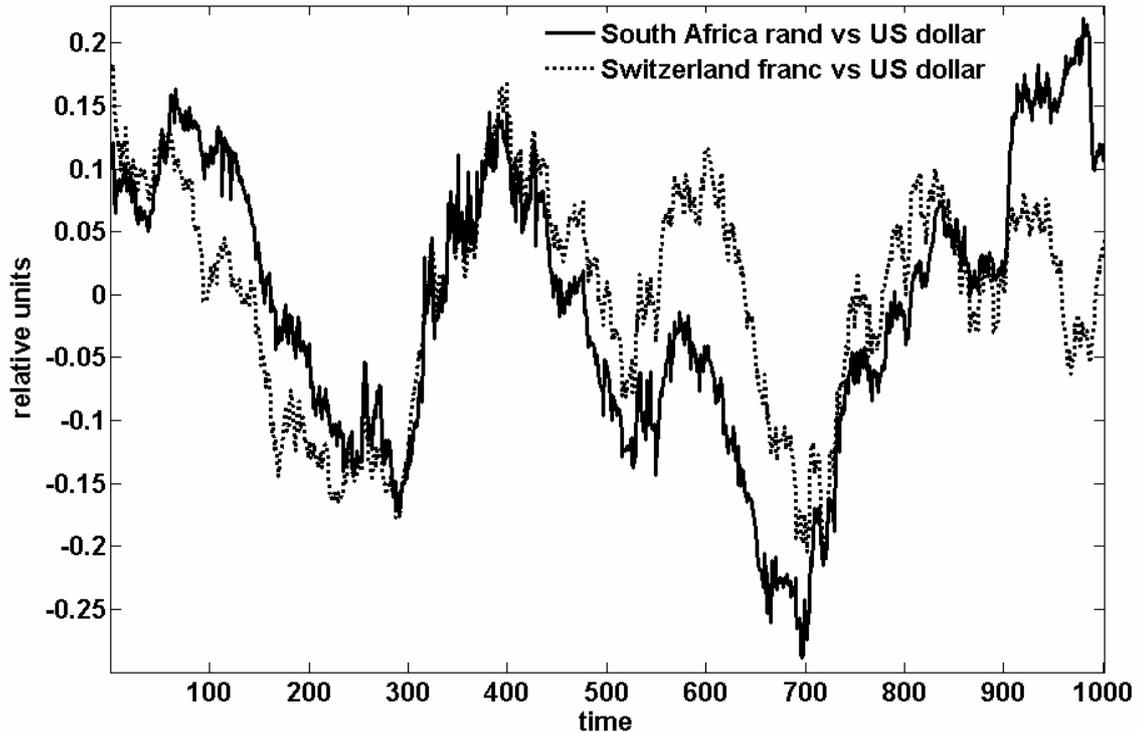


Рис. 30. Обменные курсы South Africa rand и Switzerland franc по отношению к US dollar с 01.01.90 по 29.10.93, 1000 отсчётов с вычетом тренда и подходящим масштабированием по оси ординат

5.2. Характеристики временного ряда

Характеристики временного ряда, обладающие необходимыми свойствами, подсчитаем на основе вейвлет коэффициентов временного ряда. Пусть $y = \{y_n, n = 0, 1, \dots, L-1\}$ - временной ряд длины $L = 2^J$, $J \in \mathbb{N}$. В разделе 4.6.3 указано, как можно удовлетворить требование $L = 2^J$, $J \in \mathbb{N}$. Используя вейвлеты Добеши с $N \in \mathbb{N}$ нулевыми моментами и прямое ПДВП, подсчитываем вейвлет коэффициенты $\alpha_{j,n}$, $n = 0, \dots, 2^j - 1$, $j = J-1, J-2, \dots, 0$ и масштабный коэффициент $\beta_{0,0}$. По этим коэффициентам с помощью обратного ПДВП можно однозначно восстановить временной ряд. Из раздела 4.4 следует, что если положить $\beta_{0,0}$ равным нулю, все остальные вейвлет коэффициенты оставить без изменений и сделать обратное ПДВП, то результат будет такой же, как если из ряда y вычесть полиномиальный тренд степени $N-1$. Напомним также, что для широкого класса стохастических процессов с хорошей точностью можно считать, что вейвлет коэффициенты $\alpha_{j,n}$ независимы и распределены как $N(0, 2^{-j} \cdot \sigma^2)$.

Будем использовать вейвлет и масштабные фильтры Добеши с $N = 2$, приведенные в приложение А. В этом случае вейвлет коэффициенты $\alpha_{j,n}$

не чувствительны к линейному тренду, т.е. если ряд y суть значения некоторой линейной функции, то $\forall j, n \rightarrow \alpha_{j,n} = 0$.

Как уже говорилось, применение прямого ПДВП приводит к появления “граничных” вейвлет коэффициентов. При расчетах мер близости между временными рядами эти “граничные” вейвлет коэффициенты не будут приниматься во внимание. Для фильтров Добеши с $N=2$ “граничными” коэффициентами являются коэффициенты $\alpha_{J-1,0}$ и $\alpha_{j,0}, \alpha_{j,1}$ при $j = J-2, J-3, \dots, 0$ (см. приложение В). При расчетах рекомендуется использовать именно эти фильтры, поскольку в таком случае количество “граничных” коэффициентов будет минимальным.

5.3. Алгоритм подсчета меры близости между временными рядами

- Пусть z - временной ряд длины $L=2^J$, $J \in \mathbb{N}$. Используя фильтр Добеши с $N=2$, подсчитываем вейвлет коэффициенты $\alpha_{j,n}^{(z)}$, $n=0, \dots, 2^j-1$, $j=0, 1, \dots, J-1$. Количество вейвлет коэффициентов равно $L-1$.
- Выкидываем “граничные” вейвлет коэффициенты. Пусть S - множество пар индексов (j, k) оставшихся вейвлет коэффициентов, а L_s - мощность множества S . Очевидно, что $L_s = L - 2 \cdot J$ для фильтров Добеши с $N=4$. Если временной ряд дополнялся значениями, равными среднему ряда, то выкидываем также те вейвлет коэффициенты, при подсчете которых использовались эти “новые” значения временного ряда. При этом L_s уменьшается.

- Положим $\underline{\alpha}_{j,n}^{(z)} = \frac{\alpha_{j,n}^{(z)} \cdot 2^j}{\sqrt{\sum_{(j,n) \in S} (\alpha_{j,n}^{(z)} \cdot 2^j)^2}}$ для $(j, n) \in S$. Набор коэффициентов

$\underline{\alpha}_{j,n}^{(z)}, (j, n) \in S$ представляет собой характеристики ряда, которые, как следует из упомянутых в разделах 4.9 и 5.2 свойств вейвлет коэффициентов, 1) робастны по отношению к изменению среднего ряда, тренду, масштабированию, 2) имеют нулевое среднее и постоянную дисперсию.

- Пусть $\underline{\alpha}_{j,n}^{(x)}$ и $\underline{\alpha}_{j,n}^{(y)}$ - вектора характеристик временных рядов x и y соответственно (предполагается, что ряды x и y имеют одинаковую длину, и, поэтому, множество пар индексов S у них одно и то же). Меры близости между временными рядами x и y будем подсчитывать на основе косинуса угла между векторами характеристик $\cos \alpha = \left| \sum_{(j,n) \in S} \underline{\alpha}_{j,n}^{(x)} \cdot \underline{\alpha}_{j,n}^{(y)} \right|$. Определим меры близости

$MS_1(x, y) = -\ln(\cos \alpha)$ и $MS_2(x, y) = 1 - \cos \alpha$. Такие преобразования

упрощают интерпретацию значений мер близости - “далёким” объектам соответствуют большие значения введенных мер близости и наоборот.

- Поскольку коэффициент $\underline{\alpha}_{j,n}^{(z)}$ характеризует изменение в значениях ряда z на определенном масштабе в определенный момент времени, то имеет смысл определить меры близости на основе значения $\cos \beta = \left| \sum_{(j,n) \in S} \text{sign} \left(\underline{\alpha}_{j,n}^{(x)} \right) \cdot \text{sign} \left(\underline{\alpha}_{j,n}^{(y)} \right) \right| / L_s$. Определим меры близости $MS_3(x, y) = -\ln(\cos \beta)$ и $MS_4(x, y) = 1 - \cos \beta$. Преимущество мер близости $MS_2(x, y)$ и $MS_4(x, y)$ по сравнению с мерами близости $MS_1(x, y)$ и $MS_3(x, y)$ в том, что эти меры близости ограничены. Качественной разницы между мерами близости $MS_2(x, y)$, $MS_4(x, y)$ и $MS_1(x, y)$, $MS_3(x, y)$ нет.

Введенные меры близости $MS_1(x, y)$ и $MS_2(x, y)$ характеризуют, насколько колебания временных рядов x и y по отношению к линейным трендам этих временных рядов схожи. Меры близости $MS_3(x, y)$ и $MS_4(x, y)$ характеризуют, насколько направления колебаний временных рядов x и y по отношению к линейным трендам этих временных рядов схожи. Поскольку вейвлет коэффициенты, на основе которых подсчитывались характеристики $\underline{\alpha}_{j,n}^{(z)}, (j, n) \in S$, приблизительно независимы и имеют нормальное распределение с нулевым средним, то значениям мер близости $MS_1(x, y)$ и $MS_2(x, y)$ можно поставить в соответствие некоторые уровни значимости.

Заметим, что поскольку ПДВП с фильтрами Добеши не инвариантно по отношению к обращению времени, то значения введенных мер близости изменяются при одновременном обращении времени у обоих временных рядов. Тем не менее, если для двух временных рядов меры близости принимали близкие к нулю значения, то после обращения времени они по-прежнему будут принимать близкие к нулю значения.

5.4. Тестирование мер близости

Для тестирования введенных мер близости использовались ряды обменных курсов 30 валют по отношению к US dollar с 26.02.91 по 31.12.98, 2048 отсчетов, взятые с сайта www.federalreserve.gov/releases/h10/hist/default1999.htm (Federal Reserve Statistical Release, USA). В табл. 1 приведены значения мер близости $MS_1(x, y)$ и $MS_3(x, y)$ между курсом Switzerland franc и остальными обменными курсами. Также в табл. 1 приведены результаты разбиения рядов на 10 кластеров с помощью алгоритма k-Means [24] (в столбцах указаны номера кластеров, к которым принадлежат ряды). При разбиении

на кластеры использовались два типа расстояния между рядами: $cs(x, y)$ – на основе косинуса угла между рядами и $cr(x, y)$ – на основе коэффициента корреляции между рядами. Например, для рядов x и y длины L

расстояние на основе косинуса равно $cs(x, y) = 1 - \frac{\left| \sum_{n=0}^{L-1} x_n y_n \right|}{\sqrt{\sum_{n=0}^{L-1} x_n^2} \cdot \sqrt{\sum_{n=0}^{L-1} y_n^2}}$, а на основе

коэффициента корреляции равно

$$cr(x, y) = 1 - \frac{\sum_{n=0}^{L-1} (x_n - mx_{L-1}(L)) \cdot (y_n - my_{L-1}(L))}{\sqrt{\sum_{n=0}^{L-1} (x_n - mx_{L-1}(L))^2} \cdot \sqrt{\sum_{n=0}^{L-1} (y_n - my_{L-1}(L))^2}}.$$

Из табл. 1 можно заметить, что между введенными мерами близости и разбиением на кластеры, по крайней мере, для первых 10 обменных курсов, существует разумное соответствие.

На рис. 31 и 32 изображена зависимость мер близости $MS_2(x, y)$ и $MS_4(x, y)$ между обменными курсами Switzerland franc и Australia dollar, Austria schilling, China yuan, Finland markka, France franc, Hong-Kong dollar от времени. Значения $MS_2(x, y)$ и $MS_4(x, y)$ оценивались в скользящем окне длиной 256 отсчетов, для подсчета использовался 401 отсчет с 01.01.90 по 15.07.91. Из рис. 31 для меры близости $MS_2(x, y)$ видно, что обменные курсы образуют кластеры, которые зависят от времени. По всей видимости, это основная причина, из-за которой в табл. 1 для последних 15-20 обменных курсов соответствие между значениями мер близости $MS_1(x, y)$, $MS_3(x, y)$ и номерами кластеров, полученных с помощью алгоритма k-Means, не очень хорошее. Другая причина может заключаться в том, что расстояния $cs(x, y)$ и $cr(x, y)$, использовавшиеся в алгоритме k-Means при разбиении временных рядов на кластеры, чувствительны к наличию тренда. Для более глубокого тестирования необходимо реализовать новый вариант алгоритма k-Means, где в качестве расстояния между рядами используются предложенные меры близости, и сравнить работу этого варианта алгоритма со старым вариантом, когда используются общепринятые расстояния $cs(x, y)$ и $cr(x, y)$.

Название	MS_1	cs	cr	Название	MS_3	cs	cr
Switzerland franc	0.000000	9	1	Switzerland franc	0.000000	9	1
Italy lira	0.058466	5	8	Germany mark	0.299641	9	1
Sweden krone	0.062608	5	10	Netherlands guilder	0.303604	9	1
Finland markka	0.100703	5	10	Belgium franc	0.325009	9	1
France franc	0.109240	9	1	France franc	0.333156	9	1
Netherlands guilder	0.121748	9	1	Austria schilling	0.339996	9	1

Austria schilling	0.131483	9	1	Denmark krone	0.372077	9	1
Germany mark	0.132655	9	1	Portugual escudo	0.386352	5	8
Belgium franc	0.135643	9	1	Spain peseta	0.436473	5	8
Denmark krone	0.167889	9	1	Greece drachma	0.441019	3	8
Singapore dollar	0.172496	6	7	Norway krone	0.473429	9	10
Greece drachma	0.198106	3	8	Finland markka	0.521631	5	10
Spain peseta	0.201504	5	8	Irland pound	0.539904	4	5
Norway krone	0.205329	9	10	Italy lira	0.614722	5	8
Malaysia ringgit	0.205636	7	2	Sweden krone	0.747866	5	10
Irland pound	0.239764	4	5	UK pound	0.798671	4	4
New Zealand dollar	0.259035	2	9	Japan yen	1.010746	6	7
Thailand baht	0.266811	7	2	South Africa rand	1.133407	10	3
Portugual escudo	0.312203	5	8	Singapore dollar	1.283771	6	7
South Korea won	0.353527	7	2	Thailand baht	1.425652	7	2
Canada dollar	0.421833	8	3	Malaysia ringgit	1.769059	7	2
India rupee	0.432016	3	3	New Zealand dollar	2.156070	2	9
Australia dollar	0.462496	2	9	Hong-Kong dollar	2.281796	4	6
Taiwan dollar	0.480968	8	2	Taiwan dollar	2.704150	8	2
UK pound	0.844532	4	4	Sri-Lanka rupee	2.733781	3	3
Japan yen	0.861759	6	7	Australia dollar	3.113271	2	9
Hong-Kong dollar	0.952756	4	6	India rupee	3.935251	3	3
China yuan	1.322198	1	3	South Korea won	4.328294	7	2
Sri-Lanka rupee	1.502649	3	3	Canada dollar	4.488636	8	3
South Africa rand	2.597702	10	3	China yuan	6.930983	1	3

Табл. 1. Значения мер близости $MS_1(x, y)$ и $MS_3(x, y)$ вместе с результатами кластерного анализа.

Заметим, что на основе рис. 31 рассмотренные обменные курсы валют все же можно приблизительно разделить на два кластера. Особенно это хорошо видно из рис. 32 для меры близости $MS_4(x, y)$. В первый кластер входят Australia dollar, Hong-kong dollar и China yuan (этот кластер можно условно назвать восточноазиатским), во второй кластер входят Finland markka, France franc и Austria schilling (это кластер можно условно назвать европейским). Полученные наблюдения согласуются с общепринятым разбиением рынка валютных операций на три географические зоны активности [17].

Предложенные меры близости также позволяют изучить, насколько временные ряды близки на каком-то определенном масштабе. Для этого можно вычислить меры близости, используя значения $\alpha_{j,n}^{(z)}$ только для какого-то определённого уровня разрешения j . Согласно свойствам вейвлет коэффициентов это будет равносильно сравнению спектров соответствующих временных рядов в определенной полосе частот. На рис.

33 и 34 показано, как зависят меры близости $MS_2(x, y)$ и $MS_4(x, y)$ между обменными курсами Switzerland franc и Australia dollar, Austria schilling, China yuan, Finland markka, France franc, Hong-Kong dollar от уровня разрешения j . Для подсчета использовались 2048 отсчетов ($J=11$) с 26.02.91 по 31.12.98. Из рис. 33 и 34 видно, что для некоторых обменных курсов меры близости принимает относительно малые значения для небольших j (на длинных временных масштабах размера $\sim 2^{J-j}$), для других обменных курсов относительно малые значения для больших j (на коротких временных масштабах размера $\sim 2^{J-j}$). Рассмотренные обменные курсы опять можно разделить на два кластера. В первый входят Australia dollar, Hong-kong dollar и China yuan, а во второй – Finland markka, France franc и Austria schilling. Также можно, применяя скользящее окно (как это делалось выше), изучить, как изменяется мера близости между временными рядами на определенном уровне разрешения j (в определенной полосе частот) в зависимости от времени.

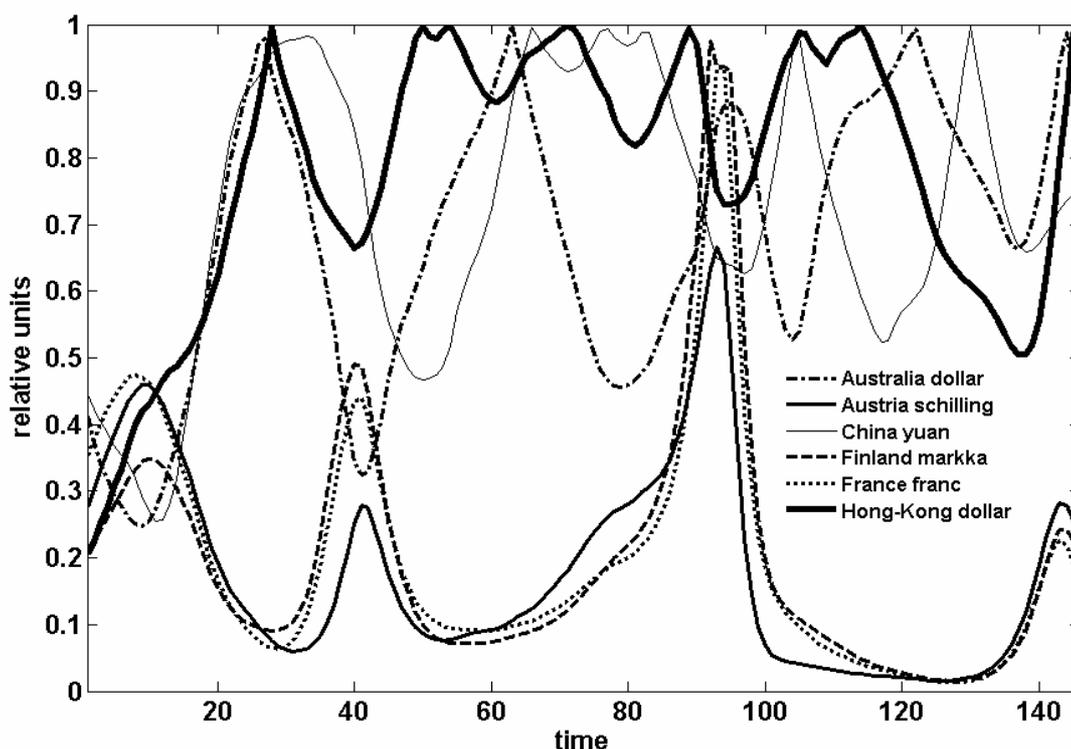


Рис. 31. Зависимость меры близости $MS_2(x, y)$ от времени.

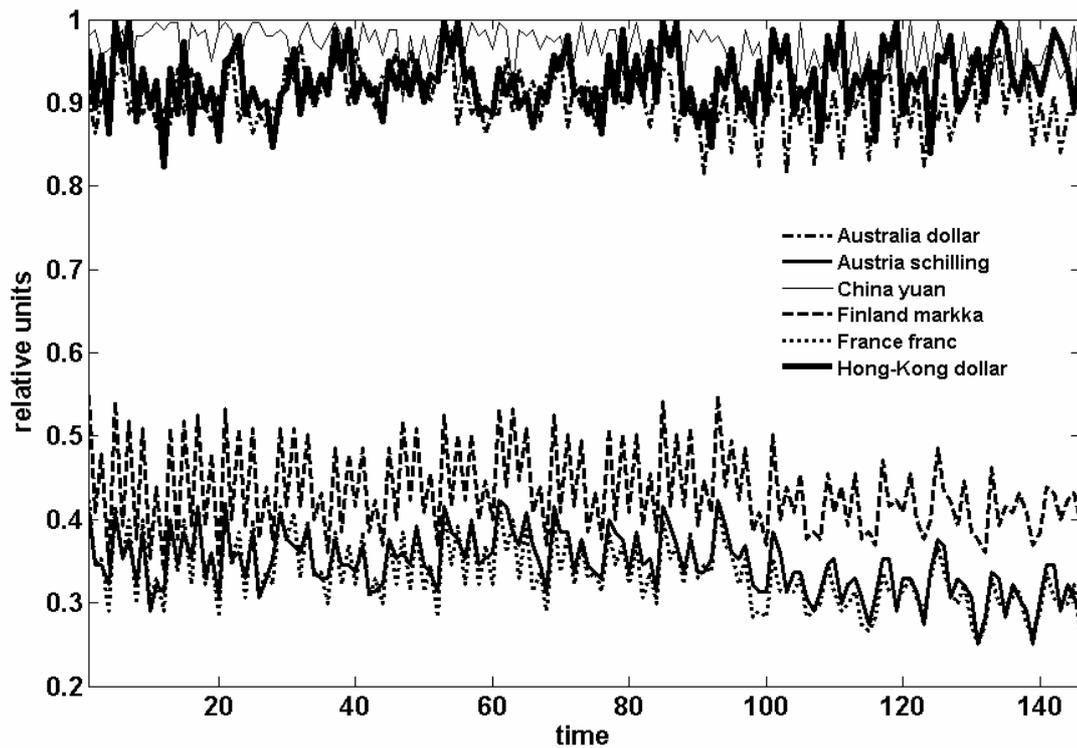


Рис. 32. Зависимость меры близости $MS_4(x, y)$ от времени.

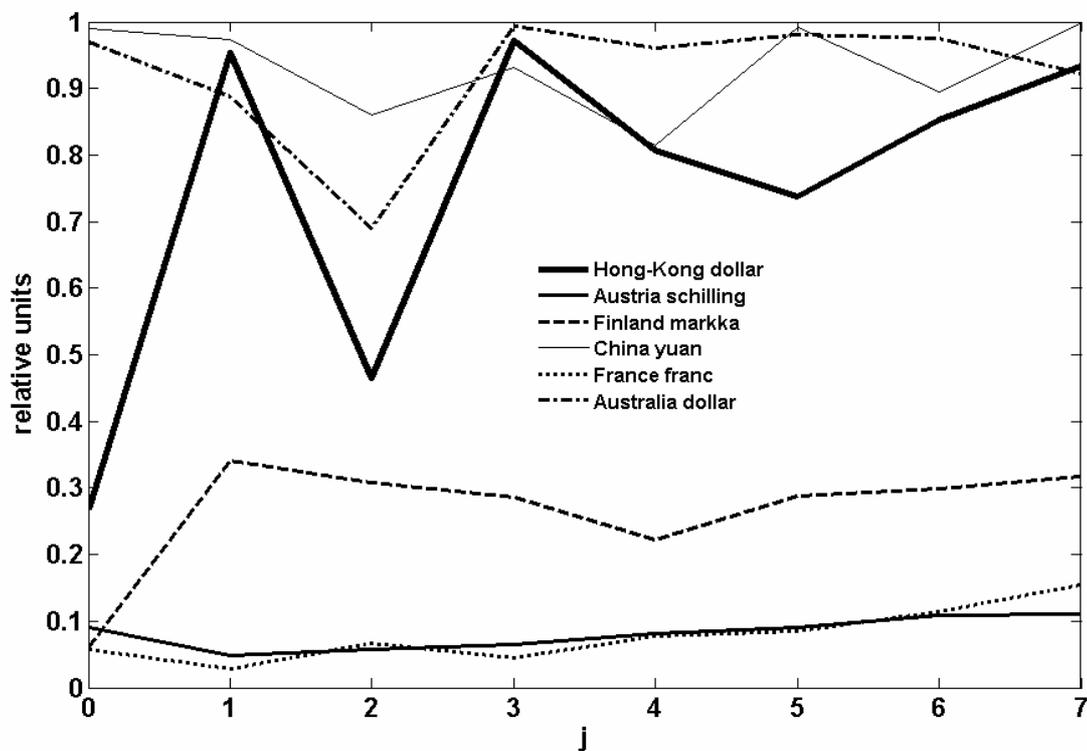


Рис. 33. Зависимость меры близости $MS_2(x, y)$ от уровня разрешения j .

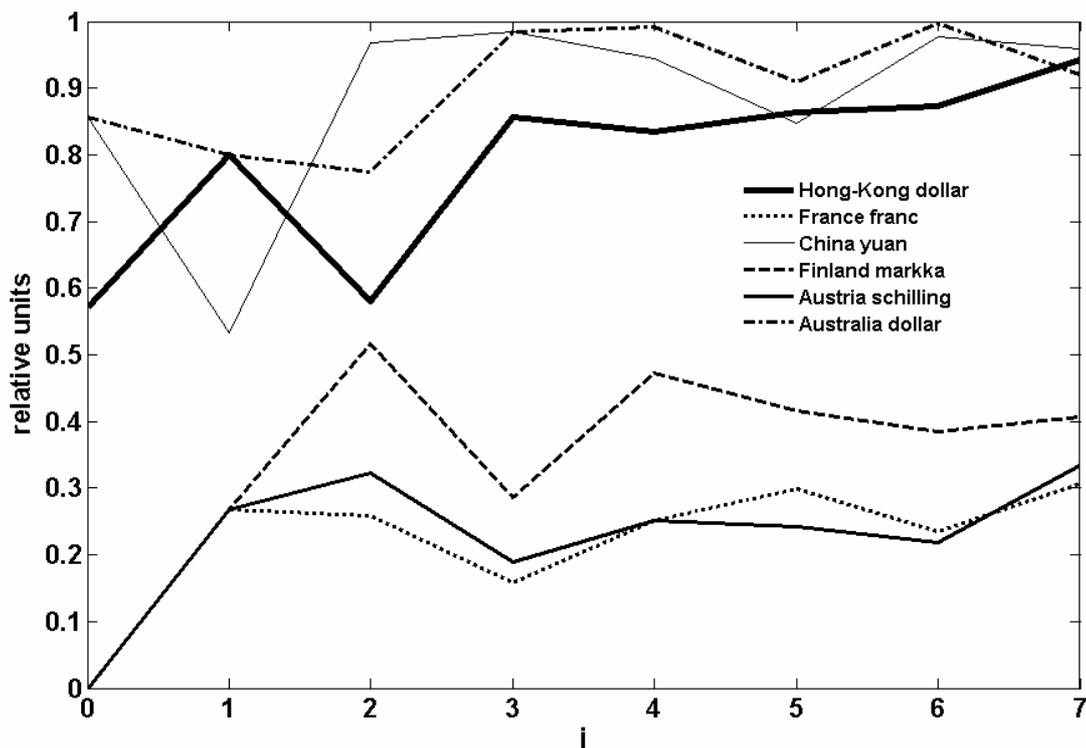


Рис. 34. Зависимость меры близости $MS_4(x, y)$ от уровня разрешения j .

6. Выделение циклических составляющих с помощью ДВП

6.1. Введение

При анализе временных рядов крайне важной задачей для анализа и прогнозирования является задача разложения временного ряда на составляющие: тренд, циклические составляющие, шум. Такое разложение на составляющие не единственно и зависит от метода, используемого при разложении. В качестве тренда обычно используют полином некоторой степени, неизвестные коэффициенты которого находят методом наименьших квадратов. Чтобы выделить из временного ряда циклические составляющие, оценивают спектр этого временного ряда после вычета тренда из временного ряда. Обычно для оценки спектра применяют ПФ. Однако такой подход зачастую не дает надежных результатов, поскольку:

- Понятие спектра временного ряда предполагает стационарность временного ряда. На практике большинство временных рядов остаются нестационарными даже после вычитания тренда (например, дисперсия может зависеть от времени). Понятно, что “частотное наполнение” таких временных рядов будет зависеть от времени.

- Для оценки спектра требуется оценка значений корреляционной функции временного ряда для всевозможных значений лага. На практике такая оценка невозможна.

Таким образом, необходим подход, у которого бы не было вышеназванных недостатков. Предлагается использовать ПДВП для выделения тренда и циклических составляющих временного ряда.

6.2. Дискретный вейвлет спектр

Пусть $y = \{y_n, n = 0, 1, \dots, L-1\}$ - временной ряд с расстоянием между отсчетами, равным t_s , т.е. частота дискретизации составляет $f_s = 1/t_s$. Будем считать, что $L = 2^J$, $J \in \mathbb{N}$. Это требование накладываем по причине того, что необходимо подсчитывать ПДВП ряда y .

Итак, обозначим $w = [\beta_{0,0} \alpha_{0,0} \alpha_{1,0} \alpha_{1,1} \alpha_{2,0} \dots \alpha_{2,3} \dots \alpha_{J-1,0} \dots \alpha_{J-1,2^{J-1}-1}]$ - вектор коэффициентов, подсчитанных с помощью прямого ПДВП по ряду y . Для удобства будем это обозначать записью $w = W(y)$, а обратное ПДВП будем обозначать записью $y = W^{-1}(w)$. Пусть $P_j = \sum_{n=0}^{2^j-1} \alpha_{j,n}^2$ - энергия ряда на уровне разрешения j . Определим дискретный вейвлет спектр (ДВС) как вектор размерности $J+1$, равный

$$P = (\beta_{0,0}^2, P_0, P_1, \dots, P_{J-1}). \quad (143)$$

Поскольку уровень разрешения j согласно формуле (142) соответствует отрезку частот $\left[\frac{\pi \cdot f_s}{2^{J-j}}, \frac{\pi \cdot f_s}{2^{J-j-1}} \right]$, то j -я компонента ДВС, как следует из равенства Парсеваля (135), показывает, сколько энергии временного ряда содержится в указанном отрезке частот.

Заметим, что определение спектра детерминированного сигнала отличается от определения спектра временного ряда. При этом в приложениях, спектры и детерминированного и стохастического сигналов подсчитываются, по сути, по одним и тем же формулам [27]. В этом смысле, вышеприведенное определение ДВС не совсем корректно, поскольку не учитывает стохастичность временного ряда. Тем не менее, такого “инженерного” определения достаточно для приложений.

Укажем на основное отличие ДВС от обычного дискретного спектра на основе ПФ. Выборочная дисперсия временного ряда равна

$$\sigma^2 = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} y_n^2 - \left(\frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} y_n \right)^2 = \frac{1}{L^2} \cdot \sum_{k=1}^{L-1} |\hat{y}_k|^2, \quad (144)$$

где $\hat{y}_k = \sum_{n=0}^{L-1} y_n \cdot \exp\left(-\frac{i \cdot 2\pi \cdot k \cdot n}{L}\right)$, $k = 1, 2, \dots, L-1$. Коэффициенты $|\hat{y}_k|^2$ как раз и составляют оценку спектра временного ряда. Данное равенство

показывает, какой вклад вносит каждая из гармоник на частоте $\frac{k}{L} \cdot f_s$ [Гц] в изменчивость временного ряда, мерой которой является выборочная дисперсия. В силу равенства Парсеваля (135), аналогичное равенство можно записать и для ДВС

$$\sigma^2 = \sum_{j=0}^{J-1} P_j. \quad (145)$$

В случае ДВС каждое слагаемое P_j в формуле (145) отвечает за вклад в изменчивость ряда, который вносят гармоники с частотами из отрезка $\left[\frac{\pi \cdot f_s}{2^{J-j}}, \frac{\pi \cdot f_s}{2^{J-j-1}} \right]$. Поскольку в реальных рядах редко когда присутствуют “чистые” гармоники, такая неточность (выражающаяся в отрезке частот, а не в какой-то конкретной частоте, как в обычном спектре) гораздо предпочтительнее.

6.3. Модельные примеры

Продemonстрируем преимущества ДВС по сравнению с обычным спектром на модельных примерах. Рассмотрим сигнал

$$g_1(t) = 2 \cdot \sin(t) - C_1, t \in [0; 8\pi], \quad (146)$$

где константа C_1 выбрана так, чтобы $\int_0^{8\pi} g_1(t) dt = 0$. Определим дискретный сигнал x

$$x_n = g_1\left(\frac{8\pi \cdot n}{4096}\right), n = 1, 2, \dots, 2^{12}. \quad (147)$$

Положим

$$g_2(t) = \left| \arcsin\left(\sin\left(\frac{16 \cdot t}{\pi}\right)\right) \right| - C_2, t \in [0; 8\pi], \quad (148)$$

где константа C_2 выбрана так, чтобы $\int_0^{8\pi} g_2(t) dt = 0$. Определим дискретный сигнал z

$$z_n = g_2\left(\frac{8\pi \cdot n}{4096}\right), n = 1, 2, \dots, 2^{12}. \quad (149)$$

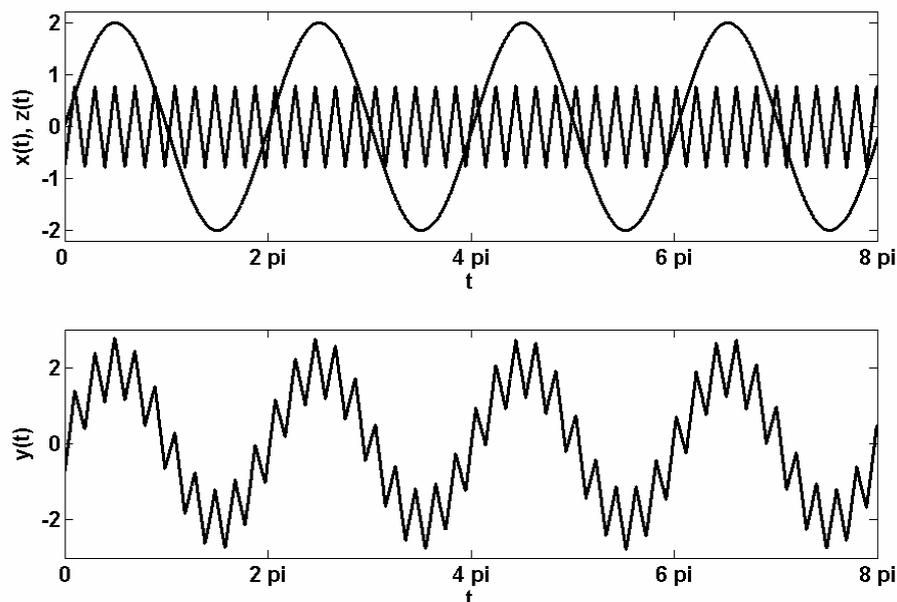


Рис. 35. Синусоида x , пилообразный сигнал z (верх) и их сумма y (низ)

Сигнал $g_1(t)$ представляет собой синусоиду, в то время как сигнал $g_2(t)$ имеет пилообразную форму. В качестве исследуемого сигнала y возьмем дискретный сигнал $y_n = z_n + x_n, n = 1, 2, \dots, 2^{12}$. Сигнал y и его компоненты изображены на рис. 35.

Поскольку сигнал y является дискретизацией непрерывного сигнала, то для анализа y надо использовать такие вейвлет и масштабные фильтры, которым соответствуют гладкие вейвлет и масштабные функции. Применялись фильтры Добеши с $N = 10$ нулевыми моментами. Длина этих фильтров равняется $M = 20$, а соответствующие вейвлет и масштабная функции два раза непрерывно дифференцируемы.

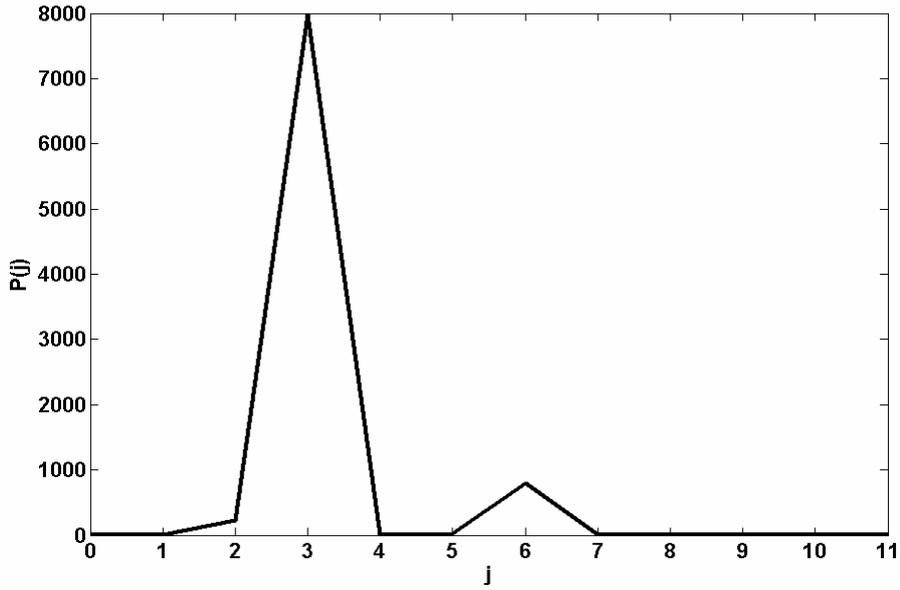


Рис. 36. ДВС модельного сигнала y (первая компонента $\beta_{0,0}^2$ вектора ДВС не изображена)

На рис. 36 изображен ДВС модельного сигнала x . ДВС имеет пик при $j=3$, что свидетельствует о наличии низкочастотных колебаний и пик при $j=6$, что свидетельствует о наличии высокочастотных колебаний. Таким образом, ДВС обнаруживает две циклические составляющие, которые необходимо разделить. Для этого определим два вектора вейвлет коэффициентов $w^{(1)}$ и $w^{(2)}$ по следующим формулам

$$\alpha_{j,k}^{(1)} = \begin{cases} \alpha_{j,k}, j = 0, 1, \dots, 4, \\ 0, j = 5, 7, \dots, 11; \end{cases} \quad \alpha_{j,k}^{(2)} = \begin{cases} 0, j = 0, 1, \dots, 4, \\ \alpha_{j,k}, j = 5, 7, \dots, 11; \end{cases} \quad (150)$$

$$\beta_{0,0}^{(1)} = \beta_{0,0}, \beta_{0,0}^{(2)} = 0, \quad (151)$$

где $\beta_{0,0}, \{\alpha_{j,n}\}_{n=0,1,\dots,2^j-1}, j=0,1,\dots,11$ - масштабный коэффициент и вейвлет коэффициенты, подсчитанные с помощью прямого ПДВП по сигналу y . Используя два новых вектора коэффициентов, подсчитываем обратное ПДВП и получаем два сигнала $x' = W^{-1}(w^{(1)})$ и $z' = W^{-1}(w^{(2)})$, которые изображены на рис. 37. Таким образом, ДВС позволил с очень хорошей точностью разделить сигнал на составляющие. Попробуем сделать то же самое, используя СФ. Пусть $\hat{y}_k, k=0,1,\dots,2^{12}-1$ - это ПФ сигнала y . На рис. 38 изображена часть СФ $P(f_k) = |\hat{y}_k|^2$ сигнала y на частотах $f_k = k/8\pi, k=0,1,\dots,51$. Присутствуют два пика примерно на частотах 0.16 [Гц] и 1.63 [Гц], свидетельствующие о наличии двух гармоник в сигнале (напоминаем, что спектр Фурье симметричен, поэтому аналогичные пики будут наблюдаться и при частотах f_k , близких к 161.48 [Гц] и 162.89 [Гц]). К примеру, обнулیم значения \hat{y}_k с частотами f_k , близкими к абсциссам

второго пика. Получим ПФ сигнала y , из которого “удалили” высокочастотную гармонику. Подсчитаем обратное ПФ. Полученный сигнал будет комплексным из-за неточного “удаления” высокочастотной гармоники (“локальная” модификация коэффициентов \hat{y}_k внесла “глобальные” изменения в поведение сигнала на всей области определения). Действительная часть этого сигнала изображена на рис. 38. В принципе, получилось выделить низкочастотную гармонику x , но точность значительно хуже, чем при использовании ДВС.

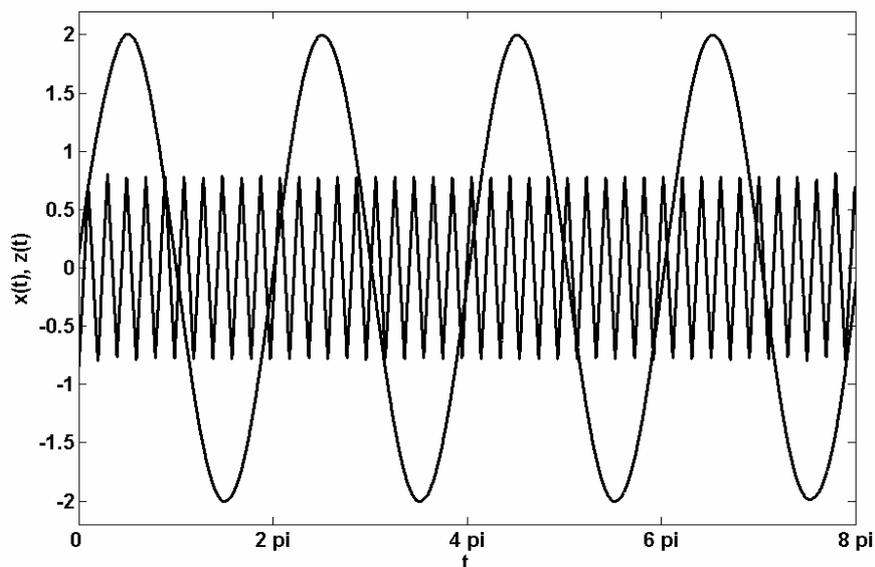


Рис. 37. Компоненты модельного сигнала y , восстановленные по ДВС

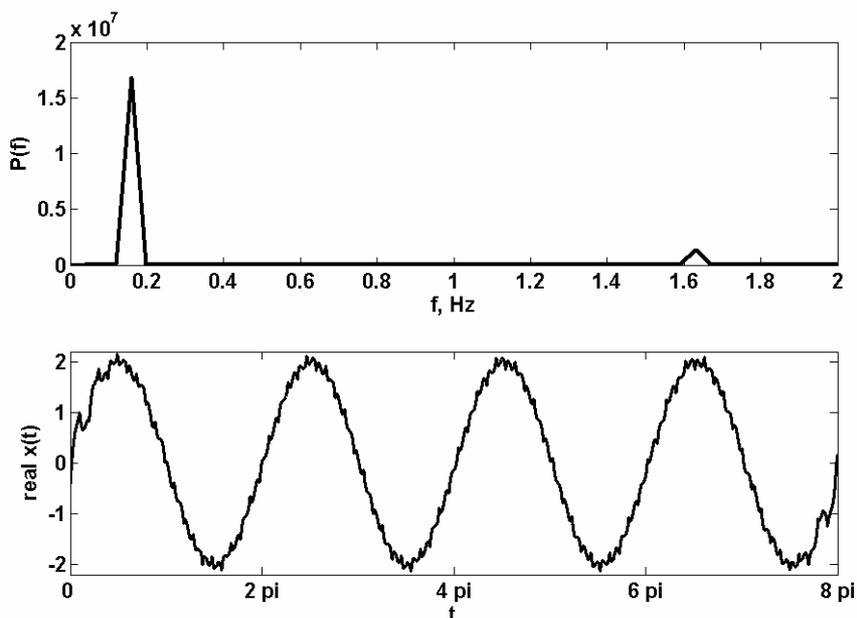


Рис. 38. СФ сигнала y и восстановленная по спектру компонента x

Еще одно преимущество предлагаемого подхода для разделения временного ряда на составляющие в следующем. Допустим, что во временном ряду присутствовали гармоники с частотами 0.31 [Гц] и 3.26 [Гц], причем сначала была “включена” только первая гармоника, а потом была “включена” только вторая гармоника. Допустим также, что две эти гармоники составляют какой-нибудь БЦ. СФ выделит обе эти гармоники, но ничего не скажет о том, какая из них в какие моменты времени присутствовала. Тогда, оценивая значения БЦ, исследователь будет просто складывать обе гармоники с частотами 0.31 [Гц] и 3.26 [Гц], т.е. получит неверную оценку значений БЦ за рассматриваемый период времени. Если же использовать ДВС для выделения этих гармоник, то информация о том, когда какая из гармоник была “включена”, будет автоматически учтена и это позволит правильно оценить БЦ.

Действительно, рассмотрим дискретный сигнал $y_n = \begin{cases} x_n, n = 1, 2, \dots, 2^{12}; \\ z_{n-4095}, n = 2^{12} + 1, 2^{12} + 2, \dots, 2^{13} \end{cases}$, изображенный на рис. 39 вместе со своим

СФ. На рис. 40 изображен ДВС, который подсчитывался с использованием фильтров Добеши с $N=10$ нулевыми моментами. ДВС имеет пики при $j=4$ и $j=7$. Так же, как это делалось выше, проводим разделение вектора вейвлет и масштабных коэффициентов на два вектора, из которых с помощью обратного ПДВП получаем две составляющие сигнала (рис. 41). За исключением небольших искажений на концах, составляющие выделены с хорошей точностью.

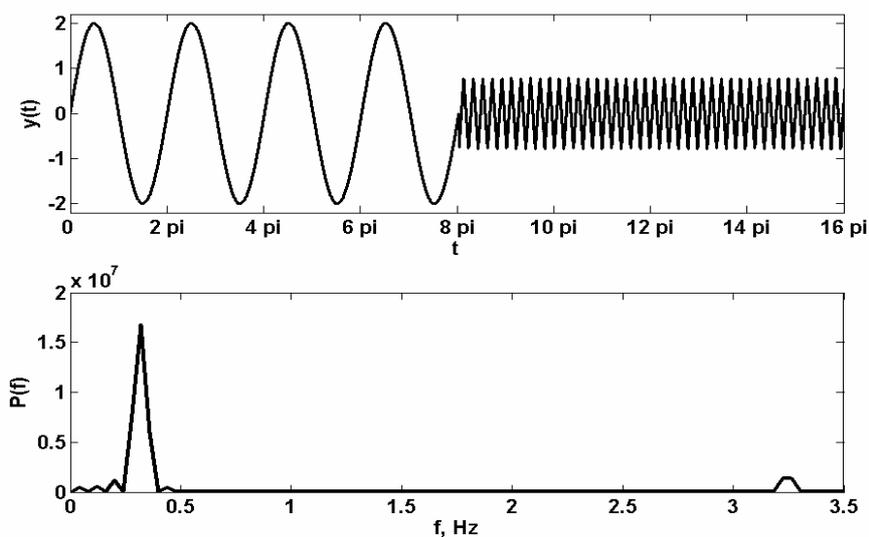


Рис. 39. Сигнал y (верх) и его СФ (низ)

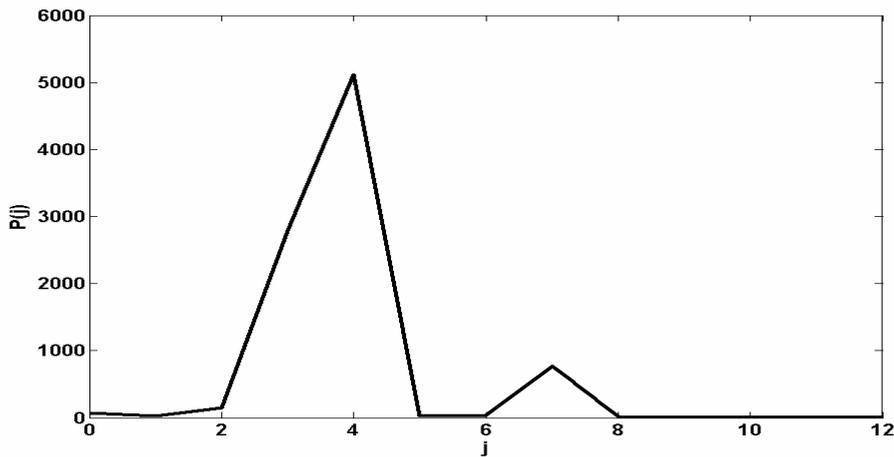


Рис. 40. ДВС модельного сигнала y (первая компонента $\beta_{0,0}^2$ вектора ДВС не изображена)

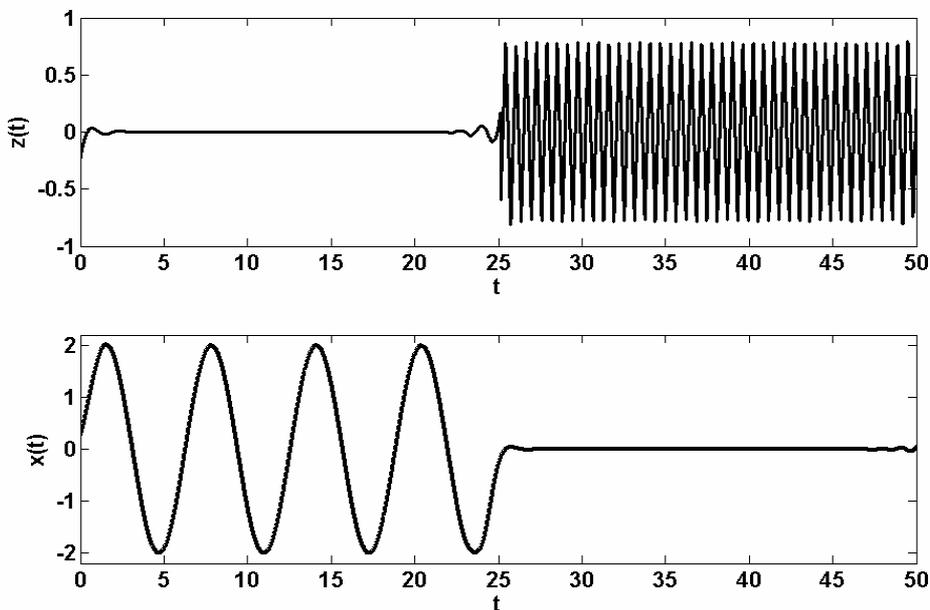


Рис. 41. Компоненты модельного сигнала y , восстановленные по ДВС

6.4. Особенности алгоритма выделения составляющих

Итак, необходимо разделить временной ряд y длины $L = 2^J$, $J \in \mathbb{N}$ на составляющие. Для этого, на основе масштабного и вейвлет коэффициентов $w = W(y)$ подсчитывается ДВС. Пусть, например, ДВС имеет два пика на уровнях разрешения j_1 и $j_2 > j_1 + 2$. Пример такого ДВС изображен на рис. 42. Разделим вектор коэффициентов w на два вектора коэффициентов $w^{(1)}$ и $w^{(2)}$ одинаковой с вектором w длины по формулам

$$\alpha_{j,k}^{(1)} = \begin{cases} \alpha_{j,k}, j = 0, 1, \dots, j_1 + 1, \\ 0, j = j_1 + 2, j_1 + 3, \dots, J - 1; \end{cases} \quad \alpha_{j,k}^{(2)} = \begin{cases} 0, j = 0, 1, \dots, j_2 - 2, \\ \alpha_{j,k}, j = j_2 - 1, j_2, \dots, J - 1; \end{cases} \quad (152)$$

$$\beta_{0,0}^{(1)} = \beta_{0,0}, \beta_{0,0}^{(2)} = 0. \quad (153)$$

После чего подсчитываем обратное ПДВП векторов $w^{(1)}$ и $w^{(2)}$, т.е. выделяем две искомые составляющие $y^{(1)} = W^{-1}(w^{(1)})$ и $y^{(2)} = W^{-1}(w^{(2)})$. Трудности возникают, если, например, $j_2 = j_1 + 2$, т.е. когда между пиками ДВС нет промежутка. Пример такого ДВС изображен на рис. 43. Необходимо решить, какому именно из векторов, $w^{(1)}$ или $w^{(2)}$, приписывать коэффициенты, у которых значение уровня разрешения равно $j = j_1 + 1$. Предлагается использовать следующий подход.

Пусть \tilde{j} такой уровень разрешения, что энергия $P_{\tilde{j}}$ этого уровня разрешения заключена между двумя пиками ДВС (ситуация, аналогичная рис. 43). Вейвлет коэффициенты уровня разрешения \tilde{j} припишем векторам $w^{(1)}$ и $w^{(2)}$ по следующему правилу

$$\alpha_{\tilde{j},n}^{(1)} = \frac{a_n}{a_n + b_n} \cdot \alpha_{\tilde{j},n}, \quad \alpha_{\tilde{j},n}^{(2)} = \frac{b_n}{a_n + b_n} \cdot \alpha_{\tilde{j},n}, \quad (154)$$

где коэффициенты a_n и b_n , $n = 0, 1, \dots, 2^{\tilde{j}} - 1$ вычисляются по формулам

$$a_n = \alpha_{\tilde{j}-1, [n/2]}^2, \quad b_n = \frac{\alpha_{\tilde{j}+1, 2n}^2 + \alpha_{\tilde{j}+1, 2n+1}^2}{2}, \quad (155)$$

$[x]$ - обозначает целую часть числа x . Причина, по которой были выбраны именно такие веса, заключается в следующем: каждый из коэффициентов $\alpha_{\tilde{j},n}$ порождается коэффициентом $\alpha_{\tilde{j}-1, [n/2]}$ и порождает коэффициенты $\alpha_{\tilde{j}+1, 2n}$ и $\alpha_{\tilde{j}+1, 2n+1}$. При таком подходе $\alpha_{\tilde{j},n}^{(1)} + \alpha_{\tilde{j},n}^{(2)} = \alpha_{\tilde{j},n}$, т.е. вектора $w^{(1)}$ и $w^{(2)}$ остаются аддитивными: $w^{(1)} + w^{(2)} = w$. Это очень важно, так как тогда выделяемые компоненты тоже будут аддитивными: $y^{(1)} + y^{(2)} = W^{-1}(w^{(1)}) + W^{-1}(w^{(2)}) = y$.

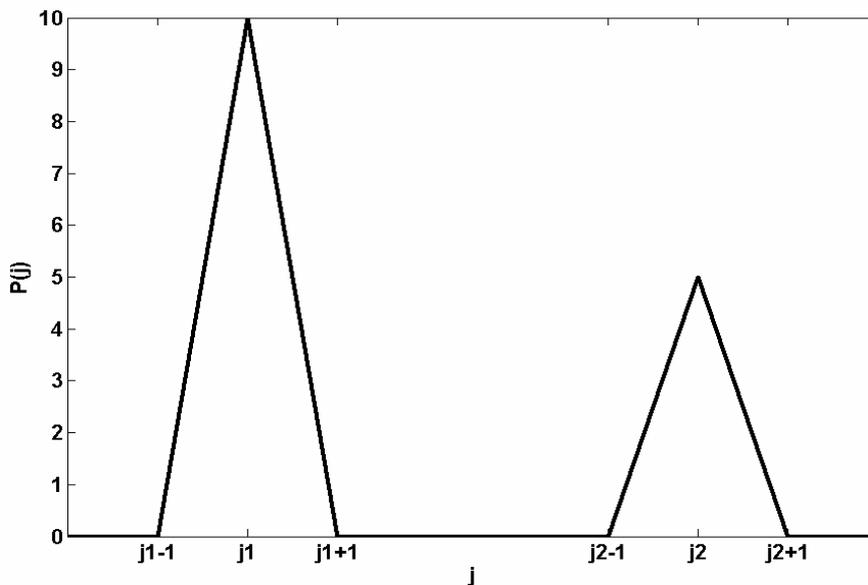


Рис. 42. Пример ДВС

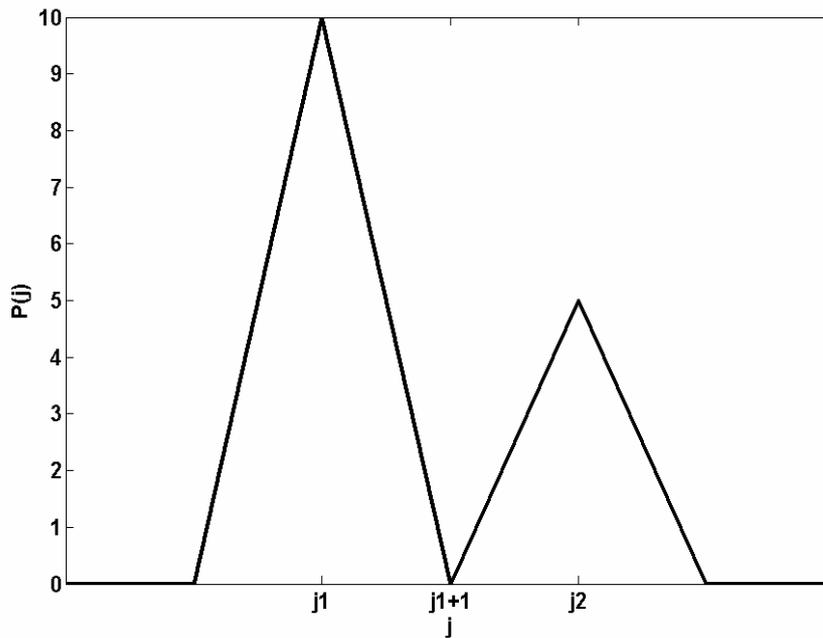


Рис. 43. Пример “проблемного” ДВС

6.5. Декомпозиция экономического временного ряда

Проведем декомпозицию временного ряда y количества проданных легковых автомобилей (шт.) в месяц в Испании, данные с 1974, Jan по 1995, Apr (256 отсчетов). Этот временной ряд изображен на рис. 44.

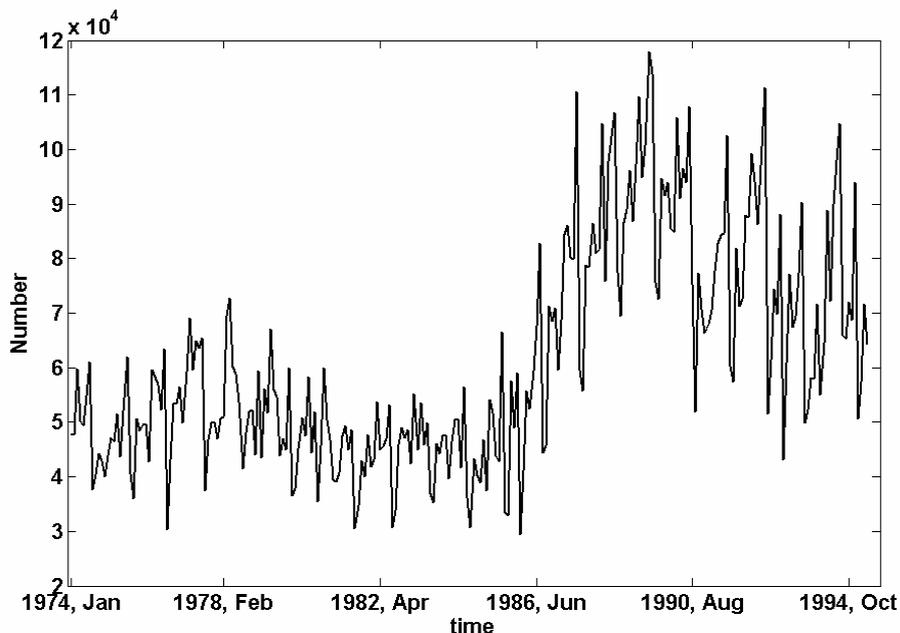


Рис. 44. Количество проданных машин в Испании ежемесячно, данные с 1974, Jan по 1995, Apr (256 отсчетов)

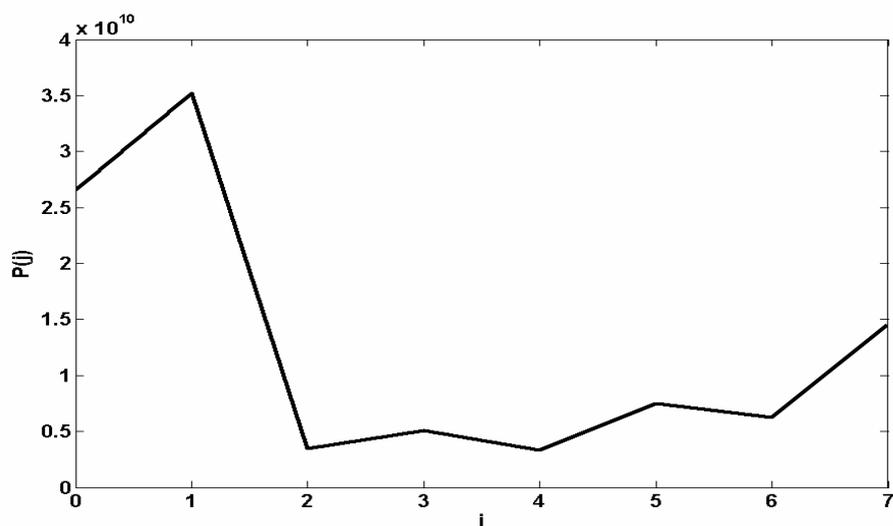


Рис. 45. ДВС сигнала y (первая компонента $\beta_{0,0}^2$ вектора ДВС не изображена)

Подсчитаем вектор вейвлет и масштабных коэффициентов w , используя вейвлет и масштабные фильтры Добеши с $N=8$ нулевыми моментами. ДВС изображен на рис. 45. Видно, что ДВС имеет пики при $j=1,3,5$. Проведем разделение вектора w на четыре вектора $w^{(1)}$, $w^{(2)}$, $w^{(3)}$ и $w^{(4)}$ согласно предложенному в разделе 6.4 правилу при $\tilde{j}=2,4,6$. Как следует из раздела 4.7 вектора $w^{(1)}$, $w^{(2)}$, $w^{(3)}$ и $w^{(4)}$ содержит информацию о гармониках сигнала с частотами в отрезках $[1;1/2^6]$, $[1/2^7;1/2^4]$, $[1/2^5;1/2^2]$ и $[1/2^3;1/2]$ (частоты имеют размерность *квартал*⁻¹). Проводя обратное ПДВП, получаем составляющие сигнала $T^{(i)} = W^{-1}(w^{(i)}), i=1,2,3,4$, изображенные на рис. 46, 47, 48 и 49.

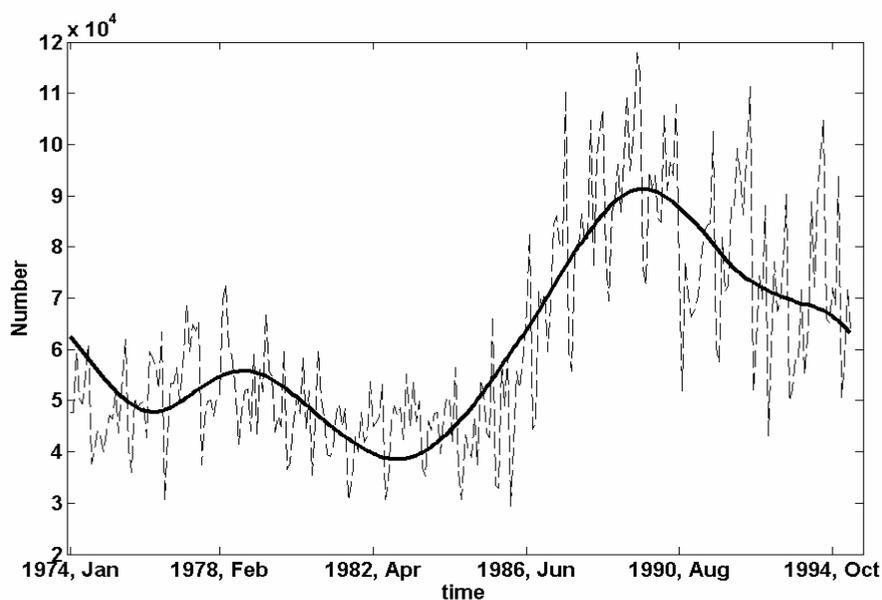


Рис. 46. Компонента $T^{(1)}$ и исходный временной ряд y

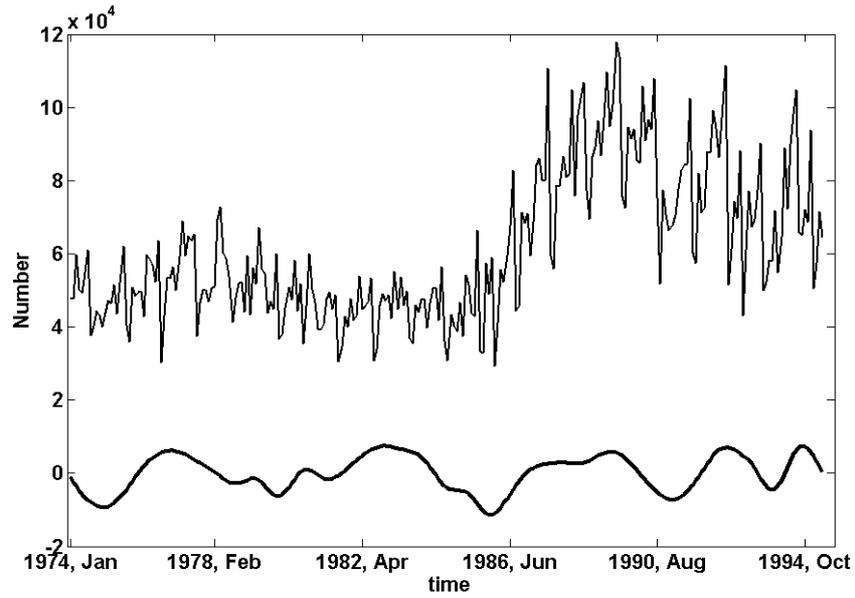


Рис. 47. Компонента $T^{(2)}$ и исходный временной ряд y

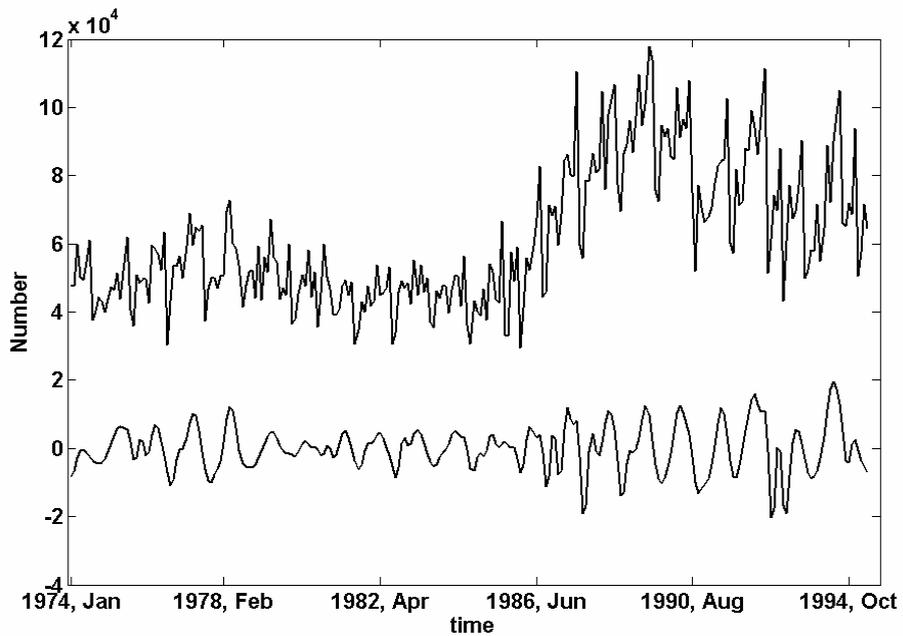


Рис. 48. Компонента $T^{(3)}$ и исходный временной ряд y

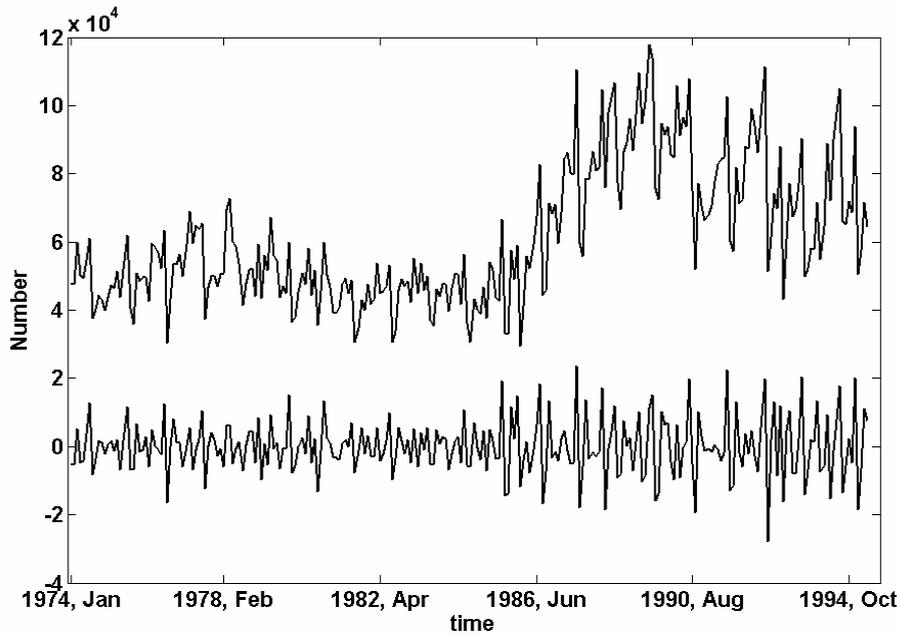


Рис. 49. Компонента $T^{(4)}$ и исходный временной ряд y

Составляющая $T^{(1)}$ представляет собой БЦ (или тренд). Составляющие $T^{(2)}$ и $T^{(3)}$ представляют собой более высокочастотные сезонные колебания. Составляющую $T^{(4)}$ можно рассматривать как шумовые колебания, обусловленные больше какими-то локальными событиями, произошедшими за конкретный месяц. Это неплохо иллюстрирует рис. 50, на котором изображен график суммы компонент $T^{(1)}$, $T^{(2)}$, $T^{(3)}$ и исходный временной ряд y .

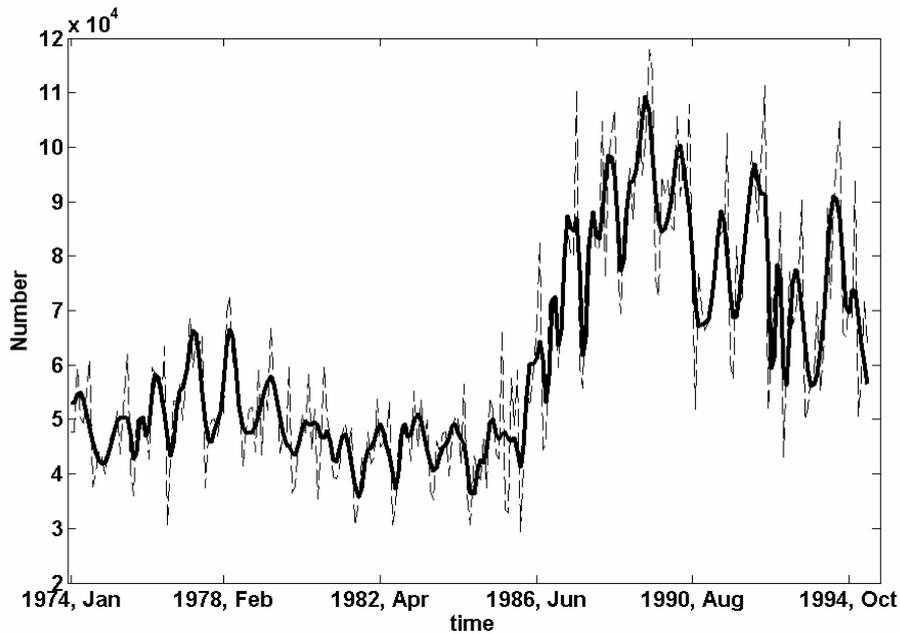


Рис. 50. Сумма компонент $T^{(1)} + T^{(2)} + T^{(3)}$ и исходный временной ряд

На рис. 51 изображен СФ исходного временного ряда (верх). Частоты имеют размерность *квартал*⁻¹. Присутствует резкий пик на низких частотах, что говорит о наличии трендовой составляющей. Если сдвинуться немного вправо, то окажется, что СФ имеет ряд более мелких пиков, не заметных на фоне низкочастотного пика. Эти пики указывают на наличие высокочастотных составляющих.

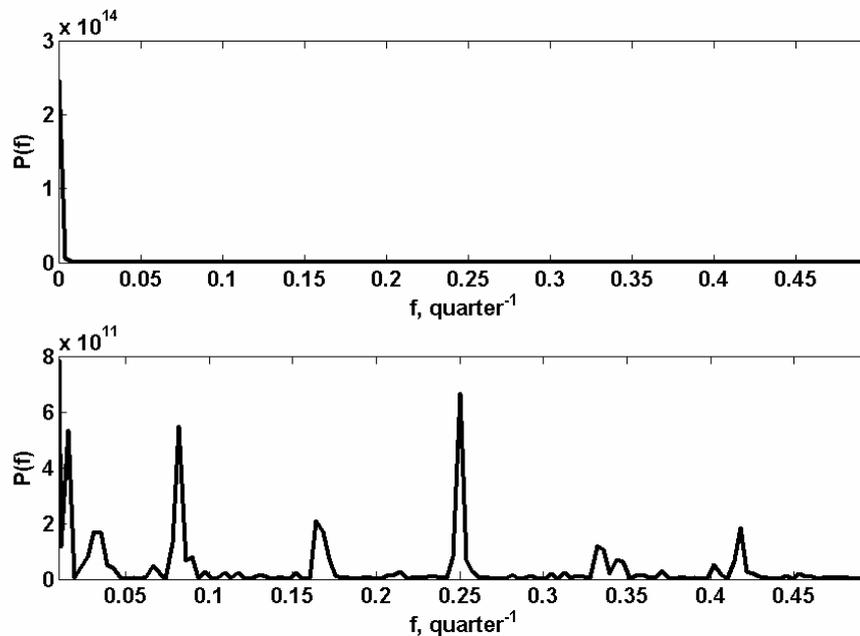


Рис. 51. СФ исходного временного ряда (верх) и его увеличение

Исследуем частотное наполнение выделенных с помощью предложенного алгоритма составляющих $T^{(i)}, i = 1, 2, 3, 4$. СФ этих компонент показаны на рис. 52. Как и следовало ожидать, частоты, на которых СФ компонент имеют основные максимумы, совпадают с частотами, на которых СФ исходного ряда имеет основные максимумы.

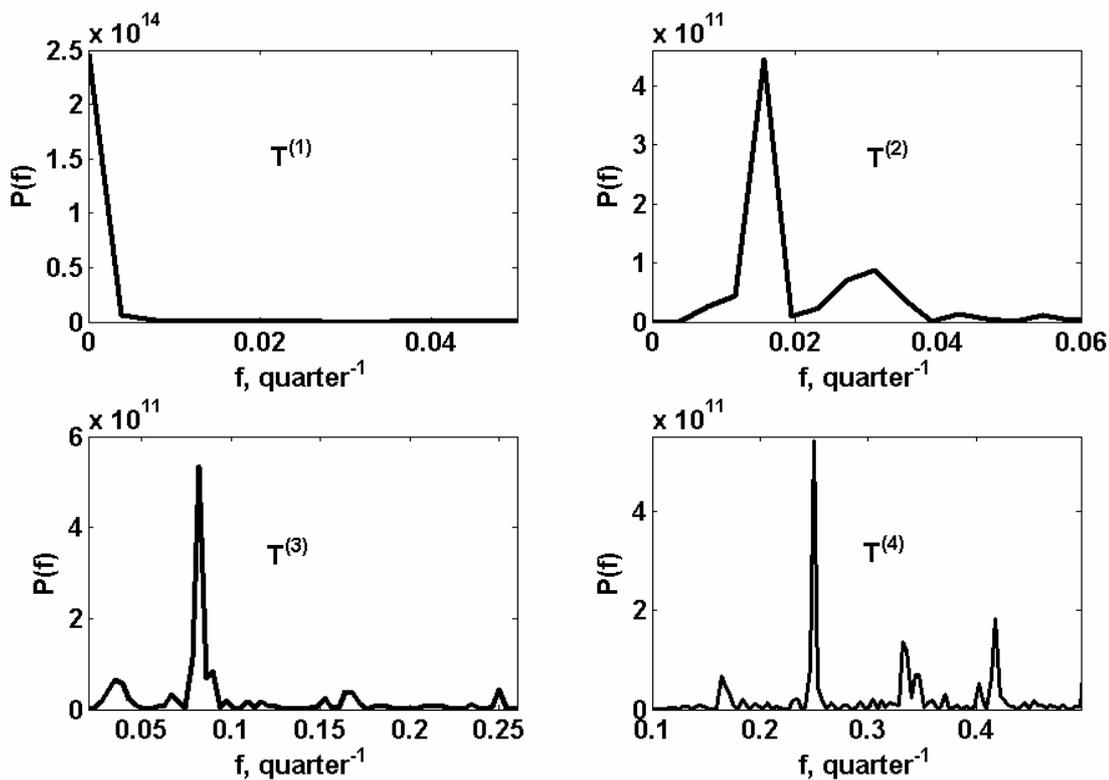


Рис. 52. СФ компонент $T^{(i)}, i=1,2,3,4$.

Литература

1. Астафьева Н.М. Вейвлет анализ: основы теории и примеры применения. //Успехи физических наук. 1998. Т.166. Вып.11. С.1145-1170.
2. Блаттер К. Вейвлет анализ. Основы теории. М.: Техносфера, 2004.
3. Бурнаев Е.В., Оленев Н.Н. Мера близости для временных рядов на основе вейвлет коэффициентов. //Тр. XLVIII научн. конф. МФТИ. Долгопрудный: ФУПМ, 2005. С.108-110.
4. Воробьев В.И., Грибунин В.Г. Теория и практика вейвлет преобразования. СПб.: ВУС, 1999.
5. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. М.: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2004.
6. Дьяконов В.П., Абраменкова И.В. МАТЛАВ. Обработка сигналов и изображений. Специальный справочник. СПб.: Питер, 2002.
7. Дьяконов В.П. Вейвлеты. От теории к практике. М.: СОЛОН-Р, 2002.

8. Истомина Т.В., Чувыкин Б.В., Щеголов В.Е. Применение теории wavelets в задачах обработки информации. Пенза: Пенз. Гос. Ун-т, 2000.
9. Короновский А.А., Храмов А.Е. Непрерывный вейвлет анализ и его приложения. М.: Физматлит, 2003.
10. Мала С. Вэйвлеты в обработке сигналов. М: Мир, 2005.
11. Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А. Теория всплесков. М.: Физматлит, 2006.
12. Новиков Л.В. Основы вейвлет анализа сигналов. СПб.: МОДУС, 1999.
13. Петухов А.П. Введение в теорию базисов всплесков. СПб.: СПбГТУ, 1999.
14. Столниц Э., ДеРоуз Т., Салезин Д. Вейвлеты в компьютерной графике. Теория и приложения. М.: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2004.
15. Уэлстид С. Фракталы и вейвлеты для сжатия изображения в действии. М.: Триумф, 2003.
16. Чуи Ч. Введение в вейвлеты. М.: Мир, 2001.
17. Ширяев А.Н. Основы финансовой стохастической математики. Т.1. М.: Фазис, 2004.
18. Яковлев А.Н. Основы вейвлет преобразования сигналов. М.: САЙНС-ПРЕСС, 2003.
19. Daubechies I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. //Commun. On Pure and Appl. Math. 1998. Vol.41. Pp.909-996.
20. Flandrin P. Time-frequency/Time-scale analysis. London: Academic Press, 1999.
21. Grossman A., Morlet J. Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. //SIAM J. Math. 1984. Pp. 723-736.
22. Jawerth B., Sweldens W. An overview of wavelet based multiresolution analyses. //SIAM Review. 1994. Vol.36. No.3. Pp. 377-412.
23. Jensen M.J. Using wavelets to obtain a consistent ordinary least squares estimator of the long memory parameter. //Journal of Forecasting. 1999. Vol.18. No.1. Pp.17-32.

24. Kaufman L., Rousseeuw P.J. Finding Groups in Data: An Introduction to Cluster Analysis. NY: Wiley, 1990.
25. Meyer Y. Wavelets and operators. London: Cambridge University Press, 1992.
26. Morettin, P.A. Wavelets in Statistics. //Reviews of The Institute of Mathematics and Statistics of The University of Sao Paulo. 1997. Vol.3. No.2. Pp.211-272.
27. Percival D.B., Walden A.T. Wavelet methods for time series analysis. London: Cambridge university press, 2000.
28. Vidakovic B. Statistical modeling by wavelets. NY: Wiley, 1999.
29. Wen Yi, Sharif Md. Raihan, Bing Zeng. Joint Time-Frequency Distributions for Business Cycle Analysis. //Wavelet Analysis and Its Applications: Second International Conference, WAA 2001, Hong Kong, China, December 18-20, 2001. Proceedings. Lecture notes in computer science. Vol. 2251/2001. Berlin: Springer, 2003.

А. Приложение: масштабные фильтры Добеши

N	n	h_n	N	n	h_n
1	0	0.7071067811865475	8	13	0.0003537137999745
	1	0.7071067811865475		0	0.0544158422431049
2	0	0.4829629131445341		1	0.3128715909143031
	1	0.8365163037378077		2	0.6756307362972904
	2	0.2241438680420134		3	0.5853546836541907
	3	-0.1294095225512603		4	-0.0158291052563816
3	0	0.3326705529500827		5	-0.2840155429615702
	1	0.8068915093110928		6	0.0004724845739124
	2	0.4598775021184915		7	0.1287474266204837
	3	-0.1350110200102546		8	-0.0173693010018083
	4	-0.0854412738820267		9	-0.0440882539307952
	5	0.0352262918857096		10	0.0139810279173995
4	0	0.2303778133074431		11	0.0087460940474061
	1	0.7148465705484058	12	-0.0048703529934518	
	2	0.6308807679358788	13	-0.0003917403733770	

	3	-0.0279837694166834		14	0.0006754494064506
	4	-0.1870348117179132		15	-0.0001174767841248
	5	0.0308413818353661		0	0.0380779473638791
	6	0.0328830116666778		1	0.2438346746125939
	7	-0.0105974017850021		2	0.6048231236901156
5	0	0.1601023979741930	9	3	0.6572880780512955
	1	0.6038292697971898		4	0.1331973858249927
	2	0.7243085284377729		5	-0.2932737832791761
	3	0.1384281459013204		6	-0.0968407832229524
	4	-0.2422948870663824		7	0.1485407493381306
	5	-0.0322448695846381		8	0.0307256814793395
	6	0.0775714938400459		9	-0.0676328290613302
	7	-0.0062414902127983		10	0.0002509471148340
	8	-0.0125807519990820		11	0.0223616621236805
6	9	0.0033357252854738	10	12	-0.0047232047577520
	0	0.1115407433501094		13	-0.0042815036824636
	1	0.4946238903984530		14	0.0018476468830564
	2	0.7511339080210954		15	0.0002303857635232
	3	0.3152503517091980		16	-0.0002519631889427
	4	-0.2262646939654399		18	0.0000393473203163
	5	-0.1297668675672624		0	0.0266700579005546
	6	0.0975016055873224		1	0.1881768000776863
	7	0.0275228655303053		2	0.5272011889317202
	8	-0.0315820393174862		3	0.6884590394536250
	9	0.0005538422011614		4	0.2811723436606485
7	10	0.0047772575109455	10	5	-0.2498464243272283
	11	-0.0010773010853085		6	-0.1959462743773399
	0	0.0778520540850081		7	0.1273693403357890
	1	0.3965393194819136		8	0.0930573646035802
	2	0.7291320908462368		9	-0.0713941471663697
	3	0.4697822874052154		10	-0.0294575368218480
	4	-0.1439060039285293		11	0.0332126740593703
	5	-0.2240361849938538		12	0.0036065535669880
	6	0.0713092192668312		13	-0.0107331754833036
	7	0.0806126091510820		14	0.0013953517470692
	8	-0.0380299369350125		15	0.0019924052951930
	9	-0.0165745416306664		16	-0.0006858566949566
	10	0.0125509985560993		17	-0.0001164668551285
11	0.0004295779729214	18	0.0000935886703202		
12	-0.0018016407040474	19	-0.0000132642028945		

<http://faculty.washington.edu/dbp/wmtsa.html>

Б. Приложение: алгоритм ПДВП

Используются масштабный фильтр $h_n, n=0,1,\dots,M-1$ и вейвлет фильтр $g_n, n=0,1,\dots,M-1$ Добеши длины M с $N=M/2$ нулевыми моментами. Пусть $y_n, n=0,1,\dots,L-1$ ($L=2^J, J \in \mathbb{N}$) - некоторый дискретный сигнал.

Прямое ПДВП

Ниже приведен алгоритм, с помощью которого по масштабным коэффициентам $\beta_{j,n}, n=0,1,\dots,2^j-1$ подсчитываются коэффициенты $\alpha_{j-1,n}$ и $\beta_{j-1,n}, n=0,\dots,2^{j-1}-1$. Используя в качестве начальных данных $\beta_{J,n} = L^{-1/2} \cdot y_n, n=0,1,\dots,L-1$, с помощью алгоритма можно последовательно подсчитать вейвлет коэффициенты $\alpha_{j,n}, n=0,1,\dots,2^j-1$ и масштабные коэффициенты $\beta_{j,n}, n=0,1,\dots,2^j-1$ при $j=J-1, J-2, \dots, 0$.

- For $t=0,1,\dots, 2^{j-1}-1$ do
 - $u \leftarrow 2 \cdot t + 1$
 - $\alpha_{j-1,t} \leftarrow g_0 \cdot \beta_{j,u}$
 - $\beta_{j-1,t} \leftarrow h_0 \cdot \beta_{j,u}$
 - For $n=1,2,\dots,M-1$ do
 - $u \leftarrow u - 1$
 - If $u < 0$ then $u \leftarrow 2^j - 1$
 - $\alpha_{j-1,t} \leftarrow \alpha_{j-1,t} + g_n \cdot \beta_{j,u}$
 - $\beta_{j-1,t} \leftarrow \beta_{j-1,t} + h_n \cdot \beta_{j,u}$
 - end
- end

Обратное ПДВП

Ниже приведен алгоритм, с помощью которого по масштабным коэффициентам $\beta_{j-1,n}, n=0,1,\dots,2^{j-1}-1$ и вейвлет коэффициентам $\alpha_{j-1,n}, n=0,1,\dots,2^{j-1}-1$ подсчитываются масштабные коэффициенты $\beta_{j,n}, n=0,\dots,2^j-1$. Используя в качестве начальных данных коэффициенты $\beta_{0,0}$ и $\alpha_{j,n}, j=0,1,\dots,J-1, n=0,1,\dots,2^j-1$, с помощью алгоритма можно подсчитать масштабные коэффициенты $\beta_{j,n}, n=0,1,\dots,2^j-1$, т.е. восстановить значения исходного дискретного сигнала по формуле $y_n = L^{1/2} \cdot \beta_{J,n}, n=0,1,\dots,2^J-1$.

- $l \leftarrow -2$

- $m \leftarrow -1$
- For $t = 0, 1, \dots, 2^{j-1} - 1$ do
 - $l \leftarrow l + 2$
 - $m \leftarrow m + 2$
 - $u \leftarrow t$
 - $i \leftarrow 1$
 - $k \leftarrow 0$
 - $\beta_{j,l} \leftarrow g_i \cdot \alpha_{j-1,u} + h_i \cdot \beta_{j-1,u}$
 - $\beta_{j,m} \leftarrow g_k \cdot \alpha_{j-1,u} + h_k \cdot \beta_{j-1,u}$
 - If $M > 2$ then For $n = 1, 2, \dots, M/2 - 1$ do
 - $u \leftarrow u + 1$
 - If $u \geq 2^{j-1}$ then $u \leftarrow 0$
 - $i \leftarrow i + 2$
 - $k \leftarrow k + 2$
 - $\beta_{j,l} \leftarrow \beta_{j,l} + g_i \cdot \alpha_{j-1,u} + h_i \cdot \beta_{j-1,u}$
 - $\beta_{j,m} \leftarrow \beta_{j,m} + g_k \cdot \alpha_{j-1,u} + h_k \cdot \beta_{j-1,u}$
 - end
- end

В. Приложение: номера “граничных” коэффициентов

При применении алгоритма прямого ПДВП дискретного сигнала длины $L = 2^J$, $J \in N$, приведенного в приложении Б, возникают “граничные” вейвлет и масштабные коэффициенты. Для $j = J-1, J-2, \dots, 0$ “граничными” вейвлет коэффициентами $\alpha_{j,n}$ или масштабными коэффициентами $\beta_{j,n}$ являются коэффициенты с номерами $n = 0, 1, \dots, P-1$, где $P = \min\{L_j, 2^j\}$, а значения L_j в зависимости от j и количества нулевых моментов N соответствующей вейвлет функции приведены в табл. 2. Напомним, что количество масштабных или вейвлет коэффициентов на уровне разрешения j равно 2^j , а длины соответствующих фильтров Добеши равны $M = 2 \cdot N$.

N	$j = J-1$	$j = J-2$	$j = J-3$	$j = J-4$	$j \leq J-5$
1	0	0	0	0	0
2	1	2	2	2	2
3	2	3	4	4	4
4	3	5	6	6	6
5	4	6	7	8	8

6	5	8	9	10	10
7	6	9	11	12	12
8	7	11	13	14	14
9	8	12	14	15	16
10	9	14	16	17	18

Табл. 2. Значения параметра L_j