Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

**СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ**

***Выпуск 8***

Издание выходит с 2003 года

А. Н. Ширяев

# О мартингальных методах в задачах о пересечении границ броуновским движением

МИАН

Москва
2007

УДК 519.216.5+519.216.8
ББК (В)22.171
С56



С56 **Современные проблемы математики** / Математический институт им. В. А. Стеклова РАН (МИАН). — М.: МИАН, 2007. Вып. 8: О мартингальных методах в задачах о пересечении границ броуновским движением / Ширяев А. Н. — 80 с.

ISBN 5-98419-020-6

Серия "Современные проблемы математики" — рецензируемое продолжающееся издание Математического института им. В. А. Стеклова РАН. В серии публикуются работы, отражающие научные достижения сотрудников и аспирантов МИАН. Особое внимание уделяется исследованиям, выполненным в рамках научных программ Российской академии наук. Публикация работ осуществляется по решению Редакционного совета, в который входят представители администрации и заведующие отделами МИАН. Издания серии рассылаются по стандартному обязательному списку, в библиотеки математических институтов и ведущих университетов страны.

ISBN 5-98419-020-6

## Содержание

## § 1. Введение. Вспомогательные результаты

*Основная цель настоящего издания, представленного в форме лекций, состоит в изложении мартингальных методов в задачах, связанных с пересечением границ броуновским движением и броуновским движением со сносом.*

Пусть $B = (B_t)_{t \geqslant 0}$ – стандартное броуновское движение ($\mathsf{E}\, B_t = 0$, $\mathsf{E}\, B_t^2 = t$), заданное на некотором фильтрованном вероятностном пространстве. Рассмотрим моменты остановки вида

$$\tau_g = \inf\{t \geqslant 0 : B_t \geqslant g(t)\}, \quad \overline{\tau}_g = \inf\{t \geqslant 0 : |B_t| \geqslant g(t)\}, \ \ldots,$$

где $g = g(t)$, $t \geqslant 0$, – некоторые границы.

Мы будем интересоваться описанием свойств распределений как моментов $\tau_g$, $\overline{\tau}_g, \ldots$, так и других характеристик (типа $\sup B$, $\sup |B|$, $\ldots$) броуновского движения, броуновского движения со сносом и броуновского моста.

*Полезно отметить, что применяемые нами методы основаны, в сущности, лишь только на следующих четырех общих результатах*:

A. *Теорема о преобразовании свободного выбора*, называемая также
   - OS-теоремой (от англ. *optional sampling theorem*),
   - теоремой об остановке,
   - теоремой об опциональной остановке,
   - теоремой о сохранении свойства мартингальности и субмартингальности при замене времени на случайный момент;

B. *Принцип отражения*;

C. *Теорема Гирсанова*;

D. *Теорема Леви (о совместном распределении $B$ и $\sup B$) и ее обобщение.*

В связи в этим представляется целесообразным напомнить эти классические результаты теории случайных процессов, приводя и их доказательства.

**A. Теорема о преобразовании свободного выбора.** Дадим сначала формулировку и доказательство теоремы о преобразовании свободного выбора в случае *дискретного времени* (см.

также [1], [2]). Затем мы сформулируем и докажем одну ее версию для случая непрерывного времени (см. также [3]).

**1. Случай дискретного времени.**

a) *Пусть* $X = (X_n)_{n\geqslant 0}$ – *субмартингал, заданный на фильтрованном вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}, \mathsf{P})$, $\tau$ *и* $\sigma$ – *два конечных* ($\mathsf{P}$*-п.н.*) *момента остановки таких, что* $\mathsf{E}\, X_\sigma$ *и* $\mathsf{E}\, X_\tau$ *определены* (*например*, $\mathsf{E}\,|X_\sigma| < \infty$, $\mathsf{E}\,|X_\tau| < \infty$). *Предположим, что*

$$\varliminf_{m\to\infty} \mathsf{E}\,[X_m^+ \, I(\tau > m)] = 0. \tag{1.1}$$

*Тогда* $\mathsf{P}$*-п.н.*

$$\boxed{\mathsf{E}\,(X_\tau \,|\, \mathcal{F}_\sigma) \geqslant X_{\tau\wedge\sigma}}\,, \tag{1.2}$$

*или, что эквивалентно,*

$$\mathsf{E}\,(X_\tau \,|\, \mathcal{F}_\sigma) \geqslant X_\sigma \quad \text{на} \ \ \{\tau \geqslant \sigma\}, \ \ \mathsf{P}\text{-п.н.} \tag{1.3}$$

b) *Пусть* $M = (M_n)_{n\geqslant 0}$ – *мартингал,* $\tau$ *и* $\sigma$ – *конечные* ($\mathsf{P}$*-п.н.*) *моменты остановки такие, что* $\mathsf{E}\, M_\sigma$ *и* $\mathsf{E}\, M_\tau$ *определены* (*например*, $\mathsf{E}\,|M_\sigma| < \infty$, $\mathsf{E}\,|M_\tau| < \infty$). *Предположим, что*

$$\varliminf_{m\to\infty} \mathsf{E}\,\big[|M_m| \, I(\tau > m)\big] = 0. \tag{1.4}$$

*Тогда* $\mathsf{P}$*-п.н.*

$$\boxed{\mathsf{E}\,(M_\tau \,|\, \mathcal{F}_\sigma) = M_{\tau\wedge\sigma}}\,, \tag{1.5}$$

*или, что эквивалентно,*

$$\mathsf{E}\,(M_\tau \,|\, \mathcal{F}_\sigma) = M_\sigma \quad \text{на} \ \{\tau \geqslant \sigma\}, \ \ \mathsf{P}\text{-п.н.} \tag{1.6}$$

Доказательство п. а). Нам надо доказать, что для любого множества $A \in \mathcal{F}_\sigma$

$$\mathsf{E}\, X_\tau I(A, \tau \geqslant \sigma) \geqslant \mathsf{E}\, X_\sigma I(A, \tau \geqslant \sigma). \tag{1.7}$$

Для этого достаточно установить, что при любом $n \geqslant 0$

$$\mathsf{E}\, X_\tau I(A, \tau \geqslant \sigma, \sigma = n) \geqslant \mathsf{E}\, X_\sigma I(A, \tau \geqslant \sigma, \sigma = n), \tag{1.8}$$

т.е. что для $B = A \cap \{\sigma = n\}$

$$\mathsf{E}\, X_\tau\, I(B, \tau \geqslant n) \geqslant \mathsf{E}\, X_n\, I(B, \tau \geqslant n). \tag{1.9}$$

Итерациями по $n$ получаем

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\, X_n I(B, \tau \geqslant n) &= \mathsf{E}\, X_n I(B, \tau = n) + \mathsf{E}\, X_n I(B, \tau > n)\\
&\leqslant \mathsf{E}\, X_n I(B, \tau = n) + \mathsf{E}\left[\mathsf{E}\,(X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n) I(B, \tau > n)\right]\\
&= \mathsf{E}\, X_n I(B, \tau = n) + \mathsf{E}\, X_{n+1} I(B, \tau \geqslant n+1)\\
&= \mathsf{E}\, X_\tau I(B, n \leqslant \tau \leqslant n+1) + \mathsf{E}\, X_{n+1} I(B, \tau > n+1)\\
&\leqslant \mathsf{E}\, X_\tau I(B, n \leqslant \tau \leqslant n+1) + \mathsf{E}\, X_{n+2} I(B, \tau \geqslant n+2)\\
&\leqslant \cdots \leqslant \mathsf{E}\, X_\tau I(B, n \leqslant \tau \leqslant m) + \mathsf{E}\, X_m I(B, \tau > m)
\end{aligned} \tag{1.10}$$

для $m \geqslant n$. Следовательно,

$$\mathsf{E}\, X_\tau I(B, n \leqslant \tau \leqslant m) \geqslant \mathsf{E}\, X_n I(B, \tau \geqslant n) - \mathsf{E}\, X_m I(B, \tau > m). \tag{1.11}$$

Мы предположили, что $\mathsf{E}\, X_\tau$ определено. Отсюда следует, что функция множеств $Q(C) = \mathsf{E}\, X_\tau I(C)$, $C \in \mathcal{F}$, счетно-аддитивна, и, значит, $\lim_{m\to\infty} \mathsf{E}\, X_\tau I(B, n \leqslant \tau \leqslant m)$ существует. Тогда из (1.11) и (1.1), переходя к пределу по $m \to \infty$, находим, что для конечных $\tau$

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\, X_\tau I(B, \tau \geqslant n) &\geqslant \varlimsup_{m\to\infty} \left[\mathsf{E}\, X_n I(B, \tau \geqslant n) - \mathsf{E}\, X_m I(B, \tau > m)\right]\\
&= \mathsf{E}\, X_n I(B, \tau \geqslant n) - \varliminf_{m\to\infty} \mathsf{E}\, X_m I(B, \tau > m)\\
&\geqslant \mathsf{E}\, X_n I(B, \tau \geqslant n) - \varliminf_{m\to\infty} \mathsf{E}\, X_m^+ I(B, \tau > m)\\
&= \mathsf{E}\, X_n I(B, \tau \geqslant n),
\end{aligned}$$

или

$$\mathsf{E}\, X_\tau I(A, \sigma = n, \tau \geqslant n) \geqslant \mathsf{E}\, X_n I(A, \sigma = n, \tau \geqslant n),$$

или

$$\mathsf{E}\, X_\tau I(A, \tau \geqslant \sigma, \sigma = n) \geqslant \mathsf{E}\, X_\sigma I(A, \tau \geqslant \sigma, \sigma = n).$$

Отсюда для любого $k \geqslant 0$

$$\mathsf{E}\, X_\tau I(A, \tau \geqslant \sigma, \sigma \leqslant k) \geqslant \mathsf{E}\, X_\sigma I(A, \tau \geqslant \sigma, \sigma \leqslant k). \tag{1.12}$$

По предположению, $\mathsf{P}(\sigma < \infty) = 1$. Поэтому, переходя в (1.12) к пределу по $k \to \infty$ и учитывая, что математические ожидания $\mathsf{E}\, X_\tau$ и $\mathsf{E}\, X_\sigma$ определены, получаем неравенство

$$\mathsf{E}\, X_\tau I(A, \tau \geqslant \sigma) \geqslant \mathsf{E}\, X_\sigma I(A, \tau \geqslant \sigma),$$

которое в точности совпадает с (1.7), откуда и следует (1.2) (и (1.3)). $\square$

Доказательство п. b). Пусть $M = (M_n)_{n \geqslant 0}$ – *мартингал*, удовлетворяющий условию (1.4), что дает

$$\varliminf_{m \to \infty} \mathsf{E}\, [M_m^+ I(\tau > m)] = 0 \tag{1.13a}$$

и

$$\varliminf_{m \to \infty} \mathsf{E}\, [M_m^- I(\tau > m)] = 0. \tag{1.13b}$$

Применяя теорему о преобразовании свободного выбора из п. a) к субмартингалам $X_n = M_n$ и $X_n = -M_n$, $n \geqslant 0$, для которых $X_n^+ = M_n^+$ и $X_n^- = M_n^-$, находим, что

$$\mathsf{E}\, (M_\tau \,|\, \mathcal{F}_\sigma) \geqslant M_{\tau \wedge \sigma}, \tag{1.14}$$

а также

$$\mathsf{E}\, (-M_\tau \,|\, \mathcal{F}_\sigma) \geqslant -M_{\tau \wedge \sigma}, \tag{1.15}$$

т.е.

$$\mathsf{E}\, (M_\tau \,|\, \mathcal{F}_\sigma) \leqslant M_{\tau \wedge \sigma}. \tag{1.16}$$

Из (1.14) и (1.16) получаем *равенство* ($\mathsf{P}$-п.н.)

$$\mathsf{E}\, (M_\tau \,|\, \mathcal{F}_\sigma) = M_{\tau \wedge \sigma}. \qquad \square \tag{1.17}$$

Следствие 1. *Если для некоторого конечного числа $T$ выполнено условие $\mathsf{P}(\tau \leqslant T) = 1$, то $\mathsf{E}\, (X_\tau \,|\, \mathcal{F}_\sigma) \geqslant X_{\tau \wedge \sigma}$ в случае субмартингалов и $\mathsf{E}\, (M_\tau \,|\, \mathcal{F}_\sigma) = M_{\tau \wedge \sigma}$ в случае мартингалов.*

Следствие 2. *Пусть семейства случайных величин $\{X_n^+, n \geqslant 0\}$ (в случае субмартингалов) или $\{|M_n|, n \geqslant 0\}$ (в случае мартингалов) равномерно интегрируемы, т.е.*

$$\sup_n \mathsf{E}\, [X_n^+ I(X_n^+ > c)] \to 0, \quad \sup_n \mathsf{E}\, [|M_n| I(|M_n| > c)] \to 0, \quad c \to \infty.$$

*Тогда выполнены условия (1.1) и (1.4) и (в предположении, что $\mathsf{E}\, X_\sigma$, $\mathsf{E}\, X_\tau$ и $\mathsf{E}\, M_\sigma$, $\mathsf{E}\, M_\tau$ определены) мы получаем утверждения (1.2) и (1.5). В частности, если $|X_n| \leqslant c$ для всех $n \geqslant 0$ и $|M_n| \leqslant c$ для всех $n \geqslant 0$, то свойства (1.2), (1.5) выполнены.*

**2. Случай непрерывного времени.** В этом случае мы сформулируем и докажем только утверждения типа (1.2) и (1.5), и не в общих предположениях вида (1.1) и (1.4), а лишь при условиях, аналогичных сформулированным выше в следствиях 1 и 2.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathsf{P})$ – вероятностное пространство с непрерывной справа фильтрацией $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ (т.е. $\mathcal{F}_t^+ \equiv \bigcap_{u>t} \mathcal{F}_u = \mathcal{F}_t$ для любого $t \geqslant 0$), пополненной множествами $\mathsf{P}$-меры нуль из $\mathcal{F}$.

Все случайные процессы $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$, которые мы будем рассматривать на $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathsf{P})$, предполагаются согласованными с $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ (т.е. $X_t$ является $\mathcal{F}_t$-измеримым для любого $t \geqslant 0$) и имеющими непрерывные справа траектории.

$\alpha$) *Пусть* $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ *– субмартингал, а* $\sigma$ *и* $\tau$ *– два момента остановки, причем момент* $\tau$ *ограничен* ($\tau \leqslant T$). *Тогда случайная величина* $X_\tau$ *интегрируема и* $\mathsf{P}$-*п.н.*

$$\mathsf{E}\,(X_\tau \,|\, \mathcal{F}_\sigma) \geqslant X_{\tau\wedge\sigma}, \tag{1.18}$$

*где* $\mathcal{F}_\infty = \sigma\big(\bigcup_{t\geqslant 0} \mathcal{F}_t\big)$.

*Пусть* $M = (M_t)_{t\geqslant 0}$ *– мартингал, а* $\sigma$ *и* $\tau$ *– два момента остановки, причем* $\tau$ *ограничен* ($\tau \leqslant T$). *Тогда случайная величина* $M_\tau$ *интегрируема и* $\mathsf{P}$-*п.н.*

$$\mathsf{E}\,(M_\tau \,|\, \mathcal{F}_\sigma) = M_{\tau\wedge\sigma}. \tag{1.19}$$

$\beta$) *Свойства* (1.18) *и* (1.19) *выполняются также и для неограниченных* $\tau$, *если семейства* $(X_t^+)_{t\geqslant 0}$ *и* $(|M_t|)_{t\geqslant 0}$ *равномерно интегрируемы* (*т.е.* $\sup_{t\geqslant 0} \mathsf{E}\,[X_t^+ I(X_t^+ > c)] \to 0$ *и* $\sup_{t\geqslant 0} \mathsf{E}\,[|M_t| I(|M_t| > c)] \to 0$ *при* $c \to \infty$).

Доказательство п. $\alpha$) основано на рассмотрении следующих моментов остановки, принимающих счетное число значений:

$$\tau_n = 2^{-n}\lfloor 2^n\tau + 1\rfloor, \qquad \sigma_n = 2^{-n}\lfloor 2^n\sigma + 1\rfloor$$

(таких, что $\tau_n \downarrow \tau$, $\sigma_n \downarrow \sigma$), и использовании утверждений (1.1) и (1.5) для соответствующих процессов с дискретным временем $X^n = (X_k)_{k\in 2^{-n}\mathbb{Z}_+}$ и $M^n = (M_k)_{k\in 2^{-n}\mathbb{Z}_+}$ ($\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$). На заключительном шаге мы положим $n \to \infty$.

Если момент $\tau$ ограничен, то по следствию 1

$$\mathsf{E}\,(X_{\tau_n} \,|\, \mathcal{F}_{\sigma_m}) \geqslant X_{\tau_n\wedge\sigma_m}.$$

При $m \to \infty$ мы получаем (используя теорему Леви о предельном переходе под знаком условных математических ожиданий и свойства непрерывности справа фильтрации $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ и процесса $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$), что

$$\mathsf{E}\,(X_{\tau_n} \,|\, \mathcal{F}_\sigma) \geqslant X_{\tau_n \wedge \sigma}. \tag{1.20}$$

Семейство $\{X_t,\ t \leqslant T\}$ равномерно интегрируемо. Тем самым, (1.18) следует из (1.20), если перейти к пределу при $n \to \infty$ и заметить, что $X_{\tau_n \wedge \sigma} \to X_{\tau \wedge \sigma}$ в силу непрерывности справа процесса $X$.

Доказательство свойства (1.19) для случая мартингалов аналогично.

Чтобы доказать п. $\beta$) для субмартингалов, надо заметить, что если субмартингал $X$ равномерно интегрируем, то существует интегрируемая случайная величина $X_\infty$ такая, что

$$X_t \leqslant \mathsf{E}\,(X_\infty \,|\, \mathcal{F}_t) \tag{1.21}$$

(это неравенство есть не что иное, как хорошо известное свойство Дуба замкнутости равномерно интегрируемых субмартингалов; см. [1, гл. VII, § 4, теорема 2]).

Используя свойство (1.21) и аппроксимируя $\tau$ и $\sigma$ моментами $\tau_n$ и $\sigma_m$, предельным переходом по $m \to \infty$ и $n \to \infty$ получаем требуемое свойство (1.18). Аналогично доказывается и свойство (1.19).

**В. Принцип отражения.**

**1.** *Пусть $\tau$ – конечный момент остановки. Тогда процесс $\widetilde{B} = (\widetilde{B}_t)_{t\geqslant 0}$ с*

$$\boxed{\widetilde{B}_t = B_{t\wedge\tau} - (B_t - B_{t\wedge\tau})}\,, \tag{1.22}$$

*т.е.*

$$\widetilde{B}_t = \begin{cases} B_t, & t < \tau, \\ 2B_\tau - B_t, & t \geqslant \tau, \end{cases} \tag{1.23}$$

*является броуновским движением.*

Доказательство. Строго марковское свойство броуновского движения (см. [3], [6], [27]) утверждает, что процесс $B' = (B'_t)_{t\geqslant 0}$, где

$$B'_t = B_{t\wedge\tau} - B_\tau, \tag{1.24}$$

снова является броуновским движением и к тому же $B'$ и $(\tau, B^\tau)$, где $B^\tau = (B_{t\wedge\tau})_{t\geqslant 0}$, независимы. Нетрудно показать, что

$$\widetilde{B}_t = B_{t\wedge\tau} - B'_{(t-\tau)^+} \tag{1.25}$$

и

$$B_t = B_{t\wedge\tau} + B'_{(t-\tau)^+}. \tag{1.26}$$

В силу строгого марковского свойства имеем

$$(B', \tau, B^\tau) \overset{\text{law}}{=} (-B', \tau, B^\tau).$$

Таким образом, $\widetilde{B} \overset{\text{law}}{=} B$, а именно это и утверждает сформулированный принцип отражения. □

Следствие 3. *Возьмем* $\tau = \tau_x$, *где* $\tau_x = \inf\{t \geqslant 0 : B_t \geqslant x\}$, $x > 0$. *Тогда процесс*

$$\widetilde{B}_t = B_t I(t < \tau_x) + (2x - B_t) I(t \geqslant \tau_x), \qquad t \geqslant 0,$$

*является броуновским движением.*

Следствие 4. *Пусть* $x \geqslant y$. *Тогда*

$$\begin{aligned}\Bigl\{\sup_{t\leqslant T} B_t > x,\, B_T \leqslant y\Bigr\} &= \{\tau_x \leqslant T,\, B_T \leqslant y\} \\ &= \bigl\{\tau_x \leqslant T,\, 2x - \widetilde{B}_T \leqslant y\bigr\} = \bigl\{\tau_x \leqslant T,\, \widetilde{B}_T \geqslant 2x - y\bigr\}.\end{aligned}$$

*Заметим, что* $\{\tau_x > T, \widetilde{B}_T \geqslant 2x - y\} = \varnothing$. *Поэтому для* $x \geqslant y$

$$\Bigl\{\sup_{t\leqslant T} B_t > x,\, B_T \leqslant y\Bigr\} = \bigl\{\widetilde{B}_T \geqslant 2x - y\bigr\} \tag{1.27}$$

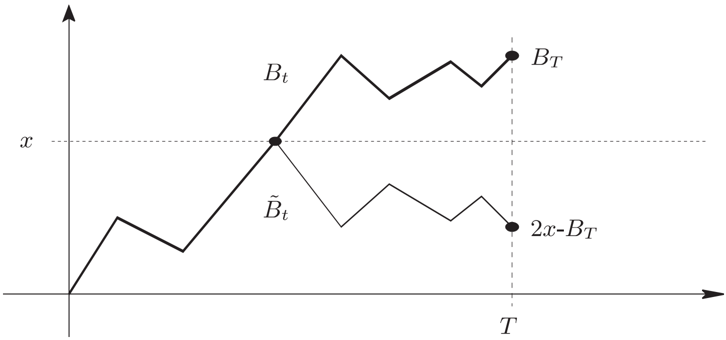
*и*

$$\boxed{\mathsf{P}\Bigl\{\sup_{t\leqslant T} B_t > x,\, B_T \leqslant y\Bigr\} = \mathsf{P}\{B_T \geqslant 2x - y\}}\,, \tag{1.28a}$$

*поскольку* $\widetilde{B} \overset{\text{law}}{=} B$. *В частности,*

$$\boxed{\mathsf{P}\Bigl\{\sup_{t\leqslant T} B_t > x,\, B_T \leqslant x\Bigr\} = \mathsf{P}\{B_T \geqslant x\}}\,. \tag{1.28b}$$

Очень часто именно это равенство называют **принципом отражения** для броуновского движения и иллюстрируют следующим рисунком.




($B$ – заданная траектория, $\tilde{B}$ – отраженная траектория)

**2.** Замечание. Доказательство того, что процесс $\widetilde{B} = (\widetilde{B}_t)_{t\geqslant 0}$ является броуновским движением, можно легко получить из *характеризационной теоремы Леви* для броуновского движения. Согласно этой теореме, достаточно лишь убедиться в том, что процесс $\widetilde{B} = (\widetilde{B}_t)_{t\geqslant 0}$ является *непрерывным локальным мартингалом* и что его *квадратическая характеристика* $\langle \widetilde{B}\rangle_t$ *равна* ($\mathsf{P}$-*п.н.*) $t$ (см., например, [16], [5], [27]).

Из определения (1.22) понятно, что процесс $\widetilde{B} = B^\tau - (B - B^\tau)$, где $B^\tau = (B_{t\wedge\tau})_{t\geqslant 0}$, является непрерывным локальным мартингалом, для которого

$$\langle \widetilde{B}\rangle = \langle B^\tau\rangle + \langle B - B^\tau\rangle - 2\langle B^\tau, B - B^\tau\rangle.$$

Учитывая, что

$$B_t^\tau = \int_0^t I(s\leqslant\tau)\,dB_s, \qquad B_t - B_t^\tau = \int_0^t [1 - I(s\leqslant\tau)]\,dB_s,$$

находим ($\mathsf{P}$-п.н.)

$$\langle B^\tau\rangle_t = t\wedge\tau, \qquad \langle B - B^\tau\rangle_t = t - t\wedge\tau$$

и

$$\langle B^\tau, B - B^\tau\rangle_t = \int_0^t I(s\leqslant\tau)[1 - I(s\leqslant\tau)]\,ds = 0.$$

Поэтому $\langle \widetilde{B}\rangle_t = t$ ($\mathsf{P}$-п.н.), $t\geqslant 0$.

## С. Теорема Гирсанова для броуновского движения.

**1.** Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathsf{P})$ – вероятностное пространство с фильтрацией и $B = (B_t)_{t\geqslant 0}$ – броуновское движение, заданное на этом пространстве.

Обозначим $\mathsf{P}_T = \mathsf{P}\,|\,\mathcal{F}_T$ – ограничение меры $\mathsf{P}$ на $\sigma$-алгебру $\mathcal{F}_T$, $T \in \mathbb{R}_+$, и пусть $B^\mu = (B^\mu_t)_{t\geqslant 0}$ – броуновское движение со сносом: $B^\mu_t = \mu t + B_t$, $t \geqslant 0$.

На $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ введем *новую* вероятностную меру $\mathsf{P}^\mu_T$ с

$$d\mathsf{P}^\mu_T = e^{-\mu B_T - \frac{\mu^2}{2}T}\, d\mathsf{P}_T, \tag{1.29}$$

или, эквивалентно,

$$d\mathsf{P}^\mu_T = e^{-\mu B^\mu_T + \frac{\mu^2}{2}T}\, d\mathsf{P}_T\,. \tag{1.30}$$

Классическая “теорема Гирсанова” утверждает[1], что

$$\boxed{\mathrm{Law}(B^\mu_t,\, t \leqslant T\,|\,\mathsf{P}^\mu_T) = \mathrm{Law}(B_t,\, t \leqslant T\,|\,\mathsf{P}_T)}\,. \tag{1.31}$$

Иначе говоря, относительно меры $\mathsf{P}^\mu_T$ процесс $(B^\mu_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ (броуновское движение со сносом) ведет себя так же, как обычное броуновское движение (т.е. процесс $(B_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$) относительно меры $\mathsf{P}_T$. В частности, если $G_T(x) = G_T(x_t,\, t \leqslant T)$ есть функционал на пространстве $C[0,T]$ непрерывных функций $x = (x_t)_{t\leqslant T}$, то

$$\boxed{\mathrm{Law}(G_T(B^\mu)\,|\,\mathsf{P}^\mu_T) = \mathrm{Law}(G_T(B)\,|\,\mathsf{P}_T)}\,. \tag{1.32}$$

Отсюда для “хороших” измеримых функционалов $G_T(x)$ (например, неотрицательных или ограниченных: $|G_T(x)| < \mathrm{const}$ для всех $x \in C[0,T]$), используя свойство $\mathsf{P}_T \ll \mathsf{P}^\mu_T$ и (1.30), находим, что

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\, G_T(B^\mu) &= \mathsf{E}^\mu_T \frac{d\mathsf{P}_T}{d\mathsf{P}^\mu_T} G_T(B^\mu) = \mathsf{E}^\mu_T\, e^{\mu B^\mu_T - \frac{\mu^2}{2}T} G_T(B^\mu) \\ &= \mathsf{E}\, e^{\mu B_T - \frac{\mu^2}{2}T} G_T(B),\end{aligned} \tag{1.33}$$

[1] По поводу доказательства см., например, [5], [16], [27]. В [4] содержатся аналоги теоремы Гирсанова в общем виде – для *семимартингалов* и *случайных мер*.

где $\mathsf{E}_T^\mu$ – математическое ожидание по мере $\mathsf{P}_T^\mu$. Таким образом, мы имеем следующую полезную формулу:

$$\boxed{\mathsf{E}\, G_T(B^\mu) = \mathsf{E}\, e^{\mu B_T - \frac{\mu^2}{2}T} G_T(B)}\,. \tag{1.34}$$

Из этой формулы непосредственно вытекает следующий важный результат о структуре производной Радона–Никодима *распределений вероятностей* процессов $B$ и $B^\mu$.

Обозначим $Q_T^0$ и $Q_T^\mu$ распределения вероятностей процессов $(B_t)_{t\leqslant T}$ и $(B_t^\mu)_{t\leqslant T}$ в пространстве $C[0,T]$ непрерывных функций $x = (x_t)_{t\leqslant T}$ с борелевской $\sigma$-алгеброй $\mathcal{B}_T$:

$$Q_T^0(A) = \mathsf{P}(B \in A), \quad Q_T^\mu(A) = \mathsf{P}(B^\mu \in A), \qquad A \in \mathcal{B}_T,$$

или, более наглядно,

$$Q_T^0 = \mathrm{Law}(B|\,\mathsf{P}), \quad Q_T^\mu = \mathrm{Law}(B^\mu|\,\mathsf{P}).$$

По формулам замены переменных в интеграле Лебега (для “хороших” функционалов $G_T$)

$$\mathsf{E}\, G_T(B^\mu) = \int_{C[0,T]} G_T(x)\, Q_T^\mu(dx)$$

и

$$\mathsf{E}\, e^{\mu B_T - \frac{\mu^2}{2}T} G_T(B) = \int_{C[0,T]} e^{\mu x_T - \frac{\mu^2}{2}T} G_T(x)\, Q_T^0(dx).$$

Поэтому согласно (1.34)

$$\int_{C[0,T]} G_T(x)\, Q_T^\mu(dx) = \int_{C[0,T]} e^{\mu x_T - \frac{\mu^2}{2}T} G_T(x)\, Q_T^0(dx).$$

Беря здесь $G_T(x) = I_A(x)$, получаем, что

$$Q_T^\mu(A) = \int_A e^{\mu x_T - \frac{\mu^2}{2}T}\, Q_T^0(dx), \qquad A \in \mathcal{B}_T. \tag{1.35}$$

Тем самым, мера $Q_T^\mu$ абсолютно непрерывна относительно меры $Q_T^0$ и производная Радона–Никодима $Z_T^{(\mu)}(x) = \dfrac{dQ_T^\mu}{dQ_T^0}(x)$ задается формулой ($Q_T^0$-п.н.)

$$\boxed{Z_T^{(\mu)}(x) = e^{\mu x_T - \frac{\mu^2}{2}T}}\,. \tag{1.36}$$

Отсюда, беря $x = B$ $(= (B_t(\omega))_{t\leqslant T})$, находим, что ($\mathsf{P}$-п.н.)

$$\boxed{\frac{dQ_T^\mu}{dQ_T^0}(B) = e^{\mu B_T - \frac{\mu^2}{2}T}}. \qquad (1.37)$$

В приведенном изложении предполагалось, что процессы $B$ и $B^\mu$ определены на конечном временном интервале $[0,T]$. Рассмотрим теперь случай бесконечного интервала $[0,\infty)$.

Будем считать, что рассматриваемые процессы $B$ и $B^\mu$ определены на $[0,\infty)$:

$$B = (B_t)_{t\geqslant 0}, \quad B^\mu = (B_t^\mu)_{t\geqslant 0}.$$

Обозначим через $Q^0$ и $Q^\mu$ распределения вероятностей процессов $B$ и $B^\mu$ в пространстве $C[0,\infty)$ непрерывных функций $x = (x_t)_{t\geqslant 0}$ с борелевской $\sigma$-алгеброй $\mathcal{B}_\infty = \mathcal{B}(C[0,\infty))$:

$$Q^0(A) = \mathsf{P}(B^0 \in A), \quad Q^\mu(A) = \mathsf{P}(B^\mu \in A), \qquad A \in \mathcal{B}_\infty.$$

Через $Q^0|\mathcal{B}_T$ и $Q^\mu|\mathcal{B}_T$ будем обозначать сужения мер $Q^0$ и $Q^\mu$ на $\sigma$-алгебру $\mathcal{B}_T = \sigma(x : x_s,\ s \leqslant T)$, порожденную ограничениями, наложенными на $x = (x_s)_{s\geqslant 0}$ на временном интервале $[0,T]$. Приведенный выше результат о структуре производной Радона–Никодима $\dfrac{dQ_T^\mu}{dQ_T^0}(x)$ обобщается на случай мер $Q^\mu$ и $Q^0$ следующим образом: при любом $T \geqslant 0$ ($Q^0$-п.н.)

$$\boxed{\frac{d(Q^\mu|\mathcal{B}_T)}{d(Q^0|\mathcal{B}_T)}(x) = Z_T^{(\mu)}(x)}. \qquad (1.38)$$

(Подробнее о структуре производных Радона–Никодима, в частности для процессов Ито и диффузионных процессов, см. [5], [4].)

**2.** Вернемся к формуле (1.34). Исходным моментом при ее получении была формула (1.29), определяющая по исходной мере $\mathsf{P}$ и функции $Z_T^{(-\mu)}(B)$ новую вероятностную меру $\mathsf{P}_T^\mu$, обладающую тем свойством, что относительно нее (по теореме Гирсанова) процесс $B^\mu = (B_t^\mu)_{t\leqslant T}$ распределен как стандартное броуновское движение $B = (B_t)_{t\leqslant T}$ (см. (1.31)).

Естественно задаться вопросом о том, а как же построить соответствующую меру (скажем, $\mathsf{P}_\infty^\mu$) для случая $T = \infty$.

В том случае, когда $T < \infty$, математическое ожидание $\mathsf{E}\, Z_T^{(-\mu)}(B) = 1$ и формула (1.29) действительно определяет вероятностную меру. Но просто положить $T = \infty$ в равенстве $\mathsf{E}\, Z_T^{(-\mu)}(B) = 1$ мы не можем, поскольку хотя предел $Z_\infty^{(-\mu)}(B) = \lim_{T\to\infty} Z_T^{(-\mu)}(B)$ и существует, но он с вероятностью единица равен нулю. Более того, даже для *конечных* с вероятностью единица марковских моментов $\tau$ может оказаться, что $\mathsf{E}\, Z_\tau^{(-\mu)} < 1$. Тем самым, для переноса формулы (1.29) с детерминированных моментов $T$ на случайные $\tau$ нужно, по крайней мере, выполнение свойства $\mathsf{E}\, Z_\tau^{(-\mu)} = 1$.

**3.** Следующие общие рассмотрения показывают, как правильно здесь ставить вопрос о построении новых вероятностных мер на бесконечном временном интервале.

Предположим, что на фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t\geqslant 0}, \mathsf{P})$ задан неотрицательный мартингал $Z = (Z_t)_{t\geqslant 0}$ с $Z_0 = 1$. Спрашивается, существует ли на $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ с $\mathcal{F}_\infty = \bigvee \mathcal{F}_t$ вероятностная мера $\widetilde{\mathsf{P}}$ такая, что ее ограничения $\widetilde{\mathsf{P}}|\mathcal{F}_t$ определяются при каждом $t \geqslant 0$ равенствами

$$\big(\widetilde{\mathsf{P}}\,|\,\mathcal{F}_t\big)(A) = \int_A Z_t\, d(\mathsf{P}\,|\,\mathcal{F}_t), \qquad A \in \mathcal{F}_t. \tag{1.39}$$

Ответ на этот вопрос заведомо положителен в предположении, что выполнены некоторые условия *регулярности* исходного фильтрованного вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t\geqslant 0}, \mathsf{P})$. Так, например, если $\Omega$ есть пространство $D(\mathbb{R}_+)$ (непрерывных справа и имеющих пределы слева [càdlàg] функций) или пространство $C(\mathbb{R}_+)$ (непрерывных функций) и семейство $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ соответствующих борелевских $\sigma$-алгебр $\mathcal{F}_t$, $t \geqslant 0$, непрерывно справа и пополнено по мере $\mathsf{P}$, то мера $\widetilde{\mathsf{P}}$ со свойствами (1.39) существует. (Доказательство см., например, в [3, гл. 16].)

При этом если $\sigma$ – момент остановки, то для каждого множества $A \in \mathcal{F}_\sigma$

$$\widetilde{\mathsf{P}}(A \cap \{\sigma < \infty\}) = \mathsf{E}\big[Z_\sigma I(A \cap \{\sigma < \infty\})\big]. \tag{1.40}$$

Доказательство этого утверждения можно получить из теоремы о преобразовании свободного выбора (для ограниченных моментов остановки). Действительно, для любого $A \in \mathcal{F}_{\sigma\wedge t} \subseteq \mathcal{F}_t$ мы имеем по определению меры $\widetilde{\mathsf{P}}$ и свойству (1.6), что

$$\widetilde{\mathsf{P}}(A) = \mathsf{E}\,[Z_t\, I(A)] = \mathsf{E}\,[Z_{t\wedge\sigma} I(A)].$$

Если $A \in \mathcal{F}_\sigma$, то $A \cap \{\sigma \leqslant t\} \in \mathcal{F}_{t\wedge\sigma}$ и из (1.12) следует, что

$$\widetilde{\mathsf{P}}(A \cap \{\sigma \leqslant t\}) = \mathsf{E}\big[Z_\sigma I(A \cap \{\sigma \leqslant t\})\big]. \tag{1.41}$$

По теореме о монотонной сходимости, соотношение (1.36) получается из (1.41) при $t \to \infty$.

**4.** Рассмотрим сейчас мартингал

$$Z_t = e^{-\mu B_{t\wedge\tau} - \frac{\mu^2}{2}(t\wedge\tau)}, \qquad t \geqslant 0, \tag{1.42}$$

где $\tau$ – момент остановки такой, что $\mathsf{E}\, Z_\tau = 1$.

В этом случае мера $\widetilde{\mathsf{P}}$ может быть построена естественным образом:

$$d\widetilde{\mathsf{P}} = Z_\tau \, d\mathsf{P}\,. \tag{1.43}$$

Соответствующее утверждение *теоремы Гирсанова* состоит в том, что процесс

$$\widetilde{B}^\mu_t = B_t + \mu(t \wedge \tau) \tag{1.44}$$

является броуновским движением относительно меры $\widetilde{\mathsf{P}}$. (Доказательство см. в упомянутых уже книгах [5], [16], [4], [27].) Из этой формулы мы видим, что на множестве $\{\tau < \infty\}$

$$\mathrm{Law}(\widetilde{B}^\mu \,|\, \widetilde{\mathsf{P}}) = \mathrm{Law}(B \,|\, \mathsf{P}). \tag{1.45}$$

Точнее, для любого, скажем, ограниченного или неотрицательного $\mathcal{F}_\tau$-измеримого функционала $G_\tau(\,\cdot\,)$

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\big[G_\tau(\widetilde{B}^\mu)\, I(\tau < \infty)\big] = \mathsf{E}\,[G_\tau(B)\, I(\tau < \infty)], \tag{1.46}$$

где $\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}$ – математическое ожидание по мере $\widetilde{\mathsf{P}}$.

Аналогично (1.33) из (1.46) получаем

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\big[G_\tau(B^\mu)\, I(\tau < \infty)\big] &= \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\left[\frac{d\mathsf{P}}{d\widetilde{\mathsf{P}}}\, G_\tau(B^\mu)\, I(\tau < \infty)\right] \\
&= \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\Big[e^{\mu B^\mu_\tau - \frac{\mu^2}{2}\tau}\, G_\tau(B^\mu)\, I(\tau < \infty)\Big] \\
&= \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\Big[e^{\mu \widetilde{B}^\mu_\tau - \frac{\mu^2}{2}\tau}\, G_\tau(\widetilde{B}^\mu)\, I(\tau < \infty)\Big] \\
&= \mathsf{E}\Big[e^{\mu B_\tau - \frac{\mu^2}{2}\tau}\, G_\tau(B)\, I(\tau < \infty)\Big].
\end{aligned} \tag{1.47}$$

Следовательно, если $\mathsf{E}\, e^{-\mu B_\tau - \frac{\mu^2}{2}\tau} = 1$, то (ср. (1.34))

$$\boxed{\mathsf{E}\big[G_\tau(B^\mu)\, I(\tau < \infty)\big] = \mathsf{E}\Big[e^{\mu B_\tau - \frac{\mu^2}{2}\tau}\, G_\tau(B)\, I(\tau < \infty)\Big]}\,. \tag{1.48}$$

**D. Теорема Леви (о совместном распределении $B$ и $\sup B$) и ее обобщение.**

**1.** Классическая *теорема Леви* утверждает, что для броуновского движения $B = (B_t)_{t \geqslant 0}$ выполнено следующее замечательное свойство (см., например, [16], [27]):

$$\boxed{(\sup B - B,\, \sup B) \overset{\text{law}}{=} (|B|,\, L(B))}, \tag{1.49}$$

где $L(B) = (L_t(B))_{t \geqslant 0}$ – локальное время в нуле:

$$L_t(B) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t I(|B_s| \leqslant \varepsilon)\, ds, \qquad t \geqslant 0. \tag{1.50}$$

(Предел при $\varepsilon \downarrow 0$ в (1.50) существует $\mathsf{P}$-п.н.)

Свойство (1.49) допускает обобщение и на случай броуновского движения со сносом $B^\mu = (B_t^\mu)_{t \geqslant 0}$, где $B_t^\mu = \mu t + B_t$, $t \geqslant 0$, $\mu \in \mathbb{R}$. Именно, в [25] показано, что

$$\boxed{(\sup B^\mu - B^\mu,\ \sup B^\mu) \overset{\text{law}}{=} (|X^\mu|,\, L(X^\mu))}, \tag{1.51}$$

где $X^\mu = (X_t^\mu)_{t \geqslant 0}$ – процесс, допускающий стохастический дифференциал

$$dX_t^\mu = -\mu \operatorname{sign} X_t^\mu\, dt + dB_t, \qquad X_0^\mu = 0. \tag{1.52}$$

(Стохастическое дифференциальное уравнение (1.52) имеет и притом единственное сильное решение, т.е. такое, что при каждом $t \geqslant 0$ величины $X_t^\mu$ являются $\mathcal{F}_t^B \equiv \sigma(B_s,\, s \leqslant t)$-измеримыми. Процесс $X^\mu$ хорошо известен в теории оптимального стохастического управления под названием “bang-bang process”.)

В (1.51) $L(X^\mu) = (L_t(X^\mu))_{t \geqslant 0}$ есть локальное время процесса $X^\mu$ в нуле, определяемое формулой (1.50) с заменой $B$ на $X^\mu$.

**2.** Стандартное доказательство свойства (1.49) основано на применении *леммы Скорохода*, приводимой ниже. Если считать доказанным утверждение (1.49), то свойство (1.51) может быть установлено применением теоремы Гирсанова (для броуновского движения со сносом $B^\mu$ и для процесса $X^\mu$). Именно такой путь доказательства свойства (1.51) был предложен в работе [25], и мы его приведем в п. 5. Оказывается, однако, что лемма Скорохода “работает” не только в случае броуновского движения, но и в случае броуновского движения со сносом. Иначе говоря, эта лемма сразу дает доказательство свойства (1.51) и для $\mu = 0$, и для $\mu \neq 0$. (Такой путь был применен в работе [26].)

**3.** Лемма Скорохода. *Пусть* $y = (y_t)_{t\geqslant 0}$ – *непрерывная функция такая, что* $y_0 \geqslant 0$. *Тогда существует единственная пара функций* $(x, l) = ((x_t, l_t))_{t\geqslant 0}$ *такая, что*

(a) $x = y + l$;

(b) $x \geqslant 0$;

(c) $l = (l_t)_{t\geqslant 0}$ *есть неубывающая непрерывная функция,* $l_0 = 0$, *такая, что носитель меры* $dl = (dl_t)_{t\geqslant 0}$ *совпадает с множеством* $\{t \geqslant 0 : x_t = 0\}$.

*Более того, функция* $l = (l_t)_{t\geqslant 0}$ *задается формулами*

$$l_t = \sup_{s\leqslant t}(-y_s \vee 0), \qquad t \geqslant 0. \tag{1.53}$$

(Доказательство см. в [28] или в [16, гл. VI, § 2, (2.1)].)

**4.** Дадим доказательство свойства (1.51) для любого $\mu \in \mathbb{R}$, основываясь на сформулированной лемме.

Применяя *формулу Танака* (см. [16], [27]) к *процессу* $X^\mu = (X^\mu_t)_{t\geqslant 0}$, находим, что

$$|X^\mu_t| = \int_0^t \operatorname{sign} X^\mu_s \, dX^\mu_s + L_t(X^\mu). \tag{1.54}$$

Обозначая

$$Y^\mu_t = -\int_0^t \operatorname{sign} X^\mu_s \, dX^\mu_s, \tag{1.55}$$

получаем, что

$$|X^\mu_t| = -Y^\mu_t + L_t(X^\mu). \tag{1.56}$$

Применяя теперь лемму Скорохода, видим, что, согласно (1.53), $L_t(X^\mu)$ непременно имеет следующий вид:

$$L_t(X^\mu) = \sup_{s\leqslant t} Y^\mu_s, \tag{1.57}$$

и, значит, (1.56) может быть представлено как

$$|X^\mu_t| = \sup_{s\leqslant t} Y^\mu_s - Y^\mu_t. \tag{1.58}$$

Из (1.57) и (1.58) находим, что для каждого $t \geqslant 0$ справедливо соотношение

$$\Bigl(\sup_{s\leqslant t} Y^\mu_s - Y^\mu_t,\ \sup_{s\leqslant t} Y^\mu_s\Bigr) = (|X^\mu_t|, L_t(X^\mu)). \tag{1.59}$$

Далее, из (1.55) и (1.52)

$$Y_t^\mu = -\int_0^t \operatorname{sign} X_s^\mu \, dX_s^\mu = \mu t - \int_0^t \operatorname{sign} X_s^\mu \, dB_s. \tag{1.60}$$

Здесь процесс $\left(-\int_0^t \operatorname{sign} X_s^\mu \, dB_s\right)_{t \geqslant 0}$ является непрерывным мартингалом, квадратическая характеристика которого

$$\left\langle -\int_0^\cdot \operatorname{sign} X_s^\mu \, dB_s \right\rangle_t = t.$$

Следовательно, по характеризационной теореме Леви для броуновского движения (см. п. 2 раздела B (с. 12)),

$$\operatorname{Law}\left(-\int_0^t \operatorname{sign} X_s^\mu \, dB_s;\ t \geqslant 0\right) = \operatorname{Law}(B_t;\ t \geqslant 0).$$

Значит,

$$\operatorname{Law}(Y_t^\mu;\ t \geqslant 0) = \operatorname{Law}(B_t;\ t \geqslant 0),$$

и из (1.59) находим, что для каждого $t \geqslant 0$

$$\left(\sup_{s \leqslant t} B_s^\mu - B_t^\mu,\ \sup_{s \leqslant t} B_s^\mu\right) \overset{\text{law}}{=} (|X_t^\mu|,\ L_t(X^\mu)). \tag{1.61}$$

В силу произвольности $t \geqslant 0$ из (1.61) получаем требуемое свойство (1.51) для произвольного $\mu \in \mathbb{R}$ и, в частности, для $\mu = 0$.

**5.** Покажем сейчас, как можно было бы получить свойство (1.51) для *произвольного* $\mu \in \mathbb{R}$ из свойства (1.49) для $\mu = 0$ и теоремы Гирсанова.

Согласно (1.34), для всякого $T > 0$ и "хороших" функционалов $G_T(\,\cdot\,,\cdot\,)$ (скажем, измеримых и ограниченных)

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\, G_T\Big(\sup_{s \leqslant T} B_s^\mu - B_T^\mu,\ \sup_{s \leqslant T} B_s^\mu\Big) \\ = \mathsf{E}\, e^{\mu B_T - \frac{\mu^2}{2} T} G_T\Big(\sup_{s \leqslant T} B_s - B_T,\ \sup_{s \leqslant T} B_s\Big). \end{aligned} \tag{1.62}$$

Из свойства (1.49) заключаем, что

$$\Big(B_T,\ \sup_{s \leqslant T} B_s - B_T,\ \sup_{s \leqslant T} B_s\Big) \overset{\text{law}}{=} \big(L_T(B) - |B_T|,\ |B_T|,\ L_T(B)\big). \tag{1.63}$$

Из (1.62) и (1.63) видим, что

$$\mathsf{E}\,G_T\Big(\sup_{s\leqslant T} B_s^\mu - B_T^\mu,\ \sup_{s\leqslant T} B_s^\mu\Big)$$
$$= \mathsf{E}\,e^{\mu(L_T(B)-|B_T|)-\frac{\mu^2}{2}T} G_T\big(|B_T|,\ L_T(B)\big). \tag{1.64}$$

Для доказательства свойства (1.51) достаточно показать, что для всякого $T>0$

$$\mathsf{E}\,G_T\Big(\sup_{s\leqslant T} B_s^\mu - B_T^\mu,\ \sup_{s\leqslant T} B_s^\mu\Big) = \mathsf{E}\,G_T\big(|X_T^\mu|,\ L_T(X^\mu)\big).$$

Для этого, в свою очередь, достаточно проверить лишь, что $\mathsf{E}\,G_T\big(|X_T^\mu|,\ L_T(X^\mu)\big)$ совпадает с правой частью в (1.64).

С этой целью по аналогии с (1.29) и (1.30) введем вероятностную меру $\widehat{\mathsf{P}}_T^\mu$ с

$$d\widehat{\mathsf{P}}_T^\mu = e^{\mu\int_0^T \operatorname{sign} X_s^\mu\, dB_s - \frac{\mu^2}{2}T}\, d\mathsf{P}_T, \tag{1.65}$$

что в силу (1.52) эквивалентно равенству

$$d\widehat{\mathsf{P}}_T^\mu = e^{\mu\int_0^T \operatorname{sign} X_s^\mu\, dX_s^\mu + \frac{\mu^2}{2}T}\, d\mathsf{P}_T\,. \tag{1.66}$$

Теорема Гирсанова, в применении к (диффузионному) процессу $X^\mu$, утверждает (см. [4], [5], [27]), что

$$\mathrm{Law}\big(X_t^\mu,\ t\leqslant T\,|\,\widehat{\mathsf{P}}_T^\mu\big) = \mathrm{Law}(B_t,\ t\leqslant T\,|\ \mathsf{P}_T) \tag{1.67}$$

(ср. (1.31)).

Используя это свойство и (1.65), находим (ср. (1.33)), что

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\,G_T\big(|X_T^\mu|,\ L_T(X^\mu)\big) &= \mathsf{E}_{\widehat{\mathsf{P}}_T^\mu} \frac{d\mathsf{P}_T}{d\widehat{\mathsf{P}}_T^\mu}\, G_T\big(|X_T^\mu|,\ L_T(X^\mu)\big)\\
&= \mathsf{E}_{\widehat{\mathsf{P}}_T^\mu}\, e^{-\mu\int_0^T \operatorname{sign} X_s^\mu\, dX_s^\mu - \frac{\mu^2}{2}T}\, G_T\big(|X_T^\mu|,\ L_T(X^\mu)\big)\\
&= \mathsf{E}\,e^{-\mu\int_0^T \operatorname{sign} B_s\, dB_s - \frac{\mu^2}{2}T}\, G_T\big(|B_T|,\ L_T(B)\big).
\end{aligned} \tag{1.68}$$

Пользуясь *формулой Танака для броуновского движения* (см. (1.54) для $\mu=0$ и [16], [27]), получаем, что ($\mathsf{P}$-п.н.)

$$|B_T| = \int_0^T \operatorname{sign} B_s\, dB_s + L_T(B). \tag{1.69}$$

Из (1.68) и (1.69)

$$\mathsf{E}\, G_T\big(|X_T^\mu|, L_T(X^\mu)\big) = \mathsf{E}\, e^{\mu(L_T(B)-|B_T|)-\frac{\mu^2}{2}T} G_T\big(|B_T|, L_T(B)\big). \tag{1.70}$$

Сопоставление (1.70) с (1.64) показывает, что для всякого $T > 0$ и достаточно "хороших" измеримых функционалов $G_T(\,\cdot\,,\cdot\,)$ выполнено соотношение

$$\mathsf{E}\, G_T\Big(\sup_{s\leqslant T} B_s^\mu - B_T^\mu,\ \sup_{s\leqslant T} B_s^\mu\Big) = \mathsf{E}\, G_T\big(|X_T^\mu|,\ L_T(X^\mu)\big). \tag{1.71}$$

В качестве "хороших" функционалов можно взять индикаторы множеств. Тем самым из (1.71) получаем требуемое соотношение (1.51).

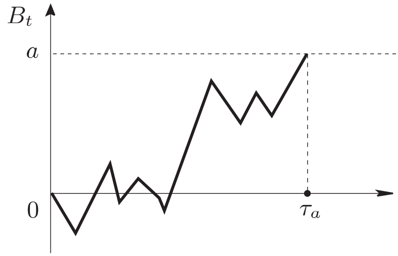
Задачи (в связи с содержанием § 1).

1. Дать доказательство того, что если субмартингал $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ равномерно интегрируем, то существует интегрируемая случайная величина $X_\infty$ такая, что $X_t \leqslant \mathsf{E}\,(X_\infty \,|\, \mathcal{F}_t)$ ($\mathsf{P}$-п.н.), $t \geqslant 0$.
2. Проверить, что выполняются свойства (1.25) и (1.26).
3. Основываясь на характеризационной теореме Леви (см. замечание в п. 2 раздела B), восстановить детали доказательства того, что процесс $\widetilde{B}$ является броуновским движением (см. об этом конец раздела B).
4. Дать доказательство *теоремы Гирсанова* (1.31), использующее метод характеристических функций.
5. Проанализировать доказательство существования меры $\widetilde{\mathsf{P}}$ со свойством $d(\widetilde{\mathsf{P}}|\mathcal{F}_t) = Z_t\, d(\mathsf{P}\,|\mathcal{F}_t)$ (см. (1.39)), данное в [3, гл. 16].
6. Доказать, что процесс $\widetilde{B}^\mu$, заданный в (1.44), является *броуновским движением* относительно меры $\widetilde{\mathsf{P}}$.
7. Обосновать первые равенства в (1.33) и (1.47).
8. Доказать, что процесс $\big(\Phi(B_t/\sqrt{1-t}\,)\big)_{0\leqslant t\leqslant 1}$ является мартингалом. (Здесь и далее используются стандартные обозначения $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t)\,dt$, $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-t^2/2}$.)
9. Дать доказательство *леммы Скорохода*, приведенной (без доказательства) в п. 3 раздела D (с. 19).

## § 2. Свойства момента остановки $\tau_a = \inf\{t \geqslant 0 : B_t = a\}$, $a > 0$

**1.** Основные свойства:

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathsf{P}(\tau_a < \infty) = 1, \quad \mathsf{E}\,\tau_a = \infty \\ &\mathsf{E}\,e^{-\lambda\tau_a} = e^{-a\sqrt{2\lambda}}, \quad \lambda \geqslant 0 \\ &p_{\tau_a}(t) = \frac{a\varphi_t(a)}{t} \end{aligned}}$$




здесь $\varphi_t(a) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}}\, e^{-\frac{a^2}{2t}}$, $p_{\tau_a}(t) = \dfrac{\partial}{\partial t}\,\mathsf{P}(\tau_a \leqslant t)$, $0 < t < \infty$.

Доказательство. Зафиксируем $\lambda > 0$ и рассмотрим мартингал

$$M_t = e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} t}, \qquad t \geqslant 0,$$

для которого, очевидно, $\mathsf{E}\,M_t = 1$, $t \geqslant 0$.

По теореме о преобразовании свободного выбора,

$$\mathsf{E}\,M_{\tau_a \wedge t} = 1 \tag{2.1}$$

для любого $t \geqslant 0$. Очевидно, что

$$0 \leqslant M_{\tau_a \wedge t} \leqslant e^{\lambda B_{\tau_a \wedge t} - \frac{\lambda^2}{2}(\tau_a \wedge t)} \leqslant e^{\lambda a}.$$

Тогда, по теореме о мажорируемой сходимости для интеграла Лебега, из (2.1) находим, что

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{t\to\infty} \mathsf{E}\,M_{\tau_a \wedge t} \\ &= \lim_{t\to\infty} \Big[\mathsf{E}\,e^{\lambda B_{\tau_a} - \frac{\lambda^2}{2}\tau_a} I(\tau_a \leqslant t) + \mathsf{E}\,e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} t} I(\tau_a > t)\Big] \\ &= \mathsf{E}\,e^{\lambda B_{\tau_a} - \frac{\lambda^2}{2}\tau_a} I(\tau_a < \infty) + \lim_{t\to\infty} \mathsf{E}\,e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} t} I(\tau_a > t). \end{aligned}$$

Для всех $\lambda \neq 0$ (по усиленному закону больших чисел для броуновского движения) $\mathsf{P}$-п.н.

$$e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} t} = e^{t\left(\lambda \frac{B_t}{t} - \frac{\lambda^2}{2}\right)} \to 0, \qquad t \to \infty.$$

Таким образом, для всякого $\lambda > 0$

$$1 = \mathsf{E}\, e^{\lambda B_{\tau_a} - \frac{\lambda^2}{2}\tau_a} I(\tau_a < \infty) = \mathsf{E}\, e^{\lambda a - \frac{\lambda^2}{2}\tau_a} I(\tau_a < \infty), \tag{2.2}$$

и, снова по теореме о мажорируемой сходимости, при $\lambda \downarrow 0$ мы получаем из (2.2), что

$$\mathsf{P}(\tau_a < \infty) = 1. \tag{2.3}$$

Отсюда и из (2.2) находим

$$\mathsf{E}\, e^{\lambda B_{\tau_a} - \frac{\lambda^2}{2}\tau_a} = \mathsf{E}\, e^{\lambda a - \frac{\lambda^2}{2}\tau_a} = 1,$$

т.е.

$$\mathsf{E}\, e^{-\frac{\lambda^2}{2}\tau_a} = e^{-\lambda a},$$

что дает следующее представление для преобразования Лапласа:

$$\boxed{\mathsf{E}\, e^{-\lambda\tau_a} = e^{-a\sqrt{2\lambda}}}\,. \tag{2.4}$$

Поскольку $\mathsf{P}\{\tau_a < \infty\} = 1$, то формула (2.4) очевидно справедлива и при $\lambda = 0$. Прямые вычисления показывают, что для любого $\lambda \geqslant 0$

$$\boxed{\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, \frac{a\varphi_t(a)}{t}\, dt = e^{-a\sqrt{2\lambda}}}\,. \tag{2.5}$$

Этим, с учетом (2.4), доказано, что вероятность $\mathsf{P}(\tau_a \leqslant t)$ имеет плотность $p_{\tau_a}(t) = \frac{\partial\, \mathsf{P}(\tau_a \leqslant t)}{\partial t}$, задаваемую формулой

$$p_{\tau_a}(t) = \frac{a\varphi_t(a)}{t}$$

или, подробнее,

$$p_{\tau_a}(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}}\, e^{-\frac{a^2}{2t}}. \qquad \square \tag{2.6}$$

**2.** Ясно, что

$$\{\tau_a \leqslant t\} = \Big\{ \sup_{s \leqslant t} B_s \geqslant a \Big\}. \tag{2.7}$$

Следовательно,

$$\mathsf{P}\Big(\sup_{s\leqslant t} B_s \geqslant a\Big) = \mathsf{P}(\tau_a \leqslant t) = \int_0^t \frac{a\varphi_s(a)}{s}\,ds. \tag{2.8}$$

Заметим, что

$$\int_0^t \frac{a\varphi_s(a)}{s}\,ds = 2\int_a^\infty \varphi_t(x)\,dx. \tag{2.9}$$

[ Для доказательства этого соотношения достаточно рассмотреть производные по $t$ левой и правой части и воспользоваться тем, что $\varphi_t(x)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial\varphi_t(x)}{\partial t} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2\varphi_t(x)}{\partial x^2}.\,] \tag{2.10}$$

Рассмотрим правую часть (2.9):

$$2\int_a^\infty \varphi_t(x)\,dx = 2\,\mathsf{P}(B_t \geqslant a) = \mathsf{P}(|B_t| \geqslant a).$$

Из (2.8) имеем

$$\mathsf{P}\Big(\sup_{s\leqslant t} B_s \geqslant a\Big) = 2\,\mathsf{P}(B_t \geqslant a) \tag{2.11}$$

или, эквивалентно,

$$\mathsf{P}\Big(\sup_{s\leqslant t} B_s \geqslant a,\ B_t \leqslant a\Big) = \mathsf{P}(B_t \geqslant a), \tag{2.12}$$

что, как уже указывалось выше (см. (1.28b)), есть один из вариантов *принципа отражения*.

Следовательно, мы можем утверждать, что из теоремы о преобразовании свободного выбора следует принцип отражения (2.12):

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \text{теорема} & & \text{принцип} \\ \text{о преобразовании} & \Longrightarrow & \text{отражения} \\ \text{свободного выбора} & & \text{(2.12)} \end{array}} \tag{2.13}$$

Отметим также, что преобразование Лапласа $\mathsf{E}\,e^{-\lambda\tau_a} = e^{-a\sqrt{2\lambda}}$ можно легко получить из принципа отражения (2.11). В самом деле, из (2.11) имеем $\mathsf{P}(\tau_a \leqslant t) = \mathsf{P}(\sup_{s\leqslant t} B_s \geqslant a) = 2\,\mathsf{P}(B_t \geqslant a) = 2\int_a^\infty \varphi_t(x)\,dx$.

Следовательно, с учетом (2.10),

$$p_{\tau_a}(t) = \frac{\partial\,\mathsf{P}(\tau_a \leqslant t)}{\partial t} = 2\int_a^\infty \frac{\partial \varphi_t(x)}{\partial t}\,dx$$
$$= \int_a^\infty \frac{\partial^2 \varphi_t(x)}{\partial x^2}\,dx = -\frac{\partial \varphi_t(x)}{\partial x}\Big|_{x=a} = a\frac{\partial \varphi_t(a)}{\partial t},$$

откуда выводится, что $\mathsf{P}(\tau_a < \infty) = 1$, $\mathsf{E}\,\tau_a = \infty$ и $\mathsf{E}\,e^{-\lambda\tau_a} = e^{-a\sqrt{2\lambda}}$.

**3.** Пусть $a < 0 < b$ и $\tau = \tau_a \wedge \tau_b$. Тогда, по теореме о преобразовании свободного выбора, $\mathsf{E}\,B_{t\wedge\tau} = 0$, и, поскольку $\mathsf{P}(\tau = \infty) = 0$ (докажите это (!)), теорема о мажорируемой сходимости дает

$$0 = a\,\mathsf{P}(\tau_a < \tau_b) + b\,\mathsf{P}(\tau_b < \tau_a). \tag{2.14}$$

Вместе со свойством

$$\mathsf{P}(\tau_a < \tau_b) + \mathsf{P}(\tau_b < \tau_a) = 1$$

равенство (2.14) приводит к следующим знаменитым формулам:

$$\mathsf{P}(\tau_a < \tau_b) = \frac{b}{b-a}, \tag{2.15}$$

$$\mathsf{P}(\tau_b < \tau_a) = \frac{|a|}{b-a}. \tag{2.16}$$

Задачи (в связи с содержанием § 2).

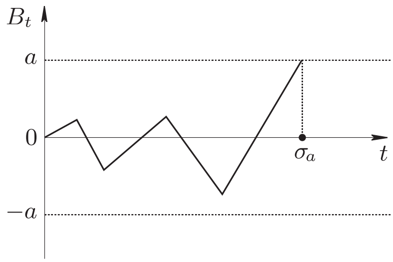
1. Проверить справедливость формулы (2.5).
2. Дать доказательство формулы (2.9).
3. Найти распределение и преобразование Лапласа момента остановки $\tau_a^1 = \inf\{t \geqslant 1 : B_t = a\}$.
4. Доказать использованное в п. 3 равенство $\mathsf{P}(\tau = \infty) = 0$.

## § 3. Свойства момента остановки $\sigma_a = \inf\{t \geqslant 0 : |B_t| \geqslant a\}$, $a > 0$

Основные свойства:

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathsf{P}(\sigma_a < \infty) = 1, \quad \mathsf{E}\,\sigma_a = a^2 \\ &\mathsf{E}\,e^{-\lambda\sigma_a} = \frac{1}{\operatorname{ch}(a\sqrt{2\lambda}\,)} = 2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k e^{-(1+2k)a\sqrt{2\lambda}} \\ &p_{\sigma_a}(t) = 2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,\frac{a(1+2k)}{t}\,\varphi_t(a(1+2k)) \end{aligned}}$$

Здесь $p_{\sigma_a}(t) = \dfrac{\partial}{\partial t}\,\mathsf{P}(\sigma_a \leqslant t)$.




Доказательство. Ясно, что $\sigma_a \leqslant \tau_a$ ($\mathsf{P}$-п.н.), и поэтому $\mathsf{P}(\sigma_a < \infty) = \mathsf{P}(\tau_a < \infty) = 1$, где $\tau_a = \inf\{t \geqslant 0 : B_t = a\}$ (см. § 2).

Чтобы доказать равенство $\mathsf{E}\,\sigma_a = a^2$, рассмотрим мартингал $M_t = B_t^2 - t$, $t \geqslant 0$.

По теореме о преобразовании свободного выбора (следствие 1 на с. 8) $\mathsf{E}\,M_{t\wedge\sigma_a} = 0$ или, что то же, $\mathsf{E}\,B^2_{t\wedge\sigma_a} = \mathsf{E}\,(t\wedge\sigma_a)$. Здесь $B^2_{t\wedge\sigma_a} \leqslant a^2$. В силу теоремы о мажорируемой сходимости

$$\lim_{t\to\infty}\mathsf{E}\,B^2_{t\wedge\sigma_a} = \mathsf{E}\,B^2_{\sigma_a} = a^2, \tag{3.1}$$

а по теореме о монотонной сходимости

$$\lim_{t\to\infty}\mathsf{E}\,(t\wedge\sigma_a) = \mathsf{E}\,\sigma_a. \tag{3.2}$$

Соотношения (3.1) и (3.2) доказывают, что $\mathsf{E}\,\sigma_a = a^2$.

Чтобы найти преобразование Лапласа для распределения момента $\sigma_a$, рассмотрим мартингал $M_t = e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t}$, $t \geqslant 0$, $\lambda > 0$. Здесь $0 < M_{t\wedge\sigma_a} \leqslant e^{\lambda a}$, и, по теореме о мажорируемой сходимости, в силу свойств

$$\mathsf{P}\,(B_{\sigma_a} = a) = \mathsf{P}\,(B_{\sigma_a} = -a) = \tfrac{1}{2}$$

мы получаем

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{t\to\infty} \mathsf{E}\, M_{t\wedge\sigma_a} = \mathsf{E}\, M_{\sigma_a} \\ &= \mathsf{E}\, e^{\lambda B_{\sigma_a} - \frac{\lambda^2}{2}\sigma_a} = \frac{e^{\lambda a} + e^{-\lambda a}}{2}\, \mathsf{E}\, e^{-\frac{\lambda^2}{2}\sigma_a}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathsf{E}\, e^{-\frac{\lambda^2}{2}\sigma_a} = \frac{1}{\operatorname{ch}(\lambda a)}, \tag{3.3}$$

где $\operatorname{ch}(\lambda a) = (e^{\lambda a} + e^{-\lambda a})/2$. Из (3.3) находим собственно преобразование Лапласа:

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\, e^{-\lambda\sigma_a} &= \frac{1}{\operatorname{ch}(a\sqrt{2\lambda}\,)} = \frac{2e^{-\sqrt{2\lambda}a}}{1 + 2e^{-\sqrt{2\lambda}a}} \\ &= 2\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-(1+2k)a\sqrt{2\lambda}}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Из § 2 мы знаем (см. (2.4), (2.5)), что для любого $A > 0$

$$e^{-A\sqrt{2\lambda}} = \mathsf{E}\, e^{-\lambda\tau_A} = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, p_{\tau_A}(t)\, dt,$$

где $p_{\tau_A}(t) = A\varphi_t(A)/t$.

Полагая здесь $A = (1+2k)a$ с $k = 0, 1, 2, \ldots$, из (3.4) находим, что

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\, e^{-\lambda\sigma_a} &= 2\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, \frac{(1+2k)a}{t}\, \varphi_t((1+2k)a)\, dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \biggl\{ 2\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, \frac{(1+2k)a}{t}\, \varphi_t((1+2k)a) \biggr\}\, dt. \end{aligned}$$

Из этого представления следует, что

$$p_{\sigma_a}(t) = 2\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, \frac{(1+2k)a}{t}\, \varphi_t((1+2k)a),$$

или

$$p_{\sigma_a}(t) = 2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k p_{\tau_{a(1+2k)}}(t),$$

что дает

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(\sigma_a \leqslant t) &= \int_0^t p_{\sigma_a}(s)\,ds = 2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \int_0^t p_{\tau_{a(1+2k)}}(s)\,ds \\
&= 2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,\mathsf{P}\big(\tau_{a(1+2k)} \leqslant t\big) \\
&= 4\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,\mathsf{P}\big(B_t \geqslant a(1+2k)\big) \qquad (3.5)\\
&= 4\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left[1-\Phi\left(\frac{a(1+2k)}{\sqrt{t}}\right)\right].
\end{aligned}$$

Формула (3.5) вместе с соотношением

$$\mathsf{P}\,(\sigma_a \leqslant t) = \mathsf{P}\left(\sup_{s\leqslant t}|B_s| \geqslant a\right)$$

позволяют, в принципе, найти

$$\mathsf{E}\sup_{s\leqslant t}|B_s| \quad \left(= \int_0^\infty \mathsf{P}\Big(\sup_{s\leqslant t}|B_s| \geqslant a\Big)\,da = \int_0^\infty \mathsf{P}(\sigma_a \leqslant t)\,da\right).$$

Однако легче это математическое ожидание найти с помощью следующих рассуждений.

Пусть, для простоты, $t = 1$. Имеем

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(\sigma_a \geqslant 1) &= \mathsf{P}\Big(\sup_{s\leqslant 1}|B_s| \leqslant a\Big) \\
&= \mathsf{P}\Big(\sup_{s\leqslant a^{-2}}|B_s| \leqslant 1\Big) = \mathsf{P}(\sigma_1 \geqslant a^{-2}). \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Итак,

$$\mathsf{P}\Big(\sup_{s\leqslant 1}|B_s| \leqslant a\Big) = \mathsf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma_1}} \leqslant a\right), \qquad (3.7)$$

т.е.

$$\mathrm{Law}\Big(\sup_{s\leqslant t}|B_s|\Big) = \mathrm{Law}\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma_1}}\right).$$

Учитывая, что (в силу свойств нормального распределения) для каждого $\Delta > 0$ справедливо соотношение

$$\Delta = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-x^2/(2\Delta^2)}\, dx,$$

используя (3.3) и полагая $\Delta = 1/\sqrt{\sigma_1}$, находим

$$\begin{aligned}
\mathsf{E} \sup_{s\leqslant 1} |B_s| = \mathsf{E}\, \frac{1}{\sqrt{\sigma_1}} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \mathsf{E}\, e^{-x^2\sigma_1/2}\, dx \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^x}{e^{2x}+1}\, dx \\
&= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{arctg} y \Big|_1^\infty \\
&= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\mathsf{E} \sup_{s\leqslant T} |B_s| = \sqrt{\frac{\pi}{2}\, T}. \tag{3.8}$$

(Заметим, между прочим, что $\mathsf{E}\,|B_T| = \sqrt{\frac{2}{\pi}\, T}$.)

Задачи (в связи с содержанием § 3).

1. Найти асимптотику плотностей вероятностей $p_{\sigma_a}(t)$ при $t \to \infty$.
2. Найти $\mathsf{E} \sup_{s\leqslant t} |B_s|$, пользуясь формулами (3.6) и (3.5).
3. Найти явный вид для $\mathsf{E}\,(\sup_{s\leqslant t} |B_s|)^n$ для всех целых $n > 1$, пользуясь свойством (3.8).

# § 4. Свойства момента остановки $\boldsymbol{\tau_{ab} = \inf\{t \geqslant 0 : B_t - bt \geqslant a\}, \ a > 0}$

**1.** Основные свойства:

Для $b \leqslant 0$:

$\mathsf{P}(\tau_{ab} < \infty) = 1$,

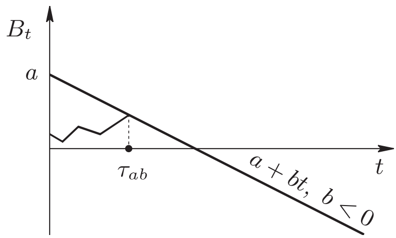
$\mathsf{E}\,\tau_{ab} = \dfrac{a}{|b|}$,

$\mathsf{E}\,B_{\tau_{ab}} = 0$,

$\mathsf{E}\,e^{-\lambda\tau_{ab}} = e^{-a(b+\sqrt{b^2+2\lambda})}$,

где $\lambda \geqslant 0$

$p_{\tau_{ab}}(t) = \dfrac{a}{t}\,\varphi_t(a+bt)$




Для $b > 0$:

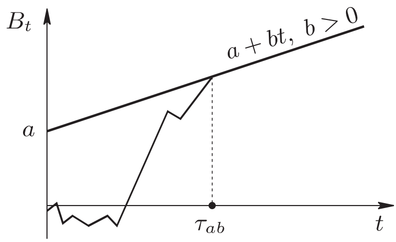
$\mathsf{P}(\tau_{ab} < \infty) = e^{-2ab}$,

$\mathsf{E}\,\tau_{ab} = \infty$,

$\mathsf{E}\,e^{-\lambda\tau_{ab}} I(\tau_{ab} < \infty) =$

$= e^{-a(b+\sqrt{b^2+2\lambda})}$, $\lambda \geqslant 0$

$p_{\tau_{ab}}(t) = \dfrac{a}{t}\,\varphi_t(a+bt)$




Здесь $\varphi_t(a) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}}\, e^{-a^2/(2t)}$, $\ p_{\tau_{ab}}(t) = \dfrac{\partial}{\partial t}\,\mathsf{P}(\tau_{ab} \leqslant t)$, $\ 0 < t < \infty$.

**2.** *Случай* $b \leqslant 0$.

Если $b = 0$, то $\tau_{ab} = \tau_a$ и $\mathsf{P}(\tau_{ab} < \infty) = \mathsf{P}(\tau_a < \infty) = 1$ в силу § 2.

Если $b < 0$, то $\tau_{ab} < \tau_a$ ($\mathsf{P}$-п.н.) и $\mathsf{P}(\tau_{ab} < \infty) = 1$, поскольку $\mathsf{P}(\tau_a < \infty) = 1$.

Для любого $t \geqslant 0$ по теореме о преобразовании свободного выбора

$$\mathsf{E}\,B_{t\wedge\tau_{ab}} = 0. \tag{4.1}$$

Ясно, что
$$B_{t\wedge\tau_{ab}} \leqslant a + b(t\wedge\tau_{ab}). \tag{4.2}$$
Отсюда и из (4.1)
$$0 \leqslant a + b\,\mathsf{E}\,(t\wedge\tau_{ab}),$$
что дает (для $b<0$)
$$\mathsf{E}\,(t\wedge\tau_{ab}) \leqslant \frac{a}{|b|}. \tag{4.3}$$
По теореме о монотонной сходимости,
$$\mathsf{E}\,\tau_{ab} \leqslant \frac{a}{|b|}. \tag{4.4}$$
Покажем, что на самом деле здесь имеет место равенство:
$$\mathsf{E}\,\tau_{ab} = \frac{a}{|b|}, \tag{4.5}$$
и также покажем, что
$$\mathsf{E}\,B_{\tau_{ab}} = 0. \tag{4.6}$$
С этой целью рассмотрим мартингал $M_t = e^{\theta B_t - \frac{\theta^2}{2}t}$, где $\theta = b + \sqrt{b^2+2\lambda}$, $\lambda>0$, $t\geqslant 0$.

По теореме о преобразовании свободного выбора имеем
$$\mathsf{E}\,M_{t\wedge\tau_{ab}} = 1,$$
и поскольку
$$0 \leqslant M_{t\wedge\tau_{ab}} \leqslant e^{ab+\sqrt{b^2+\lambda}},$$
по теореме о мажорируемой сходимости получаем:
$$\begin{aligned}
1 &= \lim_{t\to\infty} \mathsf{E}\,M_{t\wedge\tau_{ab}} \\
&= \lim_{t\to\infty} \mathsf{E}\Big[I(\tau_{ab}<\infty)e^{\theta B_{t\wedge\tau_{ab}} - \frac{\theta^2}{2}(t\wedge\tau_{ab})} + I(\tau_{ab}=\infty)e^{\theta B_t - \frac{\theta^2}{2}t}\Big] \\
&= \mathsf{E}\,I(\tau_{ab}<\infty)\,e^{\theta B_{\tau_{ab}} - \frac{\theta^2}{2}\tau_{ab}} = \mathsf{E}\,e^{\theta B_{\tau_{ab}} - \frac{\theta^2}{2}\tau_{ab}}.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Отсюда
$$\mathsf{E}\,e^{\theta(a+b\tau_{ab}) - \frac{\theta^2}{2}\tau_{ab}} = 1,$$
что дает (с $\theta = b + \sqrt{b^2+2\lambda}\,$)
$$\mathsf{E}\,e^{-\lambda\tau_{ab}} = e^{-a\theta},$$
или
$$\boxed{\mathsf{E}\,e^{-\lambda\tau_{ab}} = e^{-a(b+\sqrt{b^2+2\lambda}\,)}}\,. \tag{4.8}$$

Продифференцируем здесь по $\lambda$ левую и правую части и положим $\lambda \downarrow 0$. Тогда найдем, что

$$\boxed{\mathsf{E}\,\tau_{ab} = \frac{a}{|b|}}.$$

Учитывая равенство

$$B_{\tau_{ab}} = a + b\tau_{ab} \quad \mathsf{P}\text{-п.н.}, \tag{4.9}$$

видим, что $\mathsf{E}\,B_{\tau_{ab}} = a + b\,\mathsf{E}\,\tau_{ab} = a + b \cdot \frac{a}{|b|} = 0$.

Заметим, что обычно в традиционных доказательствах свойств моментов $\tau_{ab}$ сначала показывают, что $\mathsf{E}\,B_{\tau_{ab}} = 0$, а затем получают равенство $\mathsf{E}\,\tau_{ab} = a/|b|$.

Конечно, если нам известно *первое тождество Вальда* "$\mathsf{E}\,\tau < \infty \Rightarrow \mathsf{E}\,B_\tau = 0$", то свойство $\mathsf{E}\,B_{\tau_{ab}} = 0$ следует сразу из того, что $\mathsf{E}\,\tau_{ab} \leqslant a/|b| < \infty$.

Но можно предложить доказательство свойства $\mathsf{E}\,B_{\tau_{ab}} = 0$, не обращающееся к тождеству Вальда.

Действительно, рассмотрим для $\lambda > 0$ мартингал $M_t = e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t}$, $t \geqslant 0$. Из теоремы о преобразовании свободного выбора ($\mathsf{E}\,M_{t\wedge\tau_{ab}} = 1$) и оценок $0 \leqslant e^{\lambda B_{t\wedge\tau_{ab}} - \frac{\lambda^2}{2}(t\wedge\tau_{ab})} \leqslant e^{\lambda a}$, учитывая, что $\mathsf{P}(\tau_{ab} < \infty) = 1$, находим

$$\mathsf{E}\,e^{\lambda B_{\tau_{ab}} - \frac{\lambda^2}{2}\tau_{ab}} = 1.$$

Дифференцирование по $\lambda$ дает

$$\mathsf{E}\,(B_{\tau_{ab}} - \lambda\tau_{ab})e^{\lambda B_{\tau_{ab}} - \frac{\lambda^2}{2}\tau_{ab}} = 0. \tag{4.10}$$

(Заметим, что $\mathsf{E}\,|B_{\tau_{ab}} - \lambda\tau_{ab}|e^{\lambda B_{\tau_{ab}} - \frac{\lambda^2}{2}\tau_{ab}} \leqslant \mathsf{E}\,|a + (b-\lambda)\tau_{ab}|e^{\lambda a} < \infty$, поскольку $\mathsf{E}\,\tau_{ab} < \infty$.) Переходя в (4.10) к пределу при $\lambda \downarrow 0$, получаем, что $\mathsf{E}\,B_{\tau_{ab}} = 0$. Отсюда и из (4.9) следует $\mathsf{E}\,\tau_{ab} = a/|b|$.

**3.** *Случай* $b > 0$.

Рассмотрим мартингал $M_t = e^{\hat\theta B_t - \frac{\hat\theta^2}{2}t}$ с $\hat\theta = 2b$, $t \geqslant 0$. Для всех $t \geqslant 0$ таких, что $B_t \leqslant a + bt$, имеем

$$0 \leqslant e^{\hat\theta B_t - \frac{\hat\theta^2}{2}t} \leqslant e^{2ab}. \tag{4.11}$$

По теореме о преобразовании свободного выбора (раздел A в § 1),

$$\mathsf{E}\, M_{t\wedge\tau_{ab}} = 1,$$

где

$$M_{t\wedge\tau_{ab}} = I(\tau_{ab} < \infty)\, e^{2bB_{t\wedge\tau_{ab}} - \frac{(2b)^2}{2}(t\wedge\tau_{ab})} + I(\tau_{ab} = \infty)\, e^{2bB_t - \frac{(2b)^2}{2}t}.$$

Отсюда и из (4.11), по теореме о мажорируемой сходимости, получаем

$$1 = \lim_{t\to\infty} \mathsf{E}\, M_{t\wedge\tau_{ab}} = \mathsf{E}\, I(\tau_{ab} < \infty)\, e^{2bB_{\tau_{ab}} - \frac{(2b)^2}{2}\tau_{ab}} = \mathsf{E}\, I(\tau_{ab} < \infty)\, e^{2ab} = e^{2ab}\, \mathsf{P}(\tau_{ab} < \infty),$$

что дает

$$\boxed{\mathsf{P}(\tau_{ab} < \infty) = e^{-2ab}}\,. \tag{4.12}$$

Покажем теперь, что

$$\mathsf{E}\, e^{-\lambda\tau_{ab}} I(\tau_{ab} < \infty) = e^{-a(b+\sqrt{b^2+2\lambda}\,)}.$$

Для этого заметим, что в случае $b > 0$ $\mathsf{P}(\tau_{ab} = \infty) > 0$, и, аналогично (4.7), находим, что для $\theta = b + \sqrt{b^2 + 2\lambda}$

$$\mathsf{E}\, I(\tau_{ab} < \infty)\, e^{\theta B_{\tau_{ab}} - \frac{\theta^2}{2}\tau_{ab}} = 1. \tag{4.13}$$

Учитывая то, что $B_{\tau_{ab}} = a + b\tau_{ab}$ на множестве $\{\tau_{ab} < \infty\}$, из (4.13) получаем, что для всякого $\lambda \geqslant 0$

$$\mathsf{E}\, e^{-\lambda\tau_{ab}} I(\tau_{ab} < \infty) = e^{-a\theta} \quad \left(= e^{-a(b+\sqrt{b^2+2\lambda}\,)}\right). \tag{4.14}$$

Полезно отметить, что при $\lambda > 0$ на множестве $\{\tau_{ab} = \infty\}$, очевидно, выполнено свойство $e^{-\lambda\tau_{ab}} = 0$. Таким образом, из (4.14) получаем, что

$$\mathsf{E}\, e^{-\lambda\tau_{ab}} = e^{-a\theta} \quad \left(= e^{-a(b+\sqrt{b^2+2\lambda}\,)}\right). \tag{4.15}$$

Другими словами, в обоих случаях $b \leqslant 0$ и $b > 0$ преобразование Лапласа $\mathsf{E}\, e^{-\lambda\tau_{ab}}$ при $\lambda > 0$ задается одной и той же формулой (4.15).

**4.** Наконец, докажем формулу

$$p_{\tau_{ab}}(b) = \frac{a}{t}\,\varphi_t(a+bt), \qquad 0 \leqslant t < \infty$$

(для обоих случаев $b \leqslant 0$ и $b > 0$). Для этого достаточно проверить, что

$$\int_0^\infty \frac{a}{t}\,\varphi_t(a+bt)e^{-\lambda t}\,dt = e^{-a(b+\sqrt{b^2+2\lambda}\,)}$$

или, подробнее, что

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\,\frac{a}{t}\,e^{-\frac{(a+bt)^2}{2t}}\,e^{-\lambda t}\,dt = e^{-a(b+\sqrt{b^2+2\lambda}\,)}. \tag{4.16}$$

Левая часть (LS) в (4.16) равна

$$(\mathrm{LS}) = e^{-ab}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi b}}\,\frac{a}{t}\,e^{\frac{a^2}{2t}}\,e^{-\left(\lambda+\frac{b^2}{2}\right)t}\,dt.$$

Мы знаем (см. § 2), что для любого $\Lambda > 0$

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\,\frac{a}{t}\,e^{-\frac{a^2}{2t}}\,e^{-\Lambda t}\,dt = e^{-a\sqrt{2\Lambda}}.$$

Беря здесь $\Lambda = \lambda + b^2/2$, получаем, что

$$(\mathrm{LS}) = e^{-ab}e^{-a\sqrt{2\left(\lambda+\frac{b^2}{2}\right)}} = e^{-a(b+\sqrt{b^2+2\lambda}\,)},$$

что совпадает с правой частью (4.16).

Имея установленную формулу $p_{\tau_{ab}}(t) = \frac{a}{t}\varphi_t(a+bt)$, непосредственным интегрированием находим, что

$$\mathsf{P}(\tau_{ab} \leqslant t) = \int_0^t p_{\tau_{ab}}(s)\,ds = 1 - \Phi\left(\frac{a+bt}{\sqrt{t}}\right) + e^{-2ab}\Phi\left(\frac{bt-a}{\sqrt{t}}\right). \tag{4.17}$$

Эта формула будет далее играть существенную роль в § 6.

**5.** Проиллюстрируем некоторые результаты о свойствах моментов остановки $\tau_a$ и $\tau_{ab}$, которые могут быть получены непосредственно из теоремы Гирсанова.

(a) Для момента остановки

$$\tau_a = \inf\{t : B_t \geqslant a\}, \qquad a > 0,$$

при любом $\lambda \geqslant 0$ имеем (см. § 2)

$$\mathsf{E}\, e^{\lambda B_{\tau_a} - \frac{\lambda^2}{2}\tau_a} = 1.$$

Отсюда для любого $\mu \leqslant 0$

$$\mathsf{E}\, e^{-\mu B_{\tau_a} - \frac{\mu^2}{2}\tau_a} = 1,$$

и процесс $\widetilde{B}_t^{\mu} = B_t + \mu(t \wedge \tau_a)$ является (см. (1.42)–(1.44)) *броуновским движением* относительно меры $\widetilde{\mathsf{P}}_a$ такой, что $d\widetilde{\mathsf{P}}_a = e^{-\mu B_{\tau_a} - \frac{\mu^2}{a}\tau_a}\, d\mathsf{P}$.

(b) Рассмотрим теперь момент остановки

$$\tau_{ab} = \inf\{t : B_t - bt \geqslant a\}.$$

Беря $\mu = -b$ с $b > 0$, из соотношений (1.48) и (2.4) получаем, что для $\lambda > 0$ и $b > 0$

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\, e^{-\lambda\tau_{ab}} &= \mathsf{E}\left[e^{bB_{\tau_a} - \frac{b^2}{2}\tau_a}\, e^{-\lambda\tau_a}\right] = e^{-ab}\, \mathsf{E}\, e^{-\left(\lambda + \frac{b^2}{2}\right)\tau_a} \\
&= e^{-ab}\, e^{-a\sqrt{2\left(\lambda + \frac{b^2}{2}\right)}} = e^{-a(b + \sqrt{2\lambda + b^2}\,)}
\end{aligned}$$

(ср. (4.15)).

Аналогичным образом находим, что для $b > 0$

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(\tau_{ab} \leqslant t) &= \mathsf{E}\, I(\tau_{ab} \leqslant t) = \mathsf{E}\, e^{-bB_{\tau_a} - \frac{b^2}{2}\tau_a}\, I(\tau_a \leqslant t) \\
&= e^{-ab}\, \mathsf{E}\, e^{-\frac{b^2}{2}\tau_a} I(\tau_a \leqslant t) \\
&= e^{-ab} \int_0^t e^{-a\frac{b^2}{2}s}\, \frac{a}{s}\, \varphi_s(a)\, ds \\
&= e^{-ab} \int_0^t \frac{a}{s}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi s}}\, e^{-\frac{b^2}{2}s - \frac{a^2}{2s}}\, ds \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{a}{s^{3/2}} e^{-\frac{(a+bs)^2}{2s}}\, ds,
\end{aligned}$$

что дает уже найденную ранее (п. 4) формулу

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\mathsf{P}(\tau_{ab} \leqslant t) = \frac{a\varphi_t(a+bt)}{t}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$\mathsf{P}(\tau_{ab} < \infty) = e^{-ab}\int_0^\infty \frac{a}{t}\varphi_t(a)\,dt = e^{-ab-|ab|}.$$

Если $b > 0$ и $a > 0$, то

$$e^{-ab-|ab|} = e^{-2ab}.$$

Тем самым, в этом случае $\mathsf{P}(\tau_{ab} < \infty) = e^{-2ab}$ (ср. (4.12)).

Если же $b < 0$ и $a > 0$, то

$$e^{-ab-|ab|} = 1$$

и $\mathsf{P}(\tau_{ab} < \infty) = 1$, что было также уже установлено в п. 2.

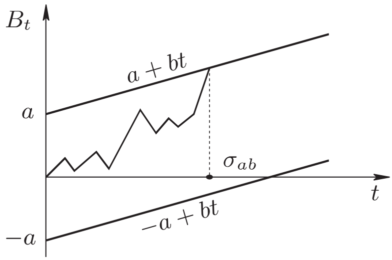
Задачи (в связи с содержанием § 4).

1. Убедитесь в справедливости формулы (4.17).
2. В п. 5 (b) мы доказали формулу для преобразования Лапласа $\mathsf{E}\,e^{-\lambda\tau_{ab}}$ при $b > 0$ с помощью теоремы Гирсанова. Исследуйте аналогичным методом случай $b < 0$.
3. Найдите формулу для $\mathsf{E}\,\tau_{ab}^n$, $n \geqslant 1$, в случае $b < 0$.

# § 5. Свойства момента остановки $\boldsymbol{\sigma_{ab} = \inf\{t \geqslant 0 : |B_t - bt| \geqslant a\}}$, $\boldsymbol{a > 0}$

Основные свойства:

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathsf{P}(\sigma_{ab} < \infty) = 1 \\ &\mathsf{E}\, e^{-\lambda\sigma_{ab}} = \frac{\operatorname{ch}(ab)}{\operatorname{ch}(a\sqrt{2\lambda + b^2}\,)} \\ &\qquad\qquad = 2\operatorname{ch}(ab)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k e^{-(1+2k)a\sqrt{2\lambda+b}} \end{aligned}}$$




Для определенности будем предполагать, что $b > 0$. По аналогии с последним пунктом 5 в § 4, имеем

$$\mathsf{P}(\sigma_{ab} < \infty) = \mathsf{E}\, I(\sigma_{ab} < \infty) = \mathsf{E}\, I(\sigma_a < \infty)\, e^{-bB_{\sigma_a} - \frac{b^2}{2}\sigma_a} = 1, \tag{5.1}$$

где $\sigma_a = \inf\{t \geqslant 0 : |B_t| \geqslant a\}$. Сходным образом,

$$\mathsf{E}\, e^{-\lambda\sigma_{ab}} = \mathsf{E}\, e^{-\lambda\sigma_a}\, e^{-bB_{\sigma_a} - \frac{b^2}{2}\sigma_a} \tag{5.2}$$

и

$$\mathsf{E}\, e^{-\lambda\sigma_{a,-b}} = \mathsf{E}\, e^{-\lambda\sigma_a}\, e^{bB_{\sigma_a} - \frac{b^2}{2}\sigma_a}. \tag{5.3}$$

Отсюда, учитывая, что

$$\operatorname{Law}(\sigma_{ab}) = \operatorname{Law}(\sigma_{a,-b})$$

и что (P-п.н.) $\left(e^{bB_{\sigma_a}} + e^{-bB_{\sigma_a}}\right)/2 = \operatorname{ch}(ab)$, мы получаем из (5.2) и (5.3) соотношение

$$\mathsf{E}\, e^{-\lambda\sigma_{ab}} = \mathsf{E}\, e^{-\sigma_a\left(\lambda+\frac{b^2}{2}\right)} \operatorname{ch}(ab).$$

По формуле (3.4) имеем для $\lambda > 0$

$$\mathsf{E}\, e^{-\lambda\sigma_a} = \frac{1}{\operatorname{ch}(a\sqrt{2\lambda}\,)} = 2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k e^{-(1+2k)a\sqrt{2\lambda}}. \tag{5.4}$$

Следовательно,

$$\mathsf{E}\, e^{-\lambda\sigma_{ab}} = \frac{\operatorname{ch}(ab)}{\operatorname{ch}(a\sqrt{2\lambda+b^2}\,)} \tag{5.5}$$

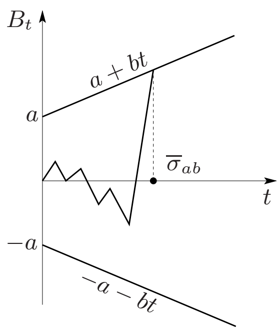
и, значит,

$$\mathsf{E}\, e^{-\lambda\sigma_{ab}} = 2\operatorname{ch}(ab)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k e^{(-1+2k)a\sqrt{2\lambda+b}}. \tag{5.6}$$

Задачи (в связи с содержанием § 5).

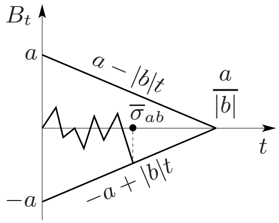
1. Найти формулы (аналогичные формулам для $p_{\sigma_a}(t)$ и $\mathsf{P}(\sigma_a \leqslant t)$ в § 3) для $p_{\sigma_{ab}}(t)$ и $\mathsf{P}(\sigma_{ab} \leqslant t)$.
2. Исследовать распределение момента остановки $\overline{\sigma}_{ab} = \inf\{t \geqslant 0 : |B_t| \geqslant a + bt\}$.

   Случай $b > 0$, $a > 0$ проиллюстрирован на рисунке:




(расходящиеся границы)

Для $b < 0$, $a > 0$ картина такова:




(сходящиеся границы)

Замечание. Случай *расходящихся* границ был изучен в статье [7] также с помощью теоремы о преобразовании свободного выбора. При этом автор этой статьи отмечает, что его метод не работает для *сходящихся* границ. Весьма детальное исследование задач о пересечении границ броуновским движением для наклонных линий было проведено в большой статье [8]. Основные методы этой статьи основаны на принципах отражения и включения/исключения.

# § 6. О распределении $\sup B^\mu$ и $\sup|B^\mu|$ для броуновского движения $B^\mu$ со сносом

**1.** Пусть $B^\mu = (B_t^\mu)_{t\geqslant 0}$ – броуновское движение со сносом: $B_t^\mu = \mu t + B_t$, $t \geqslant 0$, $\mu \in \mathbb{R}$. По определению момента $\tau_{ab} = \inf\{t : B_t \geqslant a + bt\}$ находим, что

$$\{\tau_{ab} > t\} = \Bigl\{\sup_{s\leqslant t}(B_s - bs) < a\Bigr\}. \tag{6.1}$$

Отсюда и из (4.17), полагая $\mu = -b$, получаем, что

$$\mathsf{P}\Bigl(\sup_{s\leqslant t} B_s^\mu \leqslant x\Bigr) = \Phi\biggl(\frac{x-\mu t}{\sqrt{t}}\biggr) - e^{2\mu x}\Phi\biggl(\frac{-x-\mu t}{\sqrt{t}}\biggr) \tag{6.2}$$

и

$$\mathsf{P}\Bigl(\sup_{s\leqslant t}(\sigma B_s + \mu s) \leqslant x\Bigr) = \Phi\biggl(\frac{x-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\biggr) - e^{\frac{2\mu x}{\sigma^2}}\Phi\biggl(\frac{-x-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\biggr). \tag{6.3}$$

Из формулы (6.2) видим, что

(a) если $\mu \geqslant 0$, то

$$\mathsf{P}\Bigl(\sup_{s\geqslant 0} B_s^\mu \leqslant x\Bigr) = 0, \qquad x \geqslant 0;$$

(b) если $\mu < 0$, то

$$\mathsf{P}\Bigl(\sup_{s\geqslant 0} B_s^\mu \leqslant x\Bigr) = 1 - e^{-2|\mu|x}, \tag{6.4}$$

т.е.

$$\sup_{s\geqslant 0} B_s^\mu \overset{\text{law}}{=} \frac{1}{2|\mu|}\,\mathcal{E}, \tag{6.5}$$

где $\mathcal{E}$ – случайная величина со стандартным экспоненциальным распределением ($\mathsf{P}(\mathcal{E} \geqslant t) = e^{-t}$, $t \geqslant 0$).

**2.** Интересно, что результат (6.5) можно также быстро получить из следующего общего утверждения, которое, в свою очередь, является простым следствием теоремы о преобразовании свободного выбора.

Лемма 1. *Пусть* $M = (M_t)_{t \geqslant 0}$ – *неотрицательный непрерывный мартингал такой, что* $M_\infty \equiv \lim_{t\to\infty} M_t = 0$ *с вероятностью единица и* $M_0 = m > 0$ ($m$ – *константа*). *Тогда*

$$\sup_{t\geqslant 0} M_t \overset{\text{law}}{=} \frac{m}{U}, \tag{6.6}$$

*где* $U = U[0,1]$ – *случайная величина, равномерно распределенная на* $[0,1]$.

Доказательство. Положим $\tau_x = \inf\{t \geqslant 0 : M_t \geqslant x\}$, $x > 0$. Тогда по теореме о преобразовании свободного выбора $\mathsf{E}\, M_{t\wedge\tau_x} = m$, и, поскольку $0 \leqslant M_{t\wedge\tau_x} \leqslant x$, по теореме о мажорируемой сходимости находим, что

$$\begin{aligned} m = \lim_{t\to\infty} \mathsf{E}\, M_{t\wedge\tau_x} &= \mathsf{E}\,[I(\tau_x < \infty) M_{\tau_x}] + \mathsf{E}\,[I(\tau_x = \infty) M_\infty] \\ &= x\, \mathsf{P}(\tau_x < \infty) \end{aligned}$$

и, значит, для $x > 0$

$$\mathsf{P}(\tau_x < \infty) = \frac{m}{x}. \tag{6.7}$$

Поскольку $\{\tau_x < \infty\} = \{\sup_{t\geqslant 0} M_t \geqslant x\}$, из (6.7) получаем, что

$$\mathsf{P}\Big(\sup_{t\geqslant 0} M_t \leqslant x\Big) = 1 - \frac{m}{x} = \mathsf{P}\Big(U \geqslant \frac{m}{x}\Big) = \mathsf{P}\Big(\frac{m}{U} \leqslant x\Big),$$

т.е. $\sup_{t\geqslant 0} M_t \overset{\text{law}}{=} m/U$. □

Из этой леммы формулу (6.4) можно получить, используя следующее замечание.

Введем мартингал

$$M_t = e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} t}, \qquad t \geqslant 0,$$

где $\lambda = -2\mu > 0$. Это – непрерывный мартингал с $M_0 = 1$ и $M_\infty = 0$.

Из леммы выводим, что

$$\begin{aligned} \mathsf{P}\Big(\sup_{s\geqslant 0} B_s^\mu \leqslant x\Big) &= \mathsf{P}\Big(\sup_{s\geqslant 0} e^{-2\mu B_s - \frac{(2\mu)^2}{2} s} \leqslant e^{-2\mu}\Big) \\ &= 1 - \frac{1}{e^{-2kx}} = 1 - e^{-2|\mu| x}, \end{aligned}$$

что и есть формула (6.4).

**3.** Теперь мы укажем другой метод отыскания распределения $\sup_{s\leqslant t} B_s^\mu$, $t \geqslant 0$, основанный на применении теоремы Гирсанова и принципа отражения для броуновского движения.

Из (1.34) имеем

$$\mathsf{P}\Big(\sup_{t\leqslant T} B_t^\mu \leqslant x\Big) = \mathsf{E}\, e^{\mu B_T - \frac{\mu^2}{2}T}\, I\Big(\sup_{t\leqslant T} B_t \leqslant x\Big). \tag{6.8}$$

Отсюда видим, что для того чтобы найти распределение $\sup_{t\geqslant T} B_t^\mu$, надо знать *совместное* распределение пары случайных величин $(\sup_{t\leqslant T} B_t,\ B_T)$.

Используя принцип отражения (1.28a), находим, что для $x \geqslant y$

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\Big(\sup_{t\leqslant T} B_t > x, B_T \leqslant y\Big) &= \mathsf{P}(B_T \geqslant 2x-y)\\ &= \mathsf{P}\left(B_1 \geqslant \frac{2x-y}{\sqrt{T}}\right) = \int_{\frac{2x-y}{\sqrt{T}}}^{\infty} \varphi(u)\,du,\end{aligned} \tag{6.9}$$

где $\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$.

Из (6.9) заключаем, что вектор $(\sup_{u\leqslant 1} B_u,\ B_1)$ имеет плотность распределения вероятностей

$$f_{(\sup_{u\leqslant 1} B_u, B_1)}(x,y) = -2\varphi'(2x-y), \quad x \geqslant y \vee 0, \tag{6.10}$$

а $(\sup_{u\leqslant T} B_u,\ B_T)$ имеет плотность

$$f_{(\sup_{u\leqslant T} B_u, B_T)}(x,y) = -2\varphi'\left(\frac{2x-y}{\sqrt{T}}\right), \quad x \geqslant y \vee 0. \tag{6.11}$$

Отсюда следует, что вектор $(\sup_{t\leqslant T} B_t,\ \sup_{t\leqslant T} B_t - B_T)$ имеет плотность распределения вероятностей

$$g_{(\sup_{t\leqslant T} B_t, \sup_{t\leqslant T} B_t - B_T)}(x,y) = -2\varphi'\left(\frac{x+y}{\sqrt{T}}\right), \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0. \tag{6.12}$$

Из этой формулы видим, что случайные величины $\sup_{t\leqslant T} B_t$ и $\sup_{t\leqslant T} B_t - B_T$ имеют *одну и ту же* плотность распределения, равную $2\varphi(x/\sqrt{T}\,)$, которая, очевидно, совпадает с плотностью распределения случайной величины $|B_T|$. Таким образом, для *фиксированного* $T$

$$\sup_{t\leqslant T} B_t \overset{\text{law}}{=} \sup_{t\leqslant T} B_t - B_T \overset{\text{law}}{=} |B_T|.$$

Имея совместную плотность

$$f_{(\sup_{t\leqslant T} B_t, B_T)}(x,y) = -2\varphi'\Bigl(\frac{2x-y}{\sqrt{T}}\Bigr), \quad x \geqslant y \vee 0,$$

из (6.8) непосредственным интегрированием получаем распределение вероятностей случайной величины $\sup_{t\leqslant T} B_t^\mu$:

$$\mathsf{P}\Bigl(\sup_{t\geqslant T} B_t^\mu \leqslant x\Bigr) = \Phi\Bigl(\frac{x-\mu T}{\sqrt{T}}\Bigr) - e^{2\mu x}\Phi\Bigl(\frac{-x-\mu T}{\sqrt{T}}\Bigr). \tag{6.13}$$

Интересно заметить, что для получения этой формулы не обязательно оперировать с “двумерным принципом отражения” (6.9). На самом деле достаточно лишь знать, что формула (6.9) справедлива для $y = x$. Действительно, из (1.34), (1.27) с $y = x$ и свойства $\widetilde{B} \overset{\text{law}}{=} B$, где $\widetilde{B}$ – отраженное броуновское движение (см. (1.22)), следует, что

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\Bigl(\sup_{t\leqslant T} B_t^\mu \leqslant x\Bigr) &= \mathsf{P}(B_T^\mu \leqslant x) - \mathsf{P}\Bigl(\sup_{t\leqslant T} B_t^\mu > x, B_t^\mu \leqslant x\Bigr)\\
&\overset{(1.34)}{=} \Phi\Bigl(\frac{x-\mu T}{\sqrt{T}}\Bigr) - \mathsf{E}\, e^{\mu B_T - \frac{\mu^2}{2}T} I\Bigl(\sup_{t\leqslant T} B_t > x, B_T \leqslant x\Bigr)\\
&\overset{(1.27)}{=} \Phi\Bigl(\frac{x-\mu T}{\sqrt{T}}\Bigr) - \mathsf{E}\, e^{\mu(2x-\widetilde{B}_T) - \frac{\mu^2}{2}T} I(\widetilde{B}_T \geqslant x)\\
&= \Phi\Bigl(\frac{x-\mu T}{\sqrt{T}}\Bigr) - e^{2\mu x}\,\mathsf{E}\, e^{-\mu B_T - \frac{\mu^2}{2}T} I(B_T \geqslant x)\\
&\overset{(1.34)}{=} \Phi\Bigl(\frac{x-\mu T}{\sqrt{T}}\Bigr) - e^{2\mu x}\,\mathsf{E}\, I(B_T^{-\mu} \geqslant x)\\
&= \Phi\Bigl(\frac{x-\mu T}{\sqrt{T}}\Bigr) - e^{2\mu x}\,\mathsf{P}(B_T \geqslant x + \mu T)\\
&= \Phi\Bigl(\frac{x-\mu T}{\sqrt{T}}\Bigr) - e^{2\mu x}\,\mathsf{P}(B_T \leqslant -x - \mu T)\\
&= \Phi\Bigl(\frac{x-\mu T}{\sqrt{T}}\Bigr) - e^{2\mu x}\Phi\Bigl(\frac{-x-\mu T}{\sqrt{T}}\Bigr).
\end{aligned}$$

Задачи (в связи с содержанием § 6).

1. Исследовать распределение момента остановки $\overline{\tau}_{ab} = \inf\{t : |B_t| \geqslant a + bt\}$.
2. Исследовать вопрос о распределении следующих векторных случайных величин:

$$\Bigl(\sup_{t\leqslant T} |B_t|,\ B_T\Bigr), \qquad \Bigl(\sup_{t\leqslant T} |B_t^\mu|,\ B_T^\mu\Bigr)$$

и

$$\Bigl(\sup_{t\leqslant T} B_t,\ \inf_{t\leqslant T} B_t,\ B_T\Bigr), \qquad \Bigl(\sup_{t\leqslant T} B_t^\mu,\ \inf_{t\leqslant T} B_t^\mu,\ B_T^\mu\Bigr).$$

# § 7. О распределении $\sup \widehat{B}$ и $\sup|\widehat{B}|$ для броуновского моста $\widehat{B}$. Критерии Колмогорова и Смирнова

**1.** Совместное распределение вектора $(\sup B,\ B)$ было получено в § 6 на основании принципа отражения (см. (6.9), (6.10)). Сейчас мы укажем другой метод отыскания $\operatorname{Law}(\sup B, B)$, основанный на приводимых ниже соображениях.

Чтобы найти совместное распределение вектора

$$\Bigl(\sup_{s\leqslant 1} B_s, B_1\Bigr),$$

достаточно, конечно, знать *условное распределение*[2] (для $x \geqslant y\vee 0$)

$$\mathsf{P}\Bigl(\sup_{s\leqslant 1} B_s \leqslant x \,\Big|\, B_1 = y\Bigr).$$

Это условное распределение, как нетрудно показать (задача 1), совпадает ($\mathsf{P}^{B_1}$-п.н., где $\mathsf{P}^{B_1}(\,\cdot\,) = \mathsf{P}(B_1 \in \cdot\,)$) с распределением $\mathsf{P}(\sup_{s\leqslant 1} \widehat{B}_s^{0,y} \leqslant x)$, где $\widehat{B}^{0,y} = \bigl(\widehat{B}_s^{0,y}\bigr)_{s\leqslant 1}$ есть броуновский мост (из 0 в $y$):

$$\widehat{B}_s^{0,y} = \widehat{B}_s + sy, \tag{7.1}$$

а $\widehat{B} = (\widehat{B}_s)_{s\leqslant 1}$ – *стандартный* броуновский мост (из 0 в момент времени нуль в 0 в момент времени единица):

$$\widehat{B}_s = B_s - sB_1, \qquad 0 \leqslant s \leqslant 1. \tag{7.2}$$

Из (7.1) и (7.2) мы видим, что

$$\widehat{B}_s^{0,y} = B_s + s(y - B_1). \tag{7.3}$$

Следующее замечание будет играть ключевую роль в наших последующих вычислениях: стандартный броуновский мост $\widehat{B} = (\widehat{B}_s)_{0\leqslant s\leqslant 1}$ можно определить, отправляясь от некоторого броуновского движения $B = (B_s)_{0\leqslant s<\infty}$, по формуле

$$\widehat{B}_s = (1-s)B_{\frac{s}{1-s}} \tag{7.4a}$$

[2] Заметим, что выражение $\mathsf{P}(\sup_{s\leqslant 1} B_s \in A \,|\, B_1 = y)$ есть всего лишь наглядное обозначение для функции $R(A;y)$ такой, что $R(A; B_1(\omega)) = \mathsf{P}(\sup_{s\leqslant 1} B_s \in A \,|\, \mathcal{F}^{B_1})(\omega)$ п.н., где $\mathcal{F}^{B_1}$ есть $\sigma$-алгебра, порожденная случайной величиной $B_1$.

и, аналогично,

$$\widehat{B}^{0,y}_s = \widehat{B}_s + sy = (1-s)B_{\frac{s}{1-s}} + sy, \qquad 0 \leqslant s \leqslant 1. \tag{7.4b}$$

(Для этого достаточно убедиться в том, что ковариационные функции процессов, стоящих в левых и правых частях этих соотношений, совпадают.)

Следовательно (с $t = \frac{s}{s-1}$, $s = \frac{t}{1+t}$, $1-s = \frac{1}{1+t}$), при $x \geqslant y$

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\Big(\sup_{s\leqslant 1} \widehat{B}^{0,y}_s \leqslant x\Big) &= \mathsf{P}\Big(\sup_{s\leqslant 1}\big[(1-s)B_{\frac{s}{1-s}} + sy\big] \leqslant x\Big)\\
&= \mathsf{P}\bigg(\sup_{t\geqslant 0}\bigg[\frac{1}{1+t}B_t + \frac{ty}{1+t}\bigg] \leqslant x\bigg) = \mathsf{P}\bigg(\sup_{t\geqslant 0}\frac{B_t + ty}{1+t} \leqslant x\bigg)\\
&= \mathsf{P}\bigg(\sup_{t\geqslant 0}\frac{t\big(\frac{B_t}{t} + y\big)}{1+t} \leqslant x\bigg) = \mathsf{P}\bigg(\sup_{t\geqslant 0}\frac{\frac{B_t}{t} + y}{\frac{1}{t}+1} \leqslant x\bigg)\\
&= \mathsf{P}\bigg(\sup_{u\geqslant 0}\frac{uB_{1/u} + y}{u+1} \leqslant x\bigg) = \mathsf{P}\bigg(\sup_{u\geqslant 0}\frac{B_u + y}{u+1}\bigg)\\
&= \mathsf{P}\big(B_u + y \leqslant x(1+u) \text{ для всех } u \geqslant 0\big)\\
&= \mathsf{P}\big(B_u + xu \leqslant xy \text{ для всех } u \geqslant 0\big)\\
&= \mathsf{P}\Big(\sup_{u\geqslant 0}(B_u - xu) \leqslant x - y\Big).
\end{aligned} \tag{7.5}$$

Мы знаем из (6.5), что для $x > 0$

$$\sup_{u\geqslant 0}(B_u - xu) \overset{\text{law}}{=} \frac{1}{2x}\,\mathcal{E}, \tag{7.6}$$

где $\mathcal{E}$ – стандартная экспоненциально распределенная случайная величина.

Отсюда и из (7.5) получаем

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\Big(\sup_{s\leqslant 1} \widehat{B}^{0,y}_s \leqslant x\Big) &= \mathsf{P}\Big(\frac{1}{2x}\,\mathcal{E} \leqslant x - y\Big)\\
&= \mathsf{P}\bigg(\frac{1}{2}\,\mathcal{E} \leqslant \Big(x - \frac{y}{2}\Big)^2 - \frac{y^2}{4}\bigg)
\end{aligned} \tag{7.7}$$

и

$$\mathsf{P}\Big(\sup_{s\leqslant 1} \widehat{B}_s \leqslant x\Big) = \mathsf{P}\Big(\frac{1}{2}\mathcal{E} \leqslant x^2\Big) = \mathsf{P}\Big(\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{2}} \leqslant x\Big),$$

т.е.

$$\boxed{\sup_{s\leqslant 1} \widehat{B}_s \overset{\text{law}}{=} \sqrt{\frac{\mathcal{E}}{2}}} \tag{7.8}$$

или, более подробно,

$$\boxed{\mathsf{P}\Big(\sup_{s\leqslant 1} \widehat{B}_s \leqslant x\Big) = 1 - e^{-2x^2}}.$$

В математической статистике распределение для $\sup \widehat{B}$ хорошо известно – это есть распределение в *критерии Смирнова.*

Из (7.7), учитывая, что, как было отмечено выше,

$$\mathsf{P}\Big(\sup_{s\leqslant 1} B_s \leqslant x \,|\, B_1 = y\Big) = \mathsf{P}\Big(\sup_{s\leqslant 1} \widehat{B}_s^{0,y} \leqslant x\Big),$$

находим:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\Big(\sup_{s\leqslant 1} B_s \geqslant x,\ B_1 \leqslant y\Big) \\
&\quad= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} \mathsf{P}\Big(\frac{1}{2}\,\mathcal{E} \geqslant \Big(x - \frac{z}{2}\Big)^2 - \frac{z^2}{4}\Big) e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz \\
&\quad= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-2(x-\frac{z}{2})^2 + \frac{z^2}{2} - \frac{z^2}{2}}\,dz \\
&\quad= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{1}{2}(z-2x)^2}\,dz = \Phi(y-2x).
\end{aligned}$$

Отсюда (для $x \geqslant y \vee 0$)

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\Big(\sup_{s\leqslant 1} B_s \leqslant x,\ B_1 \leqslant y\Big) &= \mathsf{P}(B_1 \leqslant y) - \mathsf{P}\Big(\sup_{s\leqslant 1} B_s \geqslant x,\ B_1 \leqslant y\Big) \\
&= \Phi(y) - \Phi(y-2x),
\end{aligned} \tag{7.9}$$

и, следовательно, совместная плотность вектора $(\sup_{s\leqslant 1} B_s, B_1)$ задается формулой

$$\begin{aligned}
f_{(\sup_{s\leqslant 1} B_s, B_1)}(x,y) &= -\frac{\partial}{\partial x}\,\varphi(y-2x) \\
&= 2\varphi'(y-2x) = -2\varphi'(2x-y),
\end{aligned} \tag{7.10}$$

что совпадает с уже найденной ранее формулой (6.10).

**2.** Как было упомянуто выше, закон распределения $\sup_{s\leqslant 1} \widehat{B}_s$ связан с критерием Смирнова. Распределение для случайной величины $\sup_{s\leqslant 1} |\widehat{B}_s|$ связано с другим статистическим критерием – *критерием согласия Колмогорова*. Покажем, что *распределение Колмогорова*

$$K(x) \equiv \mathsf{P}\Big(\sup_{s\leqslant 1} |\widehat{B}_s| \leqslant x\Big), \qquad x \geqslant 0, \tag{7.11}$$

задается следующей формулой:

$$K(x) = 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} e^{-2k^2x^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k e^{-2k^2x^2}. \tag{7.12}$$

Аналогично (7.5) имеем

$$\mathsf{P}\Big(\sup_{s\leqslant 1} \big|\widehat{B}_s^{0,y}\big| \leqslant x\Big) = \mathsf{P}\bigg(\sup_{u\geqslant 0} \bigg|\frac{B_u + y}{u+1}\bigg| \leqslant x\bigg).$$

В частности, для $y = 0$ находим, что

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\Big(\sup_{s\leqslant 1} |\widehat{B}_s| \leqslant x\Big) &= \mathsf{P}\bigg(\sup_{u\geqslant 0} \frac{|B_u|}{1+u} \leqslant x\bigg)\\ &= \mathsf{P}\big(|B_u| \leqslant x(1+u) \text{ для всех } u \geqslant 0\big).\end{aligned}$$

Следовательно, если

$$\gamma_x = \inf\{t \geqslant 0 : |B_t| \geqslant x(1+t)\}, \tag{7.13}$$

то

$$\mathsf{P}\Big(\sup_{s\leqslant 1} |\widehat{B}_s| \leqslant x\Big) = \mathsf{P}(\gamma_x = \infty). \tag{7.14}$$

Дадим мартингальное доказательство, основанное на теореме о преобразовании свободного выбора, того факта, что

$$\mathsf{P}(\gamma_x = \infty) = K(x), \tag{7.15}$$

где $K(x)$ задается формулой (7.12).

С этой целью рассмотрим мартингал

$$M_t = \frac{e^{\lambda B_t} + e^{-\lambda B_t}}{2}\, e^{-\frac{\lambda^2}{2}t} \quad \Big(= \operatorname{ch}(\lambda B_t)\, e^{-\frac{\lambda^2}{2}t}\Big). \tag{7.16}$$

По определению (7.13) момента $\gamma_x$

$$|B_{t\wedge\gamma_x}| \leqslant x(1 + t\wedge\gamma_x).$$

Учитывая оценку

$$\operatorname{ch} x \leqslant e^x, \qquad x \geqslant 0,$$

получаем

$$M_{t\wedge\gamma_x} \leqslant e^{\left(\lambda x - \frac{\lambda^2}{2}\right)(t\wedge\gamma_x)+\lambda x}.$$

Если $\lambda \geqslant 2x$, то $\lambda x - \lambda^2/2 \leqslant 0$ и

$$0 \leqslant M_{t\wedge\gamma_x} \leqslant e^{\lambda x}.$$

Таким образом, мы можем применить теорему о преобразовании свободного выбора, которая дает

$$\mathsf{E}\, M_{t\wedge\gamma_x} = 1$$

для всех $t \geqslant 0$, и, следовательно,

$$1 = \lim_{t\to\infty} \mathsf{E}\, M_{t\wedge\gamma_x} = \mathsf{E}\left[I(\gamma_x < \infty) \operatorname{ch}(\lambda B_{\gamma_x}) \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{2}\gamma_x} + I(\gamma_x = \infty)\cdot 0\right],$$

т.е. для $\lambda \geqslant 2x$

$$\mathsf{E}\left[I(\gamma_x < \infty) \operatorname{ch}(\lambda B_{\gamma_x}) e^{-\frac{\lambda^2}{2}\gamma_x}\right] = 1$$

или

$$\mathsf{E}\left[I(\gamma_x < \infty)\, e^{\lambda x(1+\gamma_x) - \frac{\lambda^2}{2}\gamma_x}\right] \\ = 2 - \mathsf{E}\left[I(\gamma_x < \infty)\, e^{-\lambda x(1+\gamma-x) - \frac{\lambda^2}{2}\gamma_x}\right]. \tag{7.17}$$

Возьмем здесь $\lambda = 2kx$, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда находим, что

$$\left(\lambda x - \frac{\lambda^2}{2}\right)\gamma_x + \lambda x = 2kx^2(1-k)\gamma_x + 2kx^2$$

и

$$\left(-\lambda x - \frac{\lambda^2}{2}\right)\gamma_x - \lambda x = -2kx^2(1+k)\gamma_x - 2kx^2.$$

Учитывая эти формулы, из (7.17) получаем, что

$$\begin{aligned} a_k &\equiv \mathsf{E}\left[I(\gamma_x < \infty) e^{2k(1-k)x^2\gamma_x}\right] \\ &= 2e^{-2kx^2} - e^{-4kx^2}\, \mathsf{E}\left[I(\gamma_x < \infty)\, e^{-2k(1+k)x^2\gamma_x}\right] \\ &= 2e^{-2kx^2} - e^{-4kx^2} a_{k+1}. \end{aligned}$$

Из этих рекуррентных соотношений следует, что

$$\begin{aligned} a_1 = \mathsf{P}(\gamma_x < \infty) &= 2e^{-2x^2} - e^{-4x^2} a_2 \\ &= 2e^{-2x^2} - 2e^{-8x^2} + e^{-12x^2} a_3 = \cdots . \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathsf{P}(\gamma_x < \infty) = 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} e^{-2k^2x^2}$$

и

$$\begin{aligned} K(x) = \mathsf{P}(\gamma_x = \infty) &= 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} e^{-2k^2x^2} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2x^2}. \end{aligned} \tag{7.18}$$

Замечание 1. В случае $a > 0$, $b > 0$

$$\begin{aligned} &\mathsf{P}\bigl(|B_t| \leqslant at + b \ \text{ для всех } \ t \geqslant 0\bigr) \\ &\qquad = \mathsf{P}\bigl(|B_t| \leqslant \sqrt{ab}\,(1+t) \ \text{ для всех } \ t \geqslant 0\bigr) \\ &\qquad = \mathsf{P}\bigl(\gamma_{\sqrt{ab}} = \infty\bigr). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} &\mathsf{P}\bigl(|B_t| \leqslant at + b \ \text{ для всех } \ t \geqslant 0\bigr) \\ &\qquad = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 ab}. \end{aligned}$$

**3.** Замечание 2. Кай-Лай Чжуном [9] сформулирован интересный вопрос: как увидеть, что функция

$$G(y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-k^2 y}, \qquad y \geqslant 0,$$

является функцией распределения? ($G(y)$ соотносится с $K(x)$ по очевидной формуле $G(2x^2) = K(x)$.) Его ответ на этот вопрос основывался на установленном им же равенстве

$$G(y) = \mathsf{P}\Biggl(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{E}_n}{n^2} \leqslant y\Biggr),$$

где $(\mathcal{E}_n)_{n\geqslant 1}$ – последовательность независимых одинаково экспоненциально распределенных случайных величин.

Задачи (в связи с содержанием § 7).

1. Доказать, что для $x \geqslant y \vee 0$ ($\mathsf{P}^{B_1}$-п.н., где $\mathsf{P}^{B_1}(\,\cdot\,) = \mathsf{P}(B_1 \in \cdot\,)$) справедливо равенство

$$\mathsf{P}\Big(\sup_{s\leqslant 1} B_s \leqslant x \,|\, B_1 = y\Big) = \mathsf{P}\Big(\sup_{s\leqslant 1} \widehat{B}_s^{0,y} \leqslant x\Big).$$

2. Доказать (7.4a) и (7.4b).
3. Сравнить приведенное выше *мартингальное* доказательство формул (7.11) и (7.12) с оригинальным доказательством Колмогорова [10] и доказательством Дуба [11], [12].
4. В дополнение к формулам для $K(x)$ в (7.12) доказать, что справедливо также представление

$$K(x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{x} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-(2k-1)^2 \frac{\pi^2}{x^2}}$$

и что плотность $f_K(x)$ распределения $K = K(x)$ задается формулой

$$f_K(x) = 8x \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k^2 e^{-2k^2 x^2}.$$

# § 8. О фундаментальных тождествах Вальда для броуновского движения

**1.** Следующие три тождества Вальда играют важную роль во многих задачах математической статистики и теории вероятностей.

*Если $B = (B_t)_{t\geqslant 0}$ – броуновское движение и $\tau$ – момент остановки, то*

$$\mathsf{E}\sqrt{\tau} < \infty \;\Rightarrow\; \mathsf{E}\,B_\tau = 0, \tag{8.1}$$

$$\mathsf{E}\,\tau < \infty \;\Rightarrow\; \mathsf{E}\,B_\tau^2 = \mathsf{E}\,\tau \tag{8.2}$$

*и*

$$\mathsf{E}\,e^{\frac{\lambda^2}{2}\tau} < \infty \;\Rightarrow\; \mathsf{E}\,e^{\lambda B_\tau - \frac{\lambda^2}{2}\tau} = 1. \tag{8.3}$$

(Условие $\mathsf{E}\,e^{\frac{\lambda^2}{2}\tau} < \infty$ есть хорошо известное *условие Новикова*, а (8.3) – *критерий Новикова*.)

В разделе C § 1 мы видели, что выполнение условия

$$\mathsf{E}\,e^{\lambda B_\tau - \frac{\lambda^2}{2}\tau} = 1$$

дает возможность построить новую вероятностную меру $\widetilde{\mathsf{P}}$ с $d\widetilde{\mathsf{P}} = Z_\tau(\lambda)\,d\mathsf{P}$, где $Z_\tau(\lambda) = e^{\lambda B_\tau - \frac{\lambda^2}{2}\tau}$, такую, что процесс

$$\tilde{B}_t^\lambda = B_t - \lambda(t\wedge\tau)$$

является броуновским движением.

Стохастическая экспонента

$$Z_t(\lambda) = \mathcal{E}(\lambda)_t = e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t}$$

и ее обобщения для семимартингалов играют чрезвычайно важную роль в общем стохастическом исчислении (см. [4], [5]).

**2.** Мы сосредоточим сейчас наше внимание на доказательстве утверждения (8.3).

Введем следующие три условия:

$$\mathrm{I}\Bigl(\tfrac{1+\varepsilon}{2};\lambda\Bigr): \qquad \mathsf{E}\,e^{\frac{1+\varepsilon}{2}\lambda^2\tau} < \infty,\;\; \varepsilon > 0 \;[5];$$

$$\mathrm{II}\Bigl(\tfrac{1}{2};\lambda\Bigr): \qquad \mathsf{E}\,e^{\frac{1}{2}\lambda^2\tau} < \infty \;[13],\;[14];$$

$$\mathrm{III}\Bigl(\tfrac{1}{2}-;\lambda\Bigr): \qquad \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\varepsilon\ln\mathsf{E}\,e^{(\frac{1}{2}-\varepsilon)\lambda^2\tau} = 0 \;[15],\;[24].$$

Ясно, что

$$\mathrm{I}\big(\tfrac{1+\varepsilon}{2};\lambda\big) \ \Rightarrow\ \mathrm{II}\big(\tfrac{1}{2};\lambda\big) \ \Rightarrow\ \mathrm{III}\big(\tfrac{1}{2}-;\lambda\big),$$

и мы хотим показать, что самое слабое условие $\mathrm{III}\big(\frac{1}{2}-;\lambda\big)$ влечет свойство $\mathsf{E}\, Z_\tau(\lambda) = 1$. Оказывается, что если доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого $\lambda > 0$

$$\mathrm{I}\big(\tfrac{1+\varepsilon}{2};\lambda\big)\colon\ \mathsf{E}\, e^{\frac{1+\varepsilon}{2}\lambda^2\tau} < \infty \quad\Rightarrow\quad \mathsf{E}\, Z_\tau(\lambda) = 1,$$

то тогда легко можно доказать, что

$$\mathrm{II}\big(\tfrac{1}{2};\lambda\big) \ \Rightarrow\ \mathrm{III}\big(\tfrac{1}{2}-;\lambda\big) \ \Rightarrow\ \mathsf{E}\, Z_\tau(\lambda) = 1.$$

Чтобы доказать, что

$$\mathrm{I}\big(\tfrac{1+\varepsilon}{2};\lambda\big) \ \Rightarrow\ \mathsf{E}\, Z_\tau(\lambda) = 1, \tag{8.4}$$

достаточно проверить, что для некоторого $\delta > 0$

$$\sup_t \mathsf{E}\,(Z_{t\wedge\tau}(\lambda))^{1+\delta} < \infty, \tag{8.5}$$

поскольку это условие (8.5) влечет равномерную интегрируемость семейства $\{Z_{t\wedge\tau}(\lambda),\ t \geqslant 0\}$, обеспечивающую требуемое равенство $\mathsf{E}\, Z_\tau(\lambda) = 1$.

Чтобы доказать (8.5), запишем $(Z_t(\lambda))^{1+\delta}$ в следующем виде:

$$(Z_t(\lambda))^{1+\delta} = \Psi_t^{(1)} \cdot \Psi_t^{(2)} = e^{(1+\delta)B_t - \frac{p(1+\delta)^2}{2}t} \cdot e^{\frac{p(1+\delta)^2}{2} - \frac{1+\delta}{2}t}. \tag{8.6}$$

Возьмем $p = 1+\varepsilon$, $q = \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}$. Тогда по неравенству Гёльдера

$$\mathsf{E}\,(Z_t(\lambda))^{1+\delta} \leqslant \big[\mathsf{E}\big(\Psi_t^{(1)}\big)^p\big]^{1/p} \cdot \big[\mathsf{E}\big(\Psi_t^{(2)}\big)^q\big]^{1/q} = 1 \cdot \big[\mathsf{E}\big(\Psi_t^{(2)}\big)^q\big]^{1/q}.$$

Выберем теперь $\delta > 0$ такое, что для данного $0 < \varepsilon < 1$

$$\delta(1+\varepsilon) \leqslant \frac{\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)(1+2\varepsilon)}.$$

Тогда

$$\big(\Psi_t^{(2)}\big)^q \leqslant e^{(\frac{1}{2}+\varepsilon)t}.$$

Следовательно,

$$\mathsf{E}\big(Z_{t\wedge\tau}(\lambda)\big)^{1+\delta} \leqslant \mathsf{E}\, e^{(\frac{1}{2}+\varepsilon)\tau} < \infty$$

и, значит, $1 = \lim_{t\to\infty} \mathsf{E}\, Z_{t\wedge\tau}(\lambda) = \mathsf{E}\, Z_\tau(\lambda)$.

Покажем теперь, что

$$\mathrm{II}\left(\tfrac{1}{2};\lambda\right):\ \mathsf{E}\, e^{\frac{\lambda^2}{2}\tau}<\infty \quad\Rightarrow\quad \mathsf{E}\, Z_\tau(\lambda)=1.$$

Возьмем $0<\varepsilon<1$ и $\lambda_\varepsilon=(1-\varepsilon)\lambda$. Для такого $\lambda_\varepsilon$

$$\mathsf{E}\, e^{\frac{1+\varepsilon}{2}\lambda_\varepsilon^2\tau}=\mathsf{E}\, e^{\frac{(1+\varepsilon)(1-\varepsilon)^2\lambda^2}{2}\tau}\leqslant \mathsf{E}\, e^{\frac{\lambda^2}{2}\tau}<\infty.$$

Тогда из (8.4), применяя неравенство Гёльдера с $1/p=1-\varepsilon$, $1/q=\varepsilon$, получаем

$$\begin{aligned}1&=\mathsf{E}\, Z_\tau(\lambda_\varepsilon)=\mathsf{E}\, Z_\tau((1-\varepsilon)\lambda)=\mathsf{E}\, e^{\lambda(1-\varepsilon)B_\tau-\frac{\lambda^2(1-\varepsilon)^2}{2}\tau}\\ &=\mathsf{E}\, e^{(1-\varepsilon)\left(\lambda B_\tau-\frac{\lambda^2}{2}\tau\right)}e^{\frac{(1-\varepsilon)\varepsilon\lambda^2\tau}{2}}\leqslant\left[\mathsf{E}\, Z_\tau(\lambda)\right]^{1-\varepsilon}\left[\mathsf{E}\, e^{(1-\varepsilon)\frac{\lambda^2}{2}\tau}\right]^{\varepsilon}\\ &\leqslant\left[\mathsf{E}\, Z_\tau(\lambda)\right]^{1-\varepsilon}\left[\mathsf{E}\, e^{\frac{\lambda^2}{2}\tau}\right]^{\varepsilon}.\end{aligned}\tag{8.7}$$

Если $\mathsf{E}\, e^{\frac{\lambda^2}{2}\tau}<\infty$, то из (8.7) предельным переходом при $\varepsilon\downarrow 0$ получаем, что $\mathsf{E}\, Z_\tau(\lambda)\geqslant 1$. Но, очевидно, $\mathsf{E}\, Z_\tau(\lambda)\leqslant 1$. Поэтому $\mathsf{E}\, Z_\tau(\lambda)=1$.

Чтобы доказать, наконец, импликацию

$$\mathrm{III}\left(\tfrac{1}{2}-;\lambda\right):\ \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\varepsilon\ln\mathsf{E}\, e^{\frac{1-\varepsilon}{2}\lambda^2\tau}=0\quad\Rightarrow\quad \mathsf{E}\, Z_\tau(\lambda)=1,\tag{8.8}$$

достаточно заметить, что из соотношения

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\varepsilon\ln\mathsf{E}\, e^{\frac{(1-\varepsilon)\lambda^2}{2}\tau}=0$$

или эквивалентного ему равенства

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left[\mathsf{E}\, e^{\frac{(1-\varepsilon)\lambda^2}{2}\tau}\right]^{\varepsilon}=1$$

следует, что для достаточно малых $\varepsilon>0$

$$\mathsf{E}\, e^{\frac{(1-\varepsilon)\lambda^2}{2}\tau}<\infty.$$

Отсюда для $\lambda_\varepsilon=(1-\varepsilon)\lambda$ получаем

$$\mathsf{E}\, e^{\frac{1+\varepsilon}{2}\lambda_\varepsilon^2\tau}=\mathsf{E}\, e^{\frac{(1+\varepsilon)(1-\varepsilon)^2\lambda^2}{2}\tau}=\mathsf{E}\, e^{\frac{(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2)}{2}\tau}<\infty.$$

Тем самым, мы можем использовать критерий $\mathrm{I}\big(\frac{1+\varepsilon}{2};\lambda_\varepsilon\big)$, который в силу (8.7) дает неравенство

$$1 \leqslant \Big[\mathsf{E}\, Z_\tau(\lambda)\Big]^{1-\varepsilon}\Big[\mathsf{E}\, e^{(1-\varepsilon)\frac{\lambda^2}{2}\tau}\Big]^{\varepsilon}. \tag{8.9}$$

Переходя здесь к пределу при $\varepsilon \downarrow 0$ и пользуясь свойством $\mathrm{III}\,\big(\frac{1}{2}-;\lambda\big)$: $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\varepsilon \ln \mathsf{E}\, e^{(1-\varepsilon)\frac{\lambda^2}{2}\tau} = 0$, находим, что $1 \geqslant \mathsf{E}\, Z_\tau(\lambda)$. Вместе с очевидным неравенством $\mathsf{E}\, Z_\tau(\lambda) \leqslant 1$ это дает требуемое *равенство* $\mathsf{E}\, Z_\tau(\lambda) = 1$.

**3.** Во многих случаях (наряду с установленными критериями I, II и III) оказывается полезным *критерий Казамаки* (см., например, [16]):

$$\sup_{t\geqslant 0}\mathsf{E}\, e^{\frac{1}{2}B_{t\wedge\tau}} < \infty \quad\Rightarrow\quad \mathsf{E}\, e^{B_\tau-\frac{\tau}{2}} = 1. \tag{8.10}$$

Например, для $\tau = \tau_a$, где критерий Новикова (II) не работает (поскольку здесь $\mathsf{E}\, e^{\frac{1}{2}\tau_a} = \infty$), критерий Казамаки применим, поскольку, очевидно, $\mathsf{E}\, e^{\frac{1}{2}B_{t\wedge\tau_a}} \leqslant e^{\frac{a}{2}} < \infty$ для всех $t \geqslant 0$.

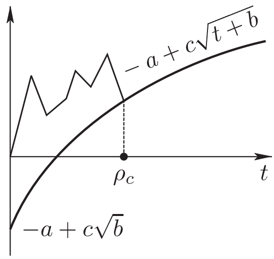
Задачи (в связи с содержанием § 8).

1. Дать доказательство первого (8.1) и второго (8.2) тождеств Вальда.
2. Доказать, что процесс $\widetilde{B}^\lambda = (\widetilde{B}^\lambda_t)_{t\geqslant 0}$ с $\widetilde{B}^\lambda_t = B_t - \lambda(t\wedge\tau)$ является броуновским движением относительно меры $\widetilde{\mathsf{P}}$, где $d\widetilde{\mathsf{P}} = Z_\tau(\lambda)\, d\mathsf{P}$.
3. Доказать (используя общую формулу Ито для семимартингалов), что стохастическая экспонента $\mathcal{E} = (\mathcal{E}(X)_t)_{t\geqslant 0}$ удовлетворяет уравнению
$$d\mathcal{E}(X)_t = \mathcal{E}(X)_{t-}\, dX_t.$$
(Определение стохастической экспоненты $\mathcal{E} = (\mathcal{E}(X)_t)_{t\geqslant 0}$ и формулу Ито для семимартингалов можно найти, например, в [4], [5].)
4. Проанализировать доказательства критерия Новикова (8.3), приведенные в книгах [3], [5].
5. Доказать критерий Казамаки (8.10).
6. Доказать, что
$$\mathsf{E}\, e^{\frac{1}{2}B_{t\wedge\tau}} \leqslant \big[\mathsf{E}\, e^{\frac{1}{2}\tau}\big]^2.$$
(Отсюда, следует, в частности, что критерий Казамаки слабее критерия Новикова.)

## § 9. Свойства момента остановки $\rho_c = \inf\{t \geqslant 0 : B_t \leqslant -a + c\sqrt{t+b}\}$, где $b \geqslant 0$, $a > c\sqrt{b}$

Основные свойства:

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathsf{P}(\rho_c < \infty) = 1 \\ &\mathsf{E}\,(\rho_c + b)^{\nu} = \frac{H_\nu(a/\sqrt{b}\,)\, b^{\nu}}{H_\nu(c)} \\ &\qquad\qquad = \frac{D_{2\nu}(-a/\sqrt{b}\,)\, b^{\nu}\, e^{\frac{a^2-c^2b}{4b}}}{D_{2\nu}(-c)} \\ &\operatorname{Re}\nu < \nu(c) \end{aligned}}$$




Здесь

$$\begin{aligned} H_\nu(z) &\equiv \int_0^\infty e^{zt - \frac{t^2}{2}}\, t^{-2\nu-1}\, dt \\ &= D_{2\nu}(-z) e^{\frac{z^2}{4}} \Gamma(-2\nu), \qquad \operatorname{Re}\nu < 0, \end{aligned} \tag{9.1}$$

$D_\nu(z)$ есть функция параболического цилиндра порядка $\nu$ (см. [7, 9.241.2]) и $\nu(c)$ – первый положительный нуль функции $D_{2\nu}(-c)$.

Очевидно, что $\rho_c \leqslant \tau_c$ и поэтому $\mathsf{P}(\rho_c < \infty) = 1$. Для $\lambda > 0$ мы также имеем, что $1 \geqslant \mathsf{E}\, e^{\lambda B_{\rho_c} - \frac{\lambda^2}{2}\rho_c} \geqslant \mathsf{E}\, e^{\lambda B_{\tau_c} - \frac{\lambda^2}{2}\tau_c} = 1$. Следовательно,

$$\mathsf{E}\, e^{\lambda B_{\rho_c} - \frac{\lambda^2}{2}\rho_c} = 1.$$

Отсюда, учитывая, что $\rho_c < \infty$ ($\mathsf{P}$-п.н.), получаем

$$\mathsf{E}\, e^{\lambda(-a + c\sqrt{\rho_c + b}\,) - \frac{\lambda^2}{2}\rho_c} = 1$$

или

$$\mathsf{E}\, e^{\lambda c\sqrt{\rho_c + b} - \frac{\lambda^2}{2}(\rho_c + b)} = e^{a\lambda - \frac{\lambda^2}{2} b}.$$

Умножая обе части последнего равенства на $\lambda^{-2\nu-1}$, $\operatorname{Re}\nu < 0$, и интегрируя по $d\lambda$, находим, что

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \mathsf{E}\, e^{\lambda c\sqrt{\rho_c + b} - \frac{\lambda^2}{2}(\rho_c + b)} \cdot \lambda^{-2\nu-1}\, d\lambda \\ &\qquad = \int_0^\infty e^{a\lambda - \frac{\lambda^2}{2}} \cdot \lambda^{-2\nu-1}\, d\lambda = H_\nu\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right) b^{-\nu}, \end{aligned} \tag{9.2}$$

где $H_\nu(z)$ определено в (9.1).

После замены переменных в первом интеграле в (9.2) получаем

$$H_\nu(c)\,\mathsf{E}\,(\rho_c+b)^\nu = H_\nu\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right) b^\nu.$$

Отсюда следует, что

$$\mathsf{E}\,(\rho_c+b)^\nu = \frac{H_\nu(a/\sqrt{b}\,)\,b^\nu}{H_\nu(c)}, \tag{9.3}$$

или (см. (9.1))

$$\mathsf{E}\,(\rho_c+b)^\nu = \frac{D_{2\nu}(-a/\sqrt{b}\,)\,b^\nu e^{\frac{a^2-c^2b}{4b}}}{D_{2\nu}(-c)} \tag{9.4}$$

для всех $\nu$ таких, что $\operatorname{Re}\nu < 0$. С помощью аналитического продолжения или используя функциональное соотношение

$$-\,2\nu H_\nu(z) \equiv \int_0^\infty e^{zt-t^2/2}(t-z)t^{-2\nu}\,dt = H_{\nu-1}(z) - zH_{\nu-1/2}(z), \tag{9.5}$$

устанавливаем, что эта формула остается справедливой для всех $\nu$ с $\operatorname{Re}\nu < \nu(c)$.

Более деликатный анализ показывает, что

$$\mathsf{P}(\rho_c > t) \sim \frac{\text{const}}{t^{\nu(c)}}, \qquad t\to\infty, \tag{9.6}$$

где $\nu(c)$ – непрерывная монотонная функция такая, что

$$\nu(-\infty)=0, \quad \nu(0)=\frac{1}{2}, \quad \nu(1)=1, \quad \nu(\infty)=\infty. \tag{9.7}$$

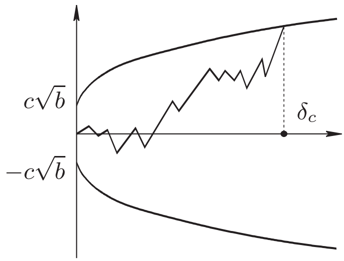
Задачи (в связи с содержанием § 9).

1. Доказать формулу (9.3) и (9.5).
2. Обосновать асимптотическое выражение (9.6).
3. Доказать непрерывность и монотонность функции $\nu(c)$ и установить свойства (9.7).
4. Ознакомиться со статьями [30], [31] и [14], посвященными исследованию свойств моментов $\rho_c$, и сравнить приведенные там доказательства свойства (9.4) с доказательством, данным в настоящем параграфе.

# § 10. Свойства момента остановки $\boldsymbol{\delta_c = \inf\{t \geqslant 0 : |B_t| \geqslant c\sqrt{t+b}\}, \; b > 0}$

Основные свойства:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathsf{E}\,(\delta_c + b)^\nu &= \frac{b^\nu H_\nu(0)}{\frac{1}{2}\big(H_\nu(c) + H_\nu(-c)\big)} \\ &= \frac{2b^\nu e^{-c^2/4}}{D_{2\nu}(-c) + D_{2\nu}(c)} \\ \operatorname{Re}\nu &< \nu^*(c) \end{aligned}}$$




Здесь $\nu^*(c)$ – первый положительный корень уравнения $D_{2\nu}(-c) + D_{2\nu}(c) = 0$ (функции $H_\nu$ и $D_{2\nu}$ определены в § 9).

Согласно определению (9.1),

$$H_\nu(z) = \int_0^\infty e^{zt - \frac{t^2}{2}} t^{-2\nu-1}\, dt. \tag{10.1}$$

Используя второе равенство в (9.1), получаем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \operatorname{ch}(zt) e^{-\frac{t^2}{2}} t^{-2-\nu-1}\, dt &= \frac{1}{2}\big(H_\nu(z) + H_\nu(-z)\big) \\ &= \frac{1}{2}\big(D_{2\nu}(z) + D_{2\nu}(-z)\big) e^{\frac{z^2}{4}} \Gamma(-2\nu), \quad \operatorname{Re}\nu < 0. \end{aligned} \tag{10.2}$$

Аналогично случаю, рассмотренному в § 9 для момента остановки $\rho_c$, получаем что для $\lambda \geqslant 0$

$$\mathsf{E}\, \operatorname{ch}(\lambda\delta_c) e^{-\frac{\lambda^2}{2}\delta_c} = 1. \tag{10.3}$$

Тот же метод (умножения обеих частей на $\lambda^{-2\nu-1}$, $\operatorname{Re}\nu < 0$, и интегрирования по $d\lambda$), что и в § 9, приводит к следующему выражению (ср. (9.3)):

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(\delta_a + b)^\nu &= \frac{H_\nu(0) b^\nu}{\frac{1}{2}(H_\nu(c) + H_\nu(-c))} \\ &= \frac{2b^\nu e^{-c^2/4}}{D_{2\nu}(c) + D_{2\nu}(-c)}, \quad \operatorname{Re}\nu < \nu^*(c), \end{aligned} \tag{10.4}$$

где $\nu^*(c)$ – первый положительный корень уравнения $D_{2\nu}(c) + D_{2\nu}(-c) = 0$.

Функция $\nu^* = \nu^*(c)$ непрерывна и монотонна и

$$\nu^*(0) = \infty, \quad \nu^*(1) = 1, \quad \nu^*(\infty) = 0. \tag{10.5}$$

Можно показать, что

$$\mathsf{P}(\delta_c > t) \sim \frac{\text{const}}{t^{\nu^*(c)}}, \qquad t \to \infty. \tag{10.6}$$

Задачи (в связи с содержанием § 10).

1. Дать во всех подробностях доказательство формул (10.3), (10.4).
2. Доказать формулы (10.5) и (10.6).
3. Используя технику, примененную при изучении моментов $\rho_c$ (§ 9) и $\delta_c$ (настоящий § 10), исследовать момент остановки

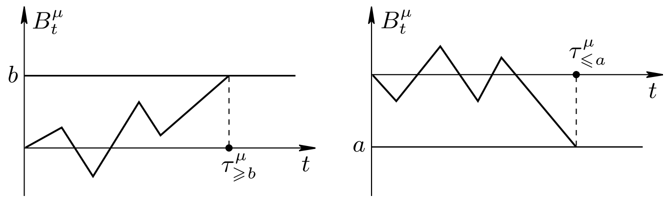
$$\Delta_c = \inf\bigl\{0 \leqslant t \leqslant 1 : |B_t| \geqslant c\sqrt{1-t}\bigr\}.$$

4. Ознакомиться с [32] и [14], где изучались свойства момента $\delta_c$.

# § 11. Свойства моментов остановки $\tau^\mu_{\geqslant b} = \inf\{t \geqslant 0 : B^\mu_t \geqslant b\}$, $\tau^\mu_{\leqslant a} = \inf\{t \geqslant 0 : B^\mu_t \leqslant a\}$ и $\tau^\mu_{a,b} = \tau^\mu_{\leqslant a} \wedge \tau^\mu_{\geqslant b}$, где $a < 0 < b$

Основные свойства ($\mu \geqslant 0$):

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathsf{P}(\tau^\mu_{\leqslant a} < \tau^\mu_{\geqslant b}) = \mathsf{P}(\tau^\mu_{a,b} = \tau^\mu_{\leqslant a}) = \frac{1 - e^{-2\mu b}}{e^{-2\mu a} - e^{-2\mu b}} \\ &\mathsf{P}(\tau^\mu_{\geqslant b} < \tau^\mu_{\leqslant a}) = \mathsf{P}(\tau^\mu_{a,b} = \tau^\mu_{\geqslant b}) = \frac{e^{-2\mu a} - 1}{e^{-2\mu a} - e^{-2\mu b}} \\ &\mathsf{E}\, e^{-\lambda \tau^\mu_{a,b}} = \frac{e^{\mu b}\operatorname{sh}(-a\sqrt{\mu^2 + 2\lambda}\,) + e^{\mu a}\operatorname{sh}(b\sqrt{b^2 + 2\lambda}\,)}{\operatorname{sh}[(b-a)\sqrt{\mu^2 + 2\lambda}\,]} \end{aligned}}$$




**1.** В § 2 для случая $\mu = 0$ было показано, что

$$\mathsf{P}(\tau^0_{\leqslant a} < \tau^0_{\geqslant b}) = \mathsf{P}(\tau^0_{a,b} = \tau^0_{\leqslant a}) = \frac{b}{b-a} \tag{11.1}$$

и

$$\mathsf{P}(\tau^0_{\geqslant b} < \tau^0_{\leqslant a}) = \mathsf{P}(\tau^0_{a,b} = \tau^0_{\geqslant b}) = \frac{|a|}{b-a} \tag{11.2}$$

(см. формулы (2.15) и (2.16), где $\tau_a = \tau^0_{\leqslant a}$ и $\tau_b = \tau^0_{\geqslant b}$).

Чтобы доказать соответствующие формулы для $\mathsf{P}(\tau^\mu_{\leqslant a} < \tau^\mu_{\geqslant b})$ и $\mathsf{P}(\tau^\mu_{\geqslant b} < \tau^\mu_{\leqslant a})$, рассмотрим мартингал

$$M_t = e^{\lambda(B^\mu_t - \mu t) - \frac{\lambda^2}{2} t}, \qquad t \geqslant 0. \tag{11.3}$$

Положим $\lambda = -2\mu$. Тогда

$$M_t = e^{-2\mu B^\mu_t}, \qquad t \geqslant 0.$$

Здесь $0 \leqslant M_{t\wedge\tau^\mu_{a,b}} \leqslant e^{2\mu a}$ для всех $t \geqslant 0$. По теореме о преобразовании свободного выбора,

$$\mathsf{E}\, M_{\tau^\mu_{a,b}} = 1. \tag{11.4}$$

Обозначим

$$B = \{\tau^\mu_{a,b} = \tau^\mu_{\geqslant b}\}, \quad A = \{\tau^\mu_{a,b} = \tau^\mu_{\leqslant a}\}.$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) = 1. \tag{11.5}$$

Тогда из (11.4) находим

$$1 = \mathsf{P}(B)e^{-2\mu b} + (1 - \mathsf{P}(B))e^{-2\mu a},$$

что дает для $\mathsf{P}(\tau^\mu_{\leqslant a} < \tau^\mu_{\geqslant b}) = \mathsf{P}(A)$ и $\mathsf{P}(\tau^\mu_{\geqslant b} < \tau^\mu_{\leqslant a}) = \mathsf{P}(B)$ следующие формулы:

$$\mathsf{P}\big(\tau^\mu_{\leqslant a} < \tau^\mu_{\geqslant b}\big) = \frac{1 - e^{-2\mu b}}{e^{-2\mu a} - e^{-2\mu b}} \tag{11.6}$$

и

$$\mathsf{P}\big(\tau^\mu_{\geqslant b} < \tau^\mu_{\leqslant a}\big) = \frac{e^{-2\mu a} - 1}{e^{-2\mu a} - e^{-2\mu b}}. \tag{11.7}$$

Заметим, что эти формулы могут быть записаны также в следующем виде:

$$\mathsf{P}\big(\tau^\mu_{\leqslant a} < \tau^\mu_{\geqslant b}\big) = e^{\mu a}\frac{\operatorname{sh}(b\mu)}{\operatorname{sh}[(b-a)\mu]} \tag{11.8}$$

и

$$\mathsf{P}\big(\tau^\mu_{\geqslant b} < \tau^\mu_{\leqslant a}\big) = e^{\mu b}\frac{\operatorname{sh}(-a\mu)}{\operatorname{sh}[(b-a)\mu]}, \tag{11.9}$$

где $\operatorname{sh}(x) = (e^x - e^{-x})/2$.

**2.** Рассмотрим сейчас преобразование Лапласа для величин $\tau^\mu_{\leqslant a}$, $\tau^\mu_{\geqslant b}$ и $\tau^\mu_{a,b} = \tau^\mu_{\leqslant a} \wedge \tau^\mu_{\geqslant b}$. Из (11.4) следует, что для любого $\lambda \geqslant 0$ и $\tau = \tau^\mu_{a,b}$

$$\mathsf{E}\, e^{\lambda(B^\mu_\tau - \mu\tau) - \frac{\lambda^2}{2}\tau} = 1 \tag{11.10}$$

и

$$\mathsf{E}\, e^{-\lambda(B^\mu_\tau - \mu\tau) - \frac{\lambda^2}{2}\tau} = 1. \tag{11.11}$$

Отсюда получаем

$$\mathsf{E}\Big[e^{\lambda b-\tau(\lambda\mu+\frac{\lambda^2}{2})}; B\Big] + \mathsf{E}\Big[e^{\lambda a-\tau(\lambda\mu+\frac{\lambda^2}{2})}; A\Big] = 1 \tag{11.12}$$

и

$$\mathsf{E}\Big[e^{\lambda b-\tau(-\lambda\mu+\frac{\lambda^2}{2})}; B\Big] + \mathsf{E}\Big[e^{-\lambda a-\tau(-\lambda\mu+\frac{\lambda^2}{2})}; A\Big] = 1. \tag{11.13}$$

Для фиксированного $\theta > 0$ выберем $\lambda > 0$ так, чтобы выполнялось равенство $\lambda\mu+\lambda^2/2 = \theta$. Ясно, что $\lambda = -\mu+\sqrt{\mu^2+2\theta}$. Тогда из (11.12) получаем, что

$$e^{b(-\mu+\sqrt{\mu^2+2\theta}\,)}\,\mathsf{E}\,(e^{-\theta\tau}; B) + e^{a(-\mu+\sqrt{\mu^2+2\theta}\,)}\,\mathsf{E}\,(e^{-\theta\tau}; A) = 1. \tag{11.14}$$

Аналогичным образом, в (11.13) возьмем $\lambda > 0$ такое, что (для фиксированного $\theta > 0$) $-\lambda\mu + \lambda^2/2 = \theta$. Решая это квадратное уравнение, видим, что $\lambda$ должно определять равенством $\lambda = \mu + \sqrt{\mu^2+2\theta}$. Таким образом, из (11.13) получаем

$$e^{b(\mu+\sqrt{\mu^2+2\theta}\,)}\,\mathsf{E}\,(e^{-\theta\tau}; B) + e^{a(\mu+\sqrt{\mu^2+2\theta}\,)}\,\mathsf{E}\,(e^{-\theta\tau}; A) = 1. \tag{11.15}$$

Из уравнений (11.14) и (11.15) находим $\mathsf{E}\,(e^{-\theta\tau}; B)$ и $\mathsf{E}\,(e^{-\theta\tau}; A)$:

$$\mathsf{E}\,(e^{-\theta\,\tau}; B) = \mathsf{E}(e^{-\theta\,\tau^{\mu}_{\geqslant b}}; B) = e^{\mu b}\,\frac{\operatorname{sh}\big[-a\sqrt{\mu^2+2\theta}\,\big]}{\operatorname{sh}\big[(b-a)\sqrt{\mu^2+2\theta}\,\big]} \tag{11.16}$$

и

$$\mathsf{E}\,(e^{-\theta\,\tau}; A) = \mathsf{E}\,(e^{-\theta\,\tau^{\mu}_{\leqslant a}}; A) = e^{\mu a}\,\frac{\operatorname{sh}\big[b\sqrt{\mu^2+2\theta}\,\big]}{\operatorname{sh}\big[(b-a)\sqrt{\mu^2+2\theta}\,\big]}. \tag{11.17}$$

Из этих формул, в свою очередь, следует (в силу определения множеств $A$ и $B$ и формул (11.8) и (11.9)), что

$$\mathsf{E}\,e^{-\theta\,\tau^{\mu}_{a,b}} = \frac{e^{\mu b}\operatorname{sh}\big[-a\sqrt{\mu^2+2\theta}\,\big] + e^{\mu a}\operatorname{sh}\big[b\sqrt{\mu^2+2\theta}\,\big]}{\operatorname{sh}\big[(b-a)\sqrt{\mu^2+2\theta}\,\big]}, \tag{11.18}$$

что и есть требуемая формула (с $\theta$ вместо $\lambda$).

**3.** Рассмотрим частный случай полученных формул с $a = -b$, $b > 0$. Из (11.18) имеем

$$\mathsf{E}\,e^{-\theta\,\tau^{\mu}_{-b,b}} = \frac{\big[e^{\mu b}+e^{-\mu b}\big]\operatorname{sh}\big[b\sqrt{\mu^2+2\theta}\,\big]}{\operatorname{sh}\big[2b\sqrt{\mu^2+2\theta}\,\big]}. \tag{11.19}$$

Поскольку $\operatorname{sh}(2x) = 2\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(x)$, то

$$\mathsf{E}\, e^{-\theta\, \tau^{\mu}_{-b,b}} = \frac{\operatorname{ch}(\mu b)}{\operatorname{ch}\bigl[b\sqrt{\mu^2+2\theta}\,\bigr]}. \tag{11.20}$$

Отметим, что эта формула была получена ранее в § 5, где мы рассматривали момент остановки $\sigma_{ab} = \inf\{t \geqslant 0 : |B_t - bt| \geqslant a\}$. В самом деле, согласно (5.5) (с $\lambda = \theta$),

$$\mathsf{E}\, e^{-\theta\, \sigma_{ab}} = \frac{\operatorname{ch}(ab)}{\operatorname{ch}\bigl[a\sqrt{b^2+2\theta}\,\bigr]}. \tag{11.21}$$

Но если взять здесь $a = b$, $-b = \mu$, то мы получим

$$\sigma_{ab} = \sigma_{b,-\mu} = \tau^{\mu}_{-b,b}.$$

Таким образом, для $a = b$, $-b = \mu$ из (11.21) находим представление

$$\mathsf{E}\, e^{-\theta\, \sigma_{ab}} = \frac{\operatorname{ch}(\mu b)}{\operatorname{ch}\bigl[b\sqrt{\mu^2+2\theta}\,\bigr]}, \tag{11.22}$$

что совпадает с (11.20).

Задачи (в связи с содержанием § 11).

1. Доказать справедливость соотношения (11.5).
2. Восстановить детали доказательств соотношений (11.16) и (11.17).
3. Используя формулу (11.9), показать, что если $a$ фиксировано ($a < 0$) и $b \uparrow \infty$, то для $\mu > 0$

$$\lim_{b\uparrow\infty} \mathsf{P}\Bigl(\tau^{\mu}_{\leqslant a} < \tau^{\mu}_{\geqslant b}\Bigr) = \mathsf{P}\Bigl(\inf_{t\geqslant 0} B^{\mu}_t < a\Bigr) = e^{-2\mu|a|}.$$

   Сравнить эту формулу с формулой (6.4).
4. Дать формулу для $\mathsf{E}\,\tau^{\mu}_{a,b}$.

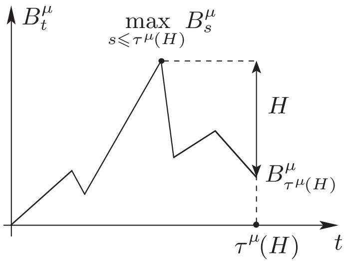
# § 12. Свойства момента остановки $\tau^\mu(H) = \inf\{t \geqslant 0 : \max_{s\leqslant t} B_s^\mu - B_t^\mu \geqslant H\}$ (связанного с падением $B^\mu$ на величину $H$, $H > 0$)

Основные свойства:

Для $\mu = 0$:

$\mathsf{E}\,\tau^0(H) = H^2$,

$\mathsf{E}\,e^{-\lambda\tau^0(H)} = \dfrac{1}{\operatorname{ch}(H\sqrt{2\lambda})}$, $\lambda \geqslant 0$




Для $\mu \neq 0$:

$\mathsf{E}\,\tau^\mu(H) = \dfrac{1}{2\mu^2}(e^{2\mu H} - 1 - 2\mu H)$,

$\mathsf{E}\,e^{-\lambda\tau^\mu(H)} = \dfrac{e^{-\mu H}}{\operatorname{ch}(\Delta\cdot H) - \frac{\mu}{\Delta}\operatorname{sh}(\Delta\cdot H)}$, $\Delta = \sqrt{\mu^2 + 2\lambda}$, $\lambda \geqslant 0$

**1.** Момент остановки $\tau^\mu(H)$ – это момент первого падения (drawdown, downfall, ...) на величину $H$. В финансовой математике и финансовой инженерии *падение* на интервале $[0, t]$ определяется как изменение стоимости активов

– от достигнутого в прошлом пика до настоящего значения,
– от наивысшего уровня до наинизшего.

Момент $\tau^\mu(H)$ можно рассматривать как статистическую меру *риска* инвестирования в качестве альтернативы стандартным мерам риска, таким как вероятность возврата, V@R, Sharpe ratio и т.д. (см. [29]).

**2.** Случай $\mu = 0$ относительно прост для изучения, поскольку в силу (одномерной) *теоремы Леви* (о совместном распределении $B$ и $\sup B$; см. формулу (1.51) в § 1, раздел D)

$$\max B - B \overset{\text{law}}{=} |B|,$$

т.е. $\mathrm{Law}(\max_{s\leqslant t} B_s - B_t;\ t \geqslant 0) = \mathrm{Law}(|B_t|;\ t \geqslant 0)$. Отсюда имеем

$$\mathrm{Law}(\tau^0(H)) = \mathrm{Law}(\sigma_H), \tag{12.1}$$

где $\sigma_H = \inf\{t \geqslant 0 : |B_t| \geqslant H\}$.

Из § 3 (см. (3.4)) находим, что для любого $\lambda \geqslant 0$

$$\mathsf{E}\, e^{-\lambda\tau^0(H)} = \frac{1}{\operatorname{ch}(H\sqrt{2\lambda}\,)}. \tag{12.2}$$

Отсюда

$$\mathsf{E}\,\tau^0(H) = \mathsf{E}\,\sigma_H = H^2 \tag{12.3}$$

(ср. с (3.1) и (3.2)).

Из (12.2) получаем также, что

$$\mathsf{D}\,\tau^0(H) = \mathsf{D}\,\sigma_H = \frac{2}{3}\,H^4. \tag{12.4}$$

В силу (12.1) и свойства $\max B - B \overset{\text{law}}{=} |B|$ имеем также следующее свойство:

$$\mathsf{E} \max_{t\leqslant\tau^0(H)} B_t = \mathsf{E}\,|B_{\sigma_H}| = H. \tag{12.5}$$

**3.** Займемся теперь вопросом о *совместном распределении* $\operatorname{Law}(\tau^0(H), M_{\tau^0(H)})$, где $M_t = \max_{s\leqslant t} B_s$.

С этой целью заметим, что (на множестве $\{\tau^0(H) < \infty\}$)

$$M_{\tau^0(H)} = B_{\tau^0(H)} + H. \tag{12.6}$$

Поэтому знание закона $\operatorname{Law}(\tau^0(H), M_{\tau^0(H)})$ равносильно знанию закона $\operatorname{Law}(\tau^0(H), B_{\tau^0(H)})$.

Покажем, что для последнего распределения *двумерное преобразование Лапласа* (в предположении, что $\lambda \geqslant 0$, $\beta < \Delta \operatorname{cth}(\Delta\cdot H)$) выражается следующей формулой:

$$\boxed{\mathsf{E}\, e^{-\lambda\tau^0(H)+\beta B_{\tau^0(H)}} = \frac{e^{-\beta H}}{\operatorname{ch}(\Delta\cdot H) - \frac{\beta}{\Delta}\operatorname{sh}(\Delta\cdot H)}}\,, \tag{12.7}$$

что в силу (12.6) эквивалентно формуле

$$\boxed{\mathsf{E}\, e^{-\lambda\tau^0(H)+\beta M_{\tau^0(H)}} = \frac{1}{\operatorname{ch}(\Delta\cdot H) - \frac{\beta}{\Delta}\operatorname{sh}(\Delta\cdot H)}}\,. \tag{12.8}$$

Кратчайший путь доказательства формулы (12.8) основан на приводимых ниже “марковских” соображениях.

Пусть $Y = (Y_t)_{t\geqslant 0}$ – стандартное броуновское движение с отражением, выходящее из нуля [6], [16]. (Хорошо известно [6], [16], что такой процесс может быть реализован как модуль $|B|$ стандартного броуновского движения $B$.) Теорема Леви о совместном распределении $B$ и $\sup B$ (см. раздел D в § 1) утверждает, что

$$(\sup B - B,\ \sup B) \overset{\text{law}}{=} (Y,\ L^0(Y)), \tag{12.9}$$

где $L^0(Y) = (L^0(Y)_t)_{t\geqslant 0}$ – локальное время процесса $Y = (Y_t)_{t\geqslant 0}$. Если $\gamma^0(H) = \inf\{t \geqslant 0 : Y_t = H\}$, то из (12.9) получаем, что

$$\mathsf{E}\, e^{-\lambda\tau^0(H)+\beta M_{\tau^0(H)}} = \mathsf{E}\, e^{-\lambda\gamma^0(H)+\beta L^0(Y)_{\gamma^0(H)}}. \tag{12.10}$$

Чтобы вычислить преобразование Лапласа в правой части (12.10), воспользуемся методом *дифференциальных уравнений* из теории марковских процессов.

Будем рассматривать процесс $Y$, который начинается в произвольной точке $y \geqslant 0$ (а не в точке $y = 0$, как стандартное отраженное броуновское движение).

Обозначим

$$h(y) = \mathsf{E}\Big(e^{-\lambda\gamma^0(H)+\beta L^0(Y)_{\gamma^0(H)}} \,\Big|\, Y_0 = y\Big). \tag{12.11}$$

Хорошо известно (см., например, [6], [16] или [17]), что

$$\tfrac{1}{2}\, h''(y) = \lambda h(y) \quad \text{при} \quad 0 < y < H, \tag{12.12}$$

$$h'(0+) = -\beta h(0), \tag{12.13}$$

$$h(H) = 1. \tag{12.14}$$

Из (12.12) получаем

$$h(y) = c_1 \operatorname{ch}(\Delta\cdot y) + c_2 \operatorname{sh}(\Delta\cdot y), \tag{12.15}$$

где $c_1$ и $c_2$ – константы и $\Delta = +\sqrt{2\lambda}$.

Принимая во внимание условие (12.13), видим, что $h(y)$ можно переписать в следующем виде:

$$h(y) = (c\,\Delta) \operatorname{ch}(\Delta\cdot y) - (c\,\beta) \operatorname{sh}(\Delta\cdot y), \tag{12.16}$$

где $c$ – константа.

Используя теперь условие (12.14), находим, что для всякого $\beta < \operatorname{cth}(\Delta H)$

$$c = \frac{1}{\Delta \operatorname{ch}(\Delta \cdot H) - \beta \operatorname{sh}(\Delta \cdot H)}. \tag{12.17}$$

Следовательно, решение $h = h(y)$ задачи (12.12)–(12.14) определяется формулой

$$h(y) = \frac{\Delta \operatorname{ch}(\Delta \cdot y) - \beta \operatorname{sh}(\Delta \cdot y)}{\Delta \operatorname{ch}(\Delta \cdot H) - \beta \operatorname{sh}(\Delta \cdot H)}. \tag{12.18}$$

Для $y = 0$

$$h(0) = \frac{1}{\operatorname{ch}(\Delta \cdot H) - \frac{\beta}{\Delta} \operatorname{sh}(\Delta \cdot H)}. \tag{12.19}$$

Отсюда и из (12.10), (12.11) получаем преобразование Лапласа (12.8).

**4.** Рассмотрим теперь случай $\mu \neq 0$. Применяя теорему Гирсанова (см. (1.48)), находим, что

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\, e^{-\lambda \tau^\mu(H) + \beta B^\mu_{\tau^\mu(H)}} &= \mathsf{E}\Big[e^{-\lambda \tau^0(H) + \beta B^0_{\tau^0(H)}} \cdot e^{\mu B^0_{\tau^0(H)} - \frac{\mu^2}{2}\tau^0(H)}\Big] \\ &= \mathsf{E}\, e^{-\left(\lambda + \frac{\mu^2}{2}\right)\tau^0(H) + (\beta+\mu) B^0_{\tau^0(H)}}. \end{aligned} \tag{12.20}$$

Используя формулу (12.7), из (12.20) получаем, что если $\beta + \mu < \Delta \operatorname{cth}(\Delta \cdot H)$, то

$$\boxed{\mathsf{E}\, e^{-\lambda \tau^\mu(H) + \beta B^\mu_{\tau^\mu(H)}} = \frac{e^{-(\beta+\mu)H}}{\operatorname{ch}(\Delta \cdot H) - \frac{\beta+\mu}{\Delta} \operatorname{sh}(\Delta \cdot H)}}. \tag{12.21}$$

Отсюда, учитывая, что на множестве $\{\tau^\mu(H) < \infty\}$

$$M^\mu_{\tau^\mu(H)} = B^\mu_{\tau^\mu(H)} + H, \tag{12.22}$$

где $M^\mu_t = \max_{s \leqslant t} B^\mu_s$, приходим к следующей формуле:

$$\boxed{\mathsf{E}\, e^{-\lambda \tau^\mu(H) + \beta M^\mu_{\tau^\mu(H)}} = \frac{e^{-\mu H}}{\operatorname{ch}(\Delta \cdot H) - \frac{\beta+\mu}{\Delta} \operatorname{sh}(\Delta \cdot H)}} \tag{12.23}$$

(напомним, что $\Delta = \sqrt{\mu^2 + 2\lambda}$).

Из этой формулы следует, что

$$\mathsf{E}\, e^{-\lambda\tau^\mu(H)} = \frac{e^{-\mu H}}{\operatorname{ch}(\Delta\cdot H) - \frac{\mu}{\Delta}\operatorname{sh}(\Delta\cdot H)}, \tag{12.24}$$

и, как следствие, получаем равенство

$$\mathsf{E}\,\tau^\mu(H) = \frac{1}{2\mu^2}\bigl(e^{2\mu H} - 1 - 2\mu H\bigr). \tag{12.25}$$

**5.** Полагая в (12.8) и (12.23) $\lambda = 0$, находим, что для $\theta > 0$

$$\mathsf{E}\, e^{-\theta M_{\tau^0(H)}} = \frac{1}{1+\theta H} \tag{12.26}$$

и

$$\mathsf{E}\, e^{-\theta M_{\tau^\mu(H)}} = \frac{e^{-\mu H}}{\operatorname{ch}(|\mu|H) + \frac{\theta-\mu}{|\mu|}\operatorname{sh}(|\mu|H)}. \tag{12.27}$$

Из (12.26) следует, что случайная величина $M_{\tau^0(H)}$ $(= B_{\tau^0(H)}+H)$ имеет *экспоненциальное* распределение с параметром $1/H$:

$$\operatorname{Law}\bigl(M_{\tau^0(H)}\bigr) = \operatorname{Exp}\Bigl(\frac{1}{H}\Bigr), \tag{12.28}$$

т.е. плотность $p_{M_{\tau^0(H)}}(x)$ распределения вероятностей величины $M_{\tau^0(H)}$ дается формулой

$$p_{M_{\tau^0(H)}}(x) = \frac{1}{H}\, e^{-x/H}, \qquad x \geqslant 0. \tag{12.29}$$

Несложными преобразованиями правую часть (12.27) можно привести к виду

$$\frac{1}{1+\theta\cdot\frac{e^{2\mu H}-1}{2\mu}}. \tag{12.30}$$

Таким образом, преобразование Лапласа случайной величины $M_{\tau^\mu(H)}$ можно записать как

$$\mathsf{E}\, e^{-\theta M_{\tau^\mu(H)}} = \frac{1}{1+\theta\cdot\frac{e^{2\mu H}-1}{2\mu}} \tag{12.31}$$

(для любого $\mu\in\mathbb{R}$). Отсюда следует, что $M_{\tau^\mu(H)}$ имеет *экспоненциальное* распределение с параметром $2\mu/(e^{2\mu H}-1)$:

$$\operatorname{Law}\bigl(M_{\tau^\mu(H)}\bigr) = \operatorname{Exp}\biggl(\frac{2\mu}{e^{2\mu H}-1}\biggr). \tag{12.32}$$

Плотность распределения вероятностей случайной величины $M_{\tau^\mu(H)}$ дается формулой (12.29), где вместо $H$ надо взять $(e^{2\mu H}-1)/2\mu$.

Задачи (в связи с содержанием § 12).

1. Убедиться в том, что для любого *фиксированного* $T > 0$

$$\max_{t\leqslant T} B_t \overset{\text{law}}{=} \max_{t\leqslant T} B_t - B_T \overset{\text{law}}{=} |B_T|.$$

Показать, что, вообще говоря, $\mathrm{Law}(\max B) \neq \mathrm{Law}(|B|)$.

2. Пусть

$$\sigma^\mu(H) = \inf\Big\{t \geqslant 0 : B_t^\mu - \min_{s\leqslant t} B_s^\mu \geqslant H\Big\} \ \text{ и } \ m_t^\mu = \min_{s\leqslant t} B_s^\mu.$$

По аналогии с формулами (12.21), (12.23) найти формулы для

$$\mathsf{E}\, e^{-\lambda\sigma^\mu(H)+\beta B^\mu_{\sigma^\mu(H)}}, \qquad \mathsf{E}\, e^{-\lambda\sigma^\mu(H)+\beta m^\mu_{\sigma^\mu(H)}}.$$

Показать также, что

$$\mathsf{E}\,\sigma^\mu(H) = \frac{1}{2\mu^2}\big(e^{-2\mu H} - 1 + 2\mu H\big).$$

3. Как изменятся приведенные в этом параграфе формулы, если вместо процесса $B_t^\mu = \mu t + B_t$ рассматривать процесс $B_t^{\mu,\sigma} = \mu t + \sigma B_t$, $t \geqslant 0$?
4. Исследовать вопрос о структуре преобразований Лапласа для распределений вероятностей
(a) величин $\big(\tau^\mu(H),\ \sigma^\mu(H)\big)$,
(b) величин $\big(M^\mu_{\tau^\mu(H)},\ m^\mu_{\sigma^\mu(H)}\big)$ и
(c) четверки величин $\big(\tau^\mu(H), \sigma^\mu(H), M^\mu_{\tau^\mu(H)}, m^\mu_{\sigma^\mu(H)}\big)$.

Замечание. Более подробные сведения о моментах остановки $\tau^\mu(H)$ и $\sigma^\mu(H)$ можно найти в [18], [17], [19], [20].

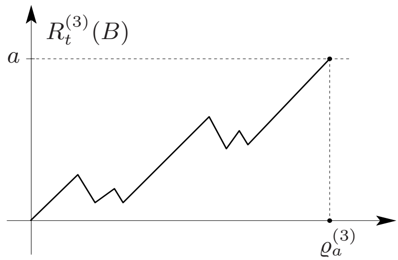
# § 13. Свойства момента остановки $\rho_a^{(3)} = \inf\{t \geqslant 0 : R_t^{(3)}(B) = a\}$, $a > 0$, где $R^{(3)}(B)$ – трехмерный процесс Бесселя ($R^{(3)}(B) = |B| + L(B)$)

Основные свойства:

$$\mathsf{P}(\rho_a^{(3)} < \infty) = 1$$

$$\mathsf{E}\, e^{-\lambda \rho_a^{(3)}} = \frac{a\sqrt{2\lambda}}{\operatorname{sh}(a\sqrt{2\lambda}\,)}$$

$$\lambda \geqslant 0$$




**1.** Мы не раз обращались к теореме Леви (раздел D в § 1) о том, что

$$(\sup B - B,\ \sup B) \overset{\text{law}}{=} (|B|,\, L(B)), \tag{13.1}$$

где $L(B)$ – локальное время броуновского движения в нуле:

$$L_t(B) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t I(|B_s| \leqslant \varepsilon)\, ds \qquad \mathsf{P}\text{-п.н.} \tag{13.2}$$

(Заметим, что $L_t(B) = L_t(|B|)$.)

Из (13.1) получаем

$$2\sup B - B \overset{\text{law}}{=} |B| + L(B) \ \ (= R^{(3)}(B)). \tag{13.3}$$

Оба процесса, $2\sup B - B$ и $|B| + L(B)$, фигурирующие здесь, замечательны: они совпадают по распределению с трехмерным процессом Бесселя $R^{(3)} = (R_t^{(3)})_{t \geqslant 0}$, где

$$R_t^{(3)} = \sqrt{\bigl(B_t^{(1)}\bigr)^2 + \bigl(B_t^{(2)}\bigr)^2 + \bigl(B_t^{(3)}\bigr)^2} \tag{13.4}$$

и $B^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, – три независимых броуновских движения. (Иными словами, $R^{(3)}$ есть радиальная часть трехмерного броуновского движения.)

Существует и иное определение этого процесса, основанное на стохастических дифференциальные уравнениях.

Именно, рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dR_t = \frac{1}{R_t}\,dt + dB_t, \tag{13.5}$$

где $B$ – броуновское движение и $R_0 = x \geqslant 0$. Это уравнение имеет единственное сильное решение (см., например, [16]), и если $R_0 = 0$, то

$$\mathrm{Law}(R) = \mathrm{Law}(R^{(3)}). \tag{13.6}$$

Доказательство свойства (13.6), а также упомянутого выше свойства

$$\mathrm{Law}(R^{(3)}) = \mathrm{Law}(|B| + L(B)) \tag{13.7}$$

приведено в [16], [22].

**2.** Сформулированное выше свойство $\mathsf{P}(\rho_a^{(3)} < \infty) = 1$ следует из (13.7) и свойства $\mathsf{P}(\sigma_a < \infty) = 1$, где $\sigma_a = \inf\{t \geqslant 0 : |B_t| \geqslant a\}$ (см. § 3).

Обратимся теперь к доказательству формулы

$$\mathsf{E}\, e^{-\lambda\rho_a^{(3)}} = \frac{a\sqrt{2\lambda}}{\operatorname{sh}(a\sqrt{2\lambda}\,)}, \qquad \lambda \geqslant 0, \tag{13.8}$$

или, эквивалентно, формулы

$$\mathsf{E}\, e^{-\frac{\lambda^2}{2}\rho_a^{(3)}} = \frac{a\lambda}{\operatorname{sh}(a\lambda)}, \qquad \lambda \geqslant 0 \tag{13.9}$$

(ср., между прочим, с (3.3)).

Для доказательства достаточно проверить, что процесс

$$M_t = e^{-\frac{\lambda^2}{2}t}\,\frac{\operatorname{sh}(\lambda R_t^{(3)}(B))}{\lambda R_t^{(3)}(B)}, \qquad t \geqslant 0, \tag{13.10}$$

где $R_t^{(3)}(B) = |B| + L(B)$, является *мартингалом*. Тогда из того, что семейство случайных величин $\{M_{t\wedge\rho_a^{(3)}},\ t \geqslant 0\}$ равномерно интегрируемо, по теореме о преобразовании свободного выбора получим $\mathsf{E}\, M_{\rho_a^{(3)}} = 1$, что и приводит к формуле (13.9).

Без ограничения общности мы можем предполагать, что пространство элементарных исходов $\Omega$ есть пространство непрерывных функций $\omega = (\omega_t)_{t\geqslant 0}$.

Обозначим через $P_B$ и $P_{B^\lambda}$ распределения броуновского движения $B = (B_t(\omega))_{t\geqslant 0}$ и броуновского движения со сносом $B^\lambda = (B_t^\lambda(\omega))_{t\geqslant 0}$, где $B_t(\omega) = \omega_t$ и $B_t^\lambda(\omega) = \lambda t + \omega_t$. Символы $P_{R^{(3)}(B)}$ и $P_{R^{(3)}(B^\lambda)}$ будут использоваться для обозначения образов мер $P_B$ и $P_{B^\lambda}$ при отображении

$$\omega \mapsto R^{(3)}(\omega) = \bigl(R_t^{(3)}(\omega)\bigr)_{t\geqslant 0},$$

где $R_t^{(3)}(\omega) = |\omega_t| + L_t(\omega)$.

Положим также

$$\mathcal{F}_t = \sigma(\omega_s,\, s \leqslant t) \quad \text{и} \quad \mathcal{F}_t^{R^{(3)}} = \sigma\bigl(R_s^{(3)}(\omega),\, s \leqslant t\bigr).$$

Легко проверить, что ($P_B$-п.н.) для всех $t \geqslant 0$

$$\frac{d\bigl(P_{R^{(3)}(B^\lambda)} \,|\, \mathcal{F}_t^{R^{(3)}}\bigr)}{d\bigl(P_{R^{(3)}(B)} \,|\, \mathcal{F}_t^{R^{(3)}}\bigr)}\bigl(R^{(3)}(B)\bigr) = \mathsf{E}\left[\frac{d\bigl(P_{B^\lambda} \,|\, \mathcal{F}_t\bigr)}{d\bigl(P_B \,|\, \mathcal{F}_t\bigr)}(B) \,\Big|\, \mathcal{F}_t^{R^{(3)}(B)}\right]. \tag{13.11}$$

Левая часть (13.11), очевидно, является мартингалом (обозначим его $Z_t(\lambda)$, $t \geqslant 0$). В правой части (13.11) имеем

$$\frac{d\,(P_{B^\lambda} \,|\, \mathcal{F}_t)}{d\,(P_B \,|\, \mathcal{F}_t)}(B) = e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t}. \tag{13.12}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} Z_t(\lambda) &= \mathsf{E}\Bigl[e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t} \,\big|\, \mathcal{F}_t^{R^{(3)}(B)}\Bigr] \\ &= e^{-\frac{\lambda^2}{2}t}\, \mathsf{E}\Bigl[e^{\lambda B_t} \,\big|\, \mathcal{F}_t^{R^{(3)}(B)}\Bigr]. \end{aligned} \tag{13.13}$$

Покажем, что ($P_B$-п.н.)

$$\mathsf{E}\left[e^{\lambda B_t} \,\big|\, \mathcal{F}_t^{R^{(3)}(B)}\right] = \frac{\operatorname{sh}\bigl(\lambda R_t^{(3)}(B)\bigr)}{\lambda R_t^{(3)}(B)}. \tag{13.14}$$

Чтобы это доказать, заметим сначала, что поскольку

$$\operatorname{Law}(B) = \operatorname{Law}(-B),$$

то

$$\mathsf{E}\left[e^{\lambda B_t} \,\middle|\, \mathcal{F}_t^{|B|}\right] = \frac{1}{2}\bigl(e^{\lambda|B_t|} + e^{-\lambda|B_t|}\bigr) \ \ (= \operatorname{ch}(\lambda|B_t|)), \qquad (13.15)$$

где $\mathcal{F}_t^{|B|} = \sigma(|B_s|,\, s \leqslant t)$. Это соотношение в сочетании с включением $\mathcal{F}_t^{R(B)} \subseteq \mathcal{F}_t^{|B|}$ (напомним, что $R(B) = |B| + L(B) = |B| + L(|B|)$), приводит к равенству

$$\mathsf{E}\left[e^{\lambda B_t} \,\middle|\, \mathcal{F}_t^{R^{(3)}(B)}\right] = \frac{1}{2}\,\mathsf{E}\left[e^{\lambda|B_t|} + e^{-\lambda|B_t|} \,\middle|\, \mathcal{F}_t^{R^{(3)}(B)}\right]. \qquad (13.16)$$

Теперь мы воспользуемся следующей замечательной теоремой Питмана (см. [21]), которая утверждает, что условное распределение $\operatorname{Law}\bigl(|B_t| \,\big|\, \mathcal{F}_t^{R^{(3)}(B)}\bigr)$ является *равномерным* на $[0, R_t^{(3)}(B)]$. Из этой теоремы следует, что

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\,\mathsf{E}&\left[e^{\lambda|B_t|} + e^{-\lambda|B_t|} \,\middle|\, \mathcal{F}_t^{R^{(3)}(B)}\right] \\
&= \frac{1}{2\lambda R^{(3)}(B)}\left[e^{\lambda R_t^{(3)}(B)} - e^{-\lambda R_t^{(3)}(B)}\right] \\
&= \frac{\operatorname{sh}\bigl(\lambda R_t^{(3)}(B)\bigr)}{\lambda R_t^{(3)}(B)}. \qquad (13.17)
\end{aligned}$$

Отсюда и из (13.16) получаем требуемую формулу (13.14), с учетом которой из (13.13) находим, что

$$Z_t(\lambda) = e^{-\frac{\lambda^2}{2}t}\,\frac{\operatorname{sh}\bigl(\lambda R_t^{(3)}(B)\bigr)}{\lambda R_t^{(3)}(B)}. \qquad (13.18)$$

Процесс $(Z_t(\lambda))_{t\geqslant 0}$ образует мартингал (это следует из (13.11)). Ясно (ввиду (13.10)), что $Z_t(\lambda) = M_t$. Таким образом, процесс $(M_t)_{t\geqslant 0}$, заданный формулой (13.10), является *мартингалом*, и поскольку, как уже отмечалось выше, семейство случайных величин $\bigl\{M_{t\wedge\rho_a^{(3)}},\, t \geqslant 0\bigr\}$ равномерно интегрируемо, то по теореме о преобразовании свободного выбора получаем требуемую формулу

$$\mathsf{E}\, e^{-\lambda\rho_a^{(3)}} = \frac{a\sqrt{2\lambda}}{\operatorname{sh}(a\sqrt{2\lambda}\,)}.$$

Задачи (в связи с содержанием § 13).

1. Вывести из (6.11) или (6.12) формулу для плотности

$$f_{(2\sup_{u\leqslant T} B_u - B_T)}(x)$$

распределения вероятностей величины

$$R_T^{(3)}(B)\ (\overset{\text{law}}{=} 2\sup_{u\leqslant T} B_u - B_T).$$

2. Доказать, что

$$\mathrm{Law}(R) = \mathrm{Law}(R^{(3)}) = \mathrm{Law}\big(R^{(3)}(B)\big).$$

(См. (13.6), (13.7).)

3. Имея преобразование Лапласа

$$\mathsf{E}\, e^{-\lambda \rho_a^{(3)}} = \frac{a\sqrt{2\lambda}}{\operatorname{sh}(a\sqrt{2\lambda}\,)},$$

найти формулу для плотности распределения вероятностей величины $\rho_a^{(3)}$.

# Список литературы


[1] А. Н. Ширяев, *Вероятность*: в 2-х кн. *Вероятность*-1, *Вероятность*-2, МЦНМО, М., 2004.

[2] А. Н. Ширяев, *Задачи по теории вероятностей*, МЦНМО, М., 2006.

[3] O. Kallenberg, *Foundations of modern probability*, Probab. Appl. (N. Y.), Springer-Verlag, New York, 1997 MR 1464694, Zbl 0892.60001.

[4] Ж. Жакод, А. Н. Ширяев, *Предельные теоремы для случайных процессов*, т. 1, 2, Теория вероятностей и математическая статистика, **47**, **48**, Наука, М., 1994 MR 1346769, MR 0959133, Zbl 0830.60025.

[5] Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев, *Статистика случайных процессов. Нелинейная фильтрация и смежные вопросы*, Теория вероятностей и математическая статистика, Наука, М., 1974 MR 0474486, Zbl 0279.60021.

[6] Е. Б. Дынкин, *Марковские процессы*, Теория вероятностей и математическая статистика, Физматгиз, М., 1963 MR 0193670, Zbl 0132.37701.

[7] L. Barba Escribá, “A stopped Brownian motion formula with two sloping line boundaries”, *Ann. Probab.*, **15**:4 (1987), 1524–1526 MR 905346, Zbl 0636.60082.

[8] T. W. Anderson, “A modification of the sequential probability ratio test to reduce the sample size”, *Ann. Math. Statist.*, **31** (1960), 165–197 MR 116441, Zbl 0089.35501.

[9] K. L. Chung, “A cluster of great formulas”, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **39**:1–3 (1982), 65–67 doi 10.1007/BF01895215, MR 653674, Zbl 0495.60020; Reprinted in: Kai Lai Chung, *Chance and choice* (*Memorabilia*), World Scientific, Singapore, 2004, 133–135 MR 2113168, Zbl 1059.01017.

[10] A. Kolmogoroff, “Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione”, *Giorn. Ist. Ital. Attuari*, **4**:1 (1933), 83–91 Zbl 0006.17402; рус. пер.: А. Н. Колмогоров, “Об эмпирическом определении закона распределения”, *Теория вероятностей и математическая статистика*, Наука, М., 1986, 134–141 MR 0861120, Zbl 0595.60001.

[11] J. L. Doob, “Heuristic approach to the Kolmogorov–Smirnov theorems”, *Ann. Math. Statist.*, **20** (1949), 393–403 MR 30732, Zbl 0035.08901.

[12] M. D. Donsker, “Justification and extension of Doob’s heuristic approach to the Kolmogorov–Smirnov theorems”, *Ann. Math. Statist.*, **23** (1952), 277–281 MR 47288, Zbl 0046.35103.

[13] А. А. Новиков, “Об одном тождестве для стохастических интегралов”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **17**:4 (1972), 761–765 MR 0312567, Zbl 0284.60054.

[14] A. A. Novikov, *Martingales and stopping times with applications*, Notes of lectures in UTS (Sydney), ETH (Zürich), 2004.

[15] J.-A. Yan, “A propos de l’integrabilité uniforme des martingales exponentielles”, *Séminaire de Probabilités* XVI (1980/81), Lecture Notes in Math., **920**, Springer, Berlin–New York, 1982, 338–347 doi 10.1007/BFb0092796, MR 0658695, Zbl 0484.60038.

[16] D. Revuz, M. Yor, *Continuous martingales and Brownian motion*, Grundlehren Math. Wiss., **293**, Springer-Verlag, Berlin, 1994 MR 1303781, Zbl 0804.60001.

[17] D. Williams, “On a stopped Brownian motion formula of H. M. Taylor”, *Séminaire de Probabilités* X (1974/75), Lecture Notes in Math., **511**, Springer, Berlin, 1976, 235–239 doi 10.1007/BFb0101110, MR 0461687, Zbl 0368.60056.

[18] H. M. Taylor, “A stopped Brownian motion formula”, *Ann. Probab.*, **3**:2 (1975), 234–246 MR 0375486, Zbl 0303.60072.

[19] Р. Дуади, М. Йор, А. Н. Ширяев, “О вероятностных характеристиках величин “падения” в стандартном броуновском движении”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **44**:1 (1999), 3–13 MR 1751185, Zbl 0959.60073.

[20] I. Meilijson, “The time to a given drawdown in Brownian motion”, *Séminaire de Probabilités* XXXVII, Lecture Notes in Math., **1832**, Springer, Berlin, 2003, 94–108 doi 10.1007/b94376, MR 2053044, Zbl 1041.60065.

[21] L. W. Pitman, “One-dimensional Brownian motion and the three-dimensional Bessel process”, *Adv. Appl. Probab.*, **7**:3 (1975), 511–526 doi 10.2307/1426125, MR 375485, Zbl 0332.60055.

[22] H.-H. Kuo, *Introduction to stochastic integration*, Universitext, Springer, New York, 2006 MR 2180429, Zbl 1101.60001.

[23] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Наука, М., 1971.

[24] N. V. Krylov, *Introduction to the theory of random processes*, Grad. Stud. Math., **43**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002 MR 1885884, Zbl 1008.60001.

[25] S. E. Graversen, A. N. Shiryaev, “An extension of P. Lévy’s distributional properties to the case of a Brownian motion with drift”, *Bernoulli*, **6**:4 (2000), 615–620 doi 10.2307/3318509, MR 1777686, Zbl 0965.60077.

[26] А. С. Черный, А. Н. Ширяев, “‘Некоторые свойства броуновского движения со сносом и обобщение одной теоремы П. Леви”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **44**:2 (1999), 466–472 MR 1751488, Zbl 0974.60058.

[27] А. В. Булинский, А. Н. Ширяев, *Теория случайных процессов*, Физматлит, М., 2003.

[28] А. В. Скороход, *Исследования по теории случайных процессов*: *Стохастические дифференциальные уравнения и предельные теоремы для процессов Маркова*, Изд-во Киев. ун-та, Киев, 1961 MR 0185619, Zbl 0108.14804.

[29] G. Szegő (ed.), *Risk measures for the* 21*st century*, Wiley, 2004.

[30] L. Breiman, “First exit times from a square root boundary”, *Proceedings ot the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability* (Berkeley, CA, 1965/66), II: *Contributions to Probability Theory*, Part 2, Univ. California Press, Berkeley, CA, 1967, 9–16 MR 212865, Zbl 0241.60035.

[31] А. А. Новиков, “О моментах остановки винеровского процесса”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **16**:3 (1971), 458–465 MR 0315798, Zbl 0258.60037.

[32] L. A. Shepp, “A first passage problem for the Wiener process”, *Ann. Math. Statist.*, **38** (1967), 1912–1914 MR 217879, Zbl 0178.19402.

*Научное издание*

## Современные проблемы математики

**Выпуск 8**

***Альберт Николаевич Ширяев***

**О мартингальных методах в задачах о пересечении границ броуновским движением**

Компьютерная верстка: *О. Г. Мисюрина*


Сдано в набор 15.03.2007. Подписано в печать 07.06.2007.
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 5. Тираж 200 экз.

Отпечатано в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН
Москва, 119991, ул. Губкина, 8.
`http://www.mi.ras.ru/spm/`   e-mail: `spm@mi.ras.ru`