

ИЗ ФОНДОВ РОССИЙСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННОЙ БИБЛИОТЕКИ

Пастухов, Станислав Вениаминович

1. О некоторых вероятностно-статистических
методах в техническом анализе

1.1. Российская государственная библиотека

Пастухов, Станислав Вениаминович

О некоторых вероятностно-статистических методах в техническом анализе [Электронный ресурс]: Дис. ... канд. физ.-мат. наук : 08.00.13 .-М.: РГБ, 2005 (Из фондов Российской Государственной Библиотеки)

Математические и инструментальные методы экономики

Полный текст:

<http://diss.rsl.ru/diss/05/0238/050238020.pdf>

Текст воспроизводится по экземпляру,
находящемуся в фонде РГБ:

Пастухов, Станислав Вениаминович

О некоторых вероятностно-статистических
методах в техническом анализе

М. 2004

Российская государственная библиотека, 2005
год (электронный текст).

61:04-1/1414

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им М.В. Ломоносова

На правах рукописи

Пастухов Станислав Вениаминович

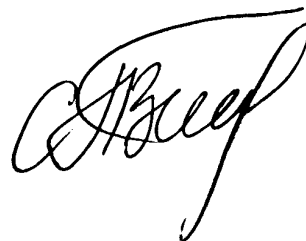
**О некоторых вероятностно-статистических
методах в техническом анализе**

Специальность 08.00.13 – математические и инструментальные методы
экономики

диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители – член-корреспондент РАН,
доктор физико-математических наук,
профессор А.Н. Ширяев;
член-корреспондент РАН,
доктор физико-математических наук,
профессор Б.С. Кашин

Москва, 2004



Оглавление

| | |
|--|-----------|
| Введение | 4 |
| 1 Основные конструкции | 13 |
| 1.1 Kagi, renko H -построения | 13 |
| 1.2 Kagi, renko H -инверсия. Связь kagi, renko H -построений с кусочно-монотонными аппроксимациями. | 26 |
| 1.3 Kagi, renko H -волатильность | 33 |
| 1.4 Свойства H -волатильности и H -инверсии винеровского про- цесса | 43 |
| 1.5 H -инверсия как мера изменчивости | 52 |
| 2 Описание моделей | 60 |
| 2.1 Одношаговая модель. Kagi, renko H -стратегии | 60 |
| 2.2 Многошаговая модель. Понятие H -паттерна. Kagi, renko прогнозирование | 71 |
| 3 Статистический анализ | 79 |
| 3.1 Анализ H -волатильности | 80 |
| 3.2 Анализ H -инверсии. Оценивание волатильности | 87 |
| 3.3 Моделирование kagi, renko H -стратегий | 93 |
| 3.4 Анализ H -паттернов | 96 |

Введение

Настоящая диссертация посвящена исследованию некоторых методов *технического анализа* финансового рынка. Под техническим анализом мы понимаем статистический анализ процессов, описывающих поведение цен и объемов сделок и заявок на покупку или продажу финансовых активов, с целью прогнозирования будущего поведения цен.

Первые шаги в использовании технического анализа на финансовых рынках были сделаны еще в XVII веке в Японии (см. [30], гл.2), однако той популярности, которой он пользуется у финансовых аналитиков в настоящее время, технический анализ во многом обязан бурному развитию рынка в девяностых годах XX века. Связано это прежде всего с тем, что широкое применение электронно-вычислительных машин качественно повысило эффективность получения, хранения и обработки поступающей на рынок информации, в результате чего резко увеличился объем совершаемых на рынке сделок (см., например, [16], стр. 7), и, как следствие, появилось огромное число инвесторов с короткими интервалами инвестирования (в частности, внутри одного дня). И если в случае долгосрочных инвестиционных горизонтов определяющую роль играет *фундаментальная информация* (глобальное состояние экономики и т.д.), то при сокращении временных горизонтов доминирующую роль начинает играть технический анализ (см. также [11], гл.I, §2f; [7]).

Однако, несмотря на его широкую востребованность со стороны фи-

нансового рынка, действия технических аналитиков по-прежнему носят, как правило, субъективный (интуитивный) характер, что приводит порой к прямо противоположным прогнозам относительно будущего движения цен. Невысокий уровень теоретического обоснования выводов технического анализа может быть объяснен отчасти следующим. Финансовая математика до недавнего времени развивалась (и развивается до сих пор) в основном в духе концепции *безарбитражности* (или *эффективности*) рынка, что с наглядной точки зрения означает отсутствие на нем *арбитражных возможностей*, то есть возможностей для извлечения прибыли без риска (подробнее см. [11], гл. I, §2). Иначе говоря, находясь в рамках теории эффективного рынка, классическая финансовая математика исходит из того, что поведение инвесторов обусловлено „рациональными“ причинами, в то время как для технического анализа более важно „эмоциональное“ состояние рынка. Но если для долгосрочных инвестиционных горизонтов гипотеза безарбитражности еще остается в какой-то степени приемлемой, то для коротких временных интервалов, где, как известно из практики, регулярно возникают арбитражные возможности, классическая финансовая математика, очевидно, не в состоянии адекватно описывать поведение рынка.

Основной целью данной работы является построение модели поведения цен финансового актива, описываемых одномерным случайным процессом $X = (X(t))_{t \geq 0}$, и создание стратегий, которые позволяют реализовать арбитражные возможности. Отметим, что лежащие в их основе *kagi, renko H-построения* (известные техническим аналитикам, как *kagi, renko charts*), использовались на финансовых рынках еще в XIX веке в Японии (см. [30], гл.8).

Основными аспектами, принципиально отличающими тему настоящей диссертации от исследований классической финансовой математики, яв-

ляются следующие:

- (i) не постулируется отсутствие арбитражных возможностей на рынке
- (ii) не делается предположение о распределении процесса X

Основные результаты работы являются новыми. Среди них

- для случайного процесса, траектории которого непрерывны справа и имеют пределы слева, определены следующие понятия: H -волатильность и H -инверсия
- получены некоторые свойства H -волатильности и H -инверсии в случае винеровского процесса
- построены стратегии, которые при определенных значениях H -волатильности позволяют реализовать имеющиеся на рынке арбитражные возможности
- предложен математически строгий метод построения прогноза, основанный на анализе исторических данных посредством $kagi$, $renko$ H -построений
- описан новый подход к определению меры изменчивости (волатильности) финансового актива

Комментарии к предположениям (i) –(ii), а также краткое пояснение основных результатов приведены ниже.

В настоящей работе использовались методы теории вероятностей и случайных процессов, математической статистики, аппарат кусочно-монотонных аппроксимаций, возникший в теории приближения.

Ряд полученных результатов носит теоретический характер. Практическая ценность заключается в том, что результаты работы могут эффективно использоваться на финансовом рынке. Отметим также, что предлагаемая методология может быть задействована также и в любой другой сфере экономики, где имеется адекватная статистика.

Для пояснения практической значимости полученных результатов остановимся подробнее на сформулированных выше предположениях (i) – (ii). По поводу условия (i) уже было сказано, что одной из основных экономических концепций финансовой математики является гипотеза безарбитражности рынка. Данная гипотеза помимо наглядного смысла допускает также и строгое математическое толкование, которое отражено в *первой фундаментальной теореме расчетов финансовых активов* (см., например, [23], [18], [19], [20]). Эта теорема (с некоторыми оговорками) утверждает, что безарбитражный рынок — это такой рынок, для которого существует так называемая *риск-нейтральная* (или *мартингальная*) мера, относительно которой цены образуют *мартингал* (подробнее о мартингалах см., например, [2], [4]). В частности, это поясняет невозможность построения нетривиального прогноза цен в рамках концепции безарбитражности, так как наилучшим прогнозом будущего значения мартингала является его значение в настоящий момент. В то же время на практике регулярно возникают ситуации, в которые возможен эффективный прогноз (особенно явно это проявляется на коротких временных интервалах). В настоящей работе приведены примеры таких ситуаций, а также математически строго изложен общий метод построения нетривиального прогноза. И все же, несмотря на неадекватность указанной теоремы реальной ситуации, важность ее в развитии финансовой математики трудно переоценить, поскольку подавляющее большинство моделей рынка возникало и до сих пор возникает в рамках концепции безар-

битражности. Среди наиболее популярных и детально изученных безарбитражных моделей отметим *модель Башелье, модель Блэка-Мертона-Шоулса, модель Кокса-Росса-Рубинштейна*, впервые описанных в работах [13], [14] и [29], [17] соответственно.

Переходя к обсуждению условия (ii), следует сначала сказать, что в финансовой математике существуют модели поведения рынка, не опирающиеся на концепцию безарбитражности. Наиболее популярной из них является модель со свойством *автомодельности* (или *самоподобия*), которое заключается в том, что процесс $X = (X(t))_{t \geq 0}$, описывающий поведение цен финансового актива, является *автомодельным процессом с параметром Харста H* (>0), то есть для любого $a > 0$ выполнено

$$Law(X_{at}, t \geq 0) = Law(a^H X_t, t \geq 0)$$

Одними из основных примеров таких процессов являются *фрактальное броуновское движение с параметром H* и *строго α -устойчивый процесс Леви*, где $\alpha = 1/H$, $\alpha \in (0, 2]$ (см., например, [11], гл.III, §2с). Популярность данной модели, в развитии которой помимо основополагающей работы [24] значительную роль сыграли, в частности, работы [26], [27], [28], объясняется тем, что многие финансовые активы обладают свойством статистического самоподобия, то есть, грубо говоря, на малых и больших временных интервалах они ведут себя „схожим образом“. Иными словами, использование автомодельных процессов для описания поведения цен является вполне адекватным реальности шагом. Оценить параметр H можно методами *\mathcal{R}/\mathcal{S} анализа* и *анализа Δ -волатильности* (подробнее см., например, [11], гл.IV, §3b, §4), при этом оказывается, что для многих финансовых активов параметр Харста отличен от $1/2$ (см. [22], [31]). Это может служить дополнительным подтверждением того, что рынок вообще говоря не является безарбитражным (случай $H = 1/2$ соответствует винеровскому процессу). Однако сам по себе этот факт

не приводит к созданию конкретных арбитражных стратегий, а может служить лишь для выявления свойств финансового рынка общего рода, например таких, как *кластерность*, *сильное последствие* и т.п. (подробнее см., например, [11], гл.III,§2d, гл.IV,§4a). При подгонке же теоретических моделей к реальным статистическим данным для построения соответствующих прогнозов приходится делать априорное предположение о структуре распределения процесса X , которое в данном случае в общем виде состоит в том, что процесс X является фрактальным броуновским движением или строго α -устойчивым процессом Леви. Отметим, что в безарбитражном случае наиболее общим является предположение о семимартингальности процесса X (см., например, [11], гл.III,§5).

В настоящей работе при определении H -волатильности, играющей ключевую роль в построении соответствующих стратегий, в отношении процесса X предполагается лишь то, что его траектории *непрерывны справа и имеют пределы слева* (данный параметр H не есть параметр Харста H). Отметим, что данное ограничение для финансового рынка является максимально общим, поскольку поведение цен для любого актива может быть описано процессом из данного класса. Статистический анализ H -волатильности выявляет, как и в случае \mathcal{R}/S анализа и анализа Δ -волатильности, присущее финансовому рынку свойство самоподобия. Но при этом, в отличие от описанной выше модели, в настоящей работе удастся явно построить арбитражные стратегии, используя только лишь этот статистический факт, который проявляется в определенной зависимости H -волатильности от параметра H . Стоит, правда, заметить, что реализация таких стратегий требует в некоторых случаях непрерывности траекторий процесса X . Данное ограничение является вполне адекватным реальности, например, когда потиковое изменение цены на каждом шаге либо сравнимо с минимальной ее дискретностью, либо является

малой величиной по отношению к H .

Обратимся еще раз к тому факту, что в отличие от упомянутых выше методов \mathcal{R}/S анализа и анализа Δ -волатильности, предлагаемая в настоящей работе методика анализа H -волатильности позволяет не только выявить на рынке арбитражные возможности, но и в явном виде реализовать их. Данное преимущество, по всей видимости, является следствием следующего различия. В финансовой математике при статистическом анализе, как правило, рассматривают данные, поступающие равномерно через определенный промежуток времени Δ . Можно сказать, что с экономической точки зрения параметр Δ при таком подходе классифицирует инвесторов в зависимости от их временных горизонтов на долгосрочных и краткосрочных. В настоящей работе для нас существенным будет лишь изменение цены на величину, не меньшую некоторого заданного $H > 0$, а время, за которое это изменение произошло, вообще говоря, не учитывается. Иными словами, мы классифицируем инвесторов в зависимости от их отношения к уровню прибыли или убытка. Например, для одного инвестора потери в \$1 в некотором активе являются весомыми, а для другого инвестора изменения этого же актива на \$5 даже не берутся в расчет. Иначе говоря, в отличие от используемого в финансовой математике „римановского подхода“, когда значения X группируются по временной оси, в настоящей работе применяется „лебеговский подход“.

Кроме того в финансовой математике принято считать, что процесс X определяет цены $(S(t))_{t \geq 0}$ финансового актива посредством соотношения $S(t) = S(0)e^{X(t)}$. В настоящей работе мы полагаем $S(t) = X(t)$, тем самым придавая вводимым понятиям большую практическую наглядность. Эта наглядность особо проявляется, если рассматривать краткосрочные временные интервалы.

По теме диссертации автором опубликовано три работы. Результаты

работы докладывались автором на научных семинарах:

„Многомерный статистический анализ и вероятностное моделирование реальных процессов“ (ЦЭМИ РАН);

„Большой семинар кафедры теории вероятностей“ (механико-математический факультет, МГУ им. М.В. Ломоносова)

Диссертация состоит из введения, 3 глав, 11 параграфов и списка литературы. Во **Введении** поясняются цели диссертации и обосновывается ее актуальность. В **Главе 1**, состоящей из пяти параграфов представлены основные конструкции и введены основные понятия для процесса $X = (X(t))_{t \geq 0}$, траектории которого непрерывны справа и имеют пределы слева. В **параграфе 1.1** описываются *kağı, genko* H -построения для процесса X на интервале $[0, T]$. В **параграфе 1.2** вводятся определения *kağı, genko* H -инверсии для процесса X на интервале $[0, T]$ — **определения 1.2.1, 1.2.2**. Для случая, когда траектории процесса X непрерывны, показано, что *kağı, genko* H -построения являются оптимальными в определенном смысле кусочно-монотонными аппроксимациями непрерывной функции — основной результат отражен в **леммах 1.2.4, 1.2.5**. В **параграфе 1.3** определяется *kağı, genko* H -волатильность порядка p для процесса X на интервале $[0, T]$ — **определения 1.3.4, 1.3.5**. Для случая $p = 1$, играющего ключевую роль при построении арбитражных стратегий, показывается, что введенное понятие тесным образом связано с вариационными характеристиками процесса X — **лемма 1.3.1**. Также проводится аналогия между H -волатильностью и Δ -волатильностью. В **параграфе 1.4** исследуется предельное поведение H -волатильности и H -инверсии (при $T \rightarrow +\infty$) для винеровского процесса. Основные результаты содержатся в **теоремах 1.4.1, 1.4.2**. В **параграфе 1.5** описан новый подход к определению меры изменчивости (волатильности) процесса X , основанный на использовании H -инверсии и H -волатильности

второго порядка, — **определения 1.5.1, 1.5.2.** Также исследуется взаимосвязь между амплитудой колебания процесса X и H -инверсией.

В **Главе 2**, состоящей из двух параграфов, описываются основные модели. В **параграфе 2.1** в **определениях 2.1.4, 2.1.9** вводятся искомые арбитражные kagi, genko H -стратегии. Данные стратегии основаны на том статистическом факте, что H -волатильность первого порядка (kagi, genko) ведет себя, как функция CH , где константа C не зависит от H и достаточно устойчива во времени. В случае, когда $C \neq 2$ (в безарбитражном случае $C = 2$), введенные стратегии позволяют извлечь арбитражные возможности. Основной результат отражен в **теоремах 2.1.5, 2.1.10.** В **параграфе 2.2** описывается модель, основанная на статистическом анализе kagi, genko H -построений. Смысл ее состоит в том, что для построения прогноза будущего значения цены находятся ситуации в прошлом, где цена вела себя „схожим“ образом. Определение „схожести“ формализуется посредством понятия H -паттерна, данного в **определении 2.2.1.** Тогда, исходя из статистики поведения цены при реализации текущего H -паттерна в прошлом, строится прогноз для настоящего момента.

Глава 3 содержит результаты статистического анализа данных финансового рынка. В **параграфе 3.1** анализируется H -волатильность, в **параграфе 3.2** исследуется мера изменчивости процесса, основанная на H -инверсии и H -волатильности второго порядка. Результаты моделирования kagi, genko H -стратегий приведены в **параграфе 3.3.** Анализ H -паттернов для kagi, genko H -построений отражен в **параграфе 3.4.**

Глава 1

Основные конструкции

1.1 Kagi, genko H -построения

1. В настоящем параграфе для случайного процесса, траектории которого непрерывны справа и имеют пределы слева, определяются kagi, genko H -построения. Как отмечалось выше, данные конструкции (известные как kagi, genko charts, см. [30], гл.7,8) впервые использовались на финансовых рынках еще в XIX веке в Японии, а в настоящее время пользуются большой популярностью у технических аналитиков при построении прогноза относительно будущего поведения цен. Правда, такие прогнозы носят сугубо интуитивный характер и, как будет показано в дальнейшем, заведомо не всегда адекватны реальной ситуации. В переводе с японского термины „kagi“ и „genko“ (точнее было бы писать „renga“) означают соответственно „ключ“ (в одном из контекстов „предел“, „рубеж“) и „кирпич“. Учитывая столь древнее происхождение этих построений, представляется целесообразным использование терминов kagi, genko для обозначения соответствующих понятий. Для случайного процесса kagi, genko H -построения определяются потраекторно, поэтому сначала рассмотрим случай детерминированного процесса, который в свою очередь разобьем еще на два случая: траектория является непре-

рывной функцией, траектория является непрерывной справа и имеющей пределы слева функцией.

2. В данном пункте определяется *kagi H*-построение для непрерывной на интервале $[0, T]$ функции F . Для произвольного $H > 0$ такого, что

$$\sup_{[0, T]} F - \inf_{[0, T]} F \geq H \quad (1.1)$$

построим индуктивно последовательность моментов времени $(\tau_n^*, \tau_n)_{n=0, \dots, N}$ для некоторого $N = N_T(H, F)$ следующим образом (см. также рис.1.1).

База индукции: $\tau_0 = \inf\{u \in [0, T] : \max_{[0, u]} F - \min_{[0, u]} F = H\}$. Возможны два взаимоисключающих случая:

- $F(\tau_0) = \max_{[0, \tau_0]} F$, тогда $\tau_0^* = \inf\{u \in [0, \tau_0] : F(u) = \min_{[0, \tau_0]} F\}$
- $F(\tau_0) = \min_{[0, \tau_0]} F$, тогда $\tau_0^* = \inf\{u \in [0, \tau_0] : F(u) = \max_{[0, \tau_0]} F\}$

Шаг индукции ($n \rightarrow n + 1$): на n -ом шаге имеем последовательность $(\tau_k^*, \tau_k)_{k=0, \dots, n}$, при этом $|F(\tau_k) - F(\tau_k^*)| = H$, $k = 0, \dots, n$. Возможны два взаимоисключающих случая:

- $F(\tau_n) - F(\tau_n^*) = H$, тогда

$$\begin{aligned} \tau_{n+1} &= \inf\{u \in [\tau_n, T] : \max_{[\tau_n, u]} F - F(u) = H\} \\ \tau_{n+1}^* &= \inf\{u \in [\tau_n, \tau_{n+1}] : F(u) = \max_{[\tau_n, \tau_{n+1}]} F\} \end{aligned}$$

- $F(\tau_n) - F(\tau_n^*) = -H$, тогда

$$\begin{aligned} \tau_{n+1} &= \inf\{u \in [\tau_n, T] : F(u) - \min_{[\tau_n, u]} F = H\} \\ \tau_{n+1}^* &= \inf\{u \in [\tau_n, \tau_{n+1}] : F(u) = \min_{[\tau_n, \tau_{n+1}]} F\} \end{aligned}$$

Поскольку функция F непрерывна на $[0, T]$, то, очевидно, что для некоторого конечного n^* мы остановимся, то есть τ_{n^*+1} не существует. Поло-

жим тогда $N = n^* + 1$, $\tau_N = T$,

$$\tau_N^* = \begin{cases} \inf\{u \in [\tau_{n^*}, T] : F(u) = \max_{[\tau_{n^*}, T]} F\}, & \text{если } F(\tau_{n^*}) - F(\tau_{n^*}^*) = H \\ \inf\{u \in [\tau_{n^*}, T] : F(u) = \min_{[\tau_{n^*}, T]} F\}, & \text{если } F(\tau_{n^*}) - F(\tau_{n^*}^*) = -H \end{cases}$$

В итоге на интервале $[0, T]$ для некоторого конечного $N = N_T(H, F) \geq 1$ получим последовательность $(\tau_n^*, \tau_n)_{n=0, \dots, N}$, которую будем называть *kagi* H -построением для функции F на $[0, T]$. Отметим, что по построению $|F(\tau_n) - F(\tau_n^*)| = H$ для $n = 0, \dots, N-1$. Если условие (1.1) не выполнено, то положим $N = 0$, $\tau_0^* = \tau_0 = 0$.

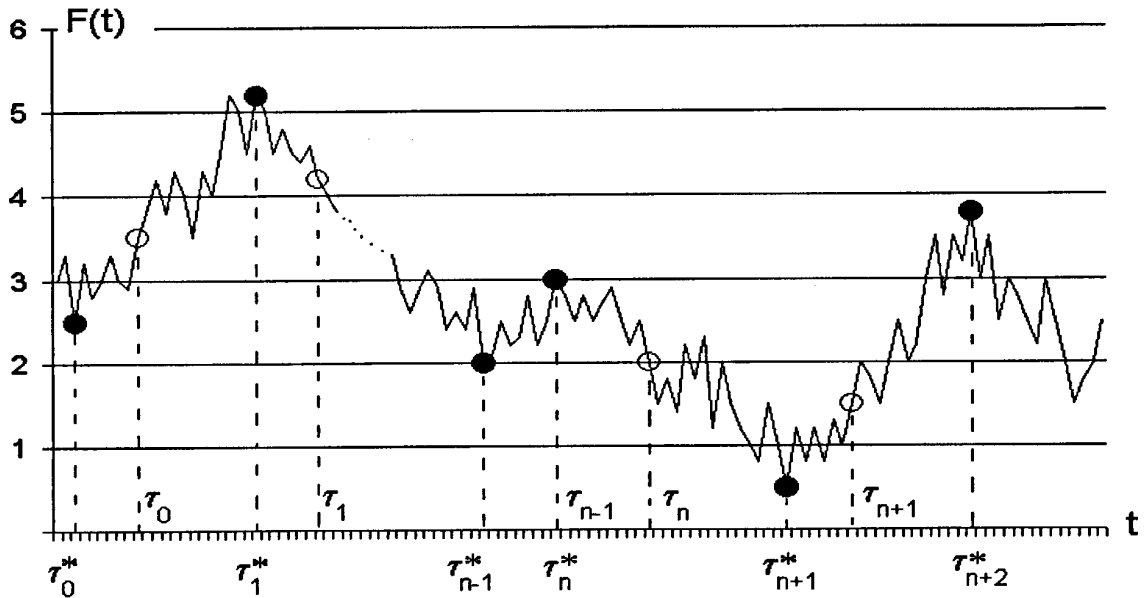


Рис. 1.1: Kagi H -построение, $H = 1$

3. В данном пункте определяется kagi H -построение на интервале $[0, T]$ для функции F , непрерывной справа и имеющей пределы слева. Суть данного построения по сравнению с непрерывным случаем остается той же, но техническая реализация требует более громоздкого алгорит-

ма. Прежде всего обозначим для произвольного $t \in [0, T]$

$$\overline{F}(t) = \overline{\lim_{u \rightarrow t}} F(u), \quad \underline{F}(t) = \underline{\lim_{u \rightarrow t}} F(u)$$

$$F(t-) = \lim_{h \rightarrow 0+} F(t-h), \quad F(t+) = \lim_{h \rightarrow 0+} F(t+h)$$

В качестве $F(0-)$, $F(T+)$ по определению положим $F(0)$, $F(T)$ соответственно. Поскольку F непрерывна справа и имеет пределы слева, то, очевидно, для любого $t \in [0, T]$ будет выполнено

$$\overline{F}(t) = \max\{F(t-), F(t)\}, \quad \underline{F}(t) = \min\{F(t-), F(t)\}, \quad F(t) = F(t+)$$

Для произвольного числа $H > 0$ такого, что выполнено условие (1.1), осуществляем индуктивное построение следующим образом.

База индукции: $\tau_0 = \inf\{u \in [0, T] : \sup_{[0, u]} F - \inf_{[0, u]} F \geq H\}$. Обозначим

$$\begin{aligned} \tau' &= \inf\{u \in [0, \tau_0] : \overline{F}(u) = \sup_{[0, \tau_0]} F\} \\ \tau'' &= \inf\{u \in [0, \tau_0] : \underline{F}(u) = \inf_{[0, \tau_0]} F\} \end{aligned}$$

Отметим, что τ' , τ'' корректно определены, так как $\sup_{[0, \tau_0]} F = \max_{[0, \tau_0]} \overline{F}$, $\inf_{[0, \tau_0]} F = \min_{[0, \tau_0]} \underline{F}$. Возможны три взаимоисключающих случая:

- $\tau' > \tau''$ (очевидно, что при этом $\tau' = \tau_0$). Тогда

$$\tau_0^* = \tau'', \quad F_0^* = \underline{F}(\tau''), \quad F_0 = F_0^* + H$$

- $\tau' < \tau''$ (очевидно, что при этом $\tau'' = \tau_0$). Тогда

$$\tau_0^* = \tau', \quad F_0^* = \overline{F}(\tau'), \quad F_0 = F_0^* - H$$

- $\tau' = \tau''$ (очевидно, что при этом $\tau' = \tau'' = \tau_0$). Для данного случая в свою очередь возможны два взаимоисключающих случая

1. $F(\tau_0) = \inf_{[0, \tau_0]} F$ (очевидно, что при этом $\overline{F}(\tau_0) = F(\tau_0-) = \sup F$).

Если $\overline{F}(\tau_0) - H \geq \inf_{[0, \tau_0]} F$ (например, как на рис. 1.2 для $\tau_0 = t_1$), то обозначим (с учетом того, что на самом деле имеет место $\overline{F}(\tau_0) - H = \inf_{[0, \tau_0]} F$)

$$\tau''' = \inf\{u \in [0, \tau_0) : \underline{F}(u) = \overline{F}(\tau_0) - H\}$$

$$\text{Тогда } \tau_0^* = \tau''', \quad F_0^* = \underline{F}(\tau'''), \quad F_0 = F_0^* + H (= F(\tau_0-))$$

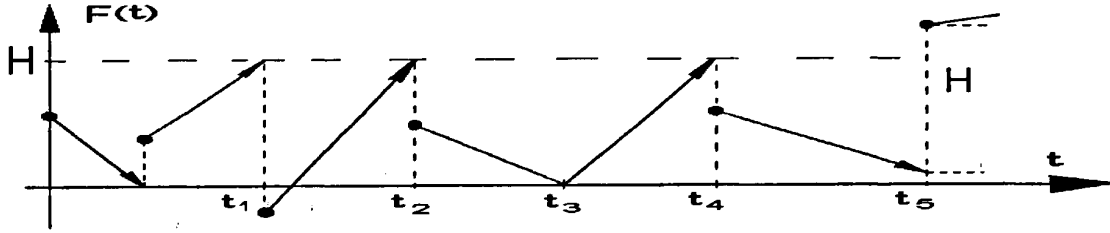


Рис. 1.2: Пример

Если $\overline{F}(\tau_0) - H < \inf_{[0, \tau_0]} F$, то

$$\tau_0^* = \tau_0, \quad F_0^* = \overline{F}(\tau_0), \quad F_0 = F_0^* - H$$

2. $F(\tau_0) = \sup_{[0, \tau_0]} F$ (очевидно, что при этом $\underline{F}(\tau_0) = F(\tau_0-) = \inf_{[0, \tau_0]} F$).

Если $\underline{F}(\tau_0) + H \leq \sup_{[0, \tau_0]} F$, то обозначим

$$\tau''' = \inf\{u \in [0, \tau_0) : \overline{F}(u) = \underline{F}(\tau_0) + H\}$$

$$\text{Тогда } \tau_0^* = \tau''', \quad F_0^* = \overline{F}(\tau'''), \quad F_0 = F_0^* - H (= F(\tau_0-))$$

Если $\underline{F}(\tau_0) + H > \sup_{[0, \tau_0]} F$, то

$$\tau_0^* = \tau_0, \quad F_0^* = \underline{F}(\tau_0), \quad F_0 = F_0^* + H$$

Иначе говоря, на первом шаге индукции получаем набор $(\tau_0^*, \tau_0, F_0^*, F_0)$, при этом $|F_0^* - F_0| = H$. Отметим, что для непрерывной на $[0, T]$ функции F будет выполнено $F(\tau_0^*) = F_0^*$, $F(\tau_0) = F_0$.

Шаг индукции ($n \rightarrow n + 1$): на n -ом шаге имеем последовательность $(\tau_k^*, \tau_k, F_k^*, F_k)_{k=0, \dots, n}$, при этом $|F_k^* - F_k| = H$, $k = 0, \dots, n$. Возможны два взаимоисключающих случая:

- $F_n - F_n^* = H$, тогда $\tau_{n+1} = \inf\{u \geq \tau_n : G(u) \geq H\}$, где

$$G(u) = \max\{F_n, \operatorname{ess\,sup}_{[\tau_n, u]} F\} - \underline{F}(u)$$

а $\operatorname{ess\,sup}_{[a, b]} F$ — существенный супремум F на $[a, b]$ ($\operatorname{ess\,sup}_{[a, a]} F = F(a)$ по определению). Кроме того, так как для поиска τ_{n+1} используется информация о значениях $F(u)$ только для $u \geq \tau_n$, то под $\underline{F}(\tau_n)$ для данного случая будем понимать $F(\tau_n)$. Пример на рис. 1.2 поясняет, почему для нахождения τ_{n+1} используется столь громоздкая функция G в отличие от, казалось бы естественной, функции $\sup_{[\tau_n, u]} F - \underline{F}(u)$. Действительно, из данного рисунка видно, что $\sup_{[\tau_n, u]} F - \underline{F}(t_5) = H$, но $\operatorname{ess\,sup}_{[t_4, t_5]} F - \underline{F}(t_5) < H$ (понятно, что $\tau_{n+1} \neq t_5$, если $\tau_n = t_4$). Кроме того $\sup_{[t_2, t_3]} F - \underline{F}(t_3) = \operatorname{ess\,sup}_{[t_2, t_3]} F - \underline{F}(t_3) < H$, но $F_n - \underline{F}(t_3) = H$, где $F_n = F(t_2-)$ (понятно, что в этом случае $\tau_{n+1} = t_3$, если $\tau_n = t_2$). Поскольку функция F непрерывна справа и имеет пределы слева, то τ_{n+1} определяется однозначным образом. Действительно, если в точке u у функции G происходит разрыв, то ситуации, когда $G(u) = G(u-) < H \leq G(u+)$, очевидно, быть не может, а значит искомый инфинум (то есть τ_{n+1}) достигается. Далее

$$\tau_{n+1}^* = \inf \left\{ u \in [\tau_n, \tau_{n+1}] : \overline{F}(u) = \max\{F_n, \operatorname{ess\,sup}_{[\tau_n, \tau_{n+1}]} F\} \right\}$$

$$F_{n+1}^* = \overline{F}(\tau_{n+1}^*), \quad F_{n+1} = F_{n+1}^* - H$$

где под $\overline{F}(\tau_n)$ здесь понимается $\max\{F_n, F(\tau_n)\}$ (что, впрочем, совпадает с обычным определением $\overline{F}(\tau_n)$, если рассматривать F на интервале $[0, \tau_{n+1}]$). Отметим, что для поиска τ_{n+1}^* используется лишь информация о значениях F_n и $(F(u))_{\tau_n \leq u \leq \tau_{n+1}}$. Кроме того здесь (в отличие от непрерывного случая) может выполняться соотношение $\tau_{n+1} = \tau_n$.

- $F_n - F_n^* = -H$, тогда

$$\tau_{n+1} = \inf\{u \geq \tau_n : \overline{F}(u) - \min\{F_n, \operatorname{ess\,inf}_{[\tau_n, u]} F\} \geq H\}$$

где $\operatorname{ess\,inf}_{[a, b]} F$ — существенный инфимум F на $[a, b]$ ($\operatorname{ess\,inf}_{[a, a]} F = F(a)$), а под $\overline{F}(\tau_n)$ здесь понимается $F(\tau_n)$. Далее

$$\tau_{n+1}^* = \inf\left\{u \in [\tau_n, \tau_{n+1}] : \underline{F}(u) = \min\{F_n, \operatorname{ess\,inf}_{[\tau_n, \tau_{n+1}]} F\}\right\}$$

$$F_{n+1}^* = \underline{F}(\tau_{n+1}^*), \quad F_{n+1} = F_{n+1}^* + H$$

где под $\underline{F}(\tau_n)$ здесь понимается $\min\{F_n, F(\tau_n)\}$.

В силу того, что функция F является непрерывной справа и имеет пределы слева, количество точек $t \in [0, T]$, для которых $|\overline{F}(t) - \underline{F}(t)| \geq H$, конечно. Поэтому, очевидно, для некоторого конечного n^* мы остановимся, то есть τ_{n^*+1} не существует. Положим тогда $N = n^* + 1$, $\tau_N = T$, $F_N = F(\tau_N)$

- если $F_{n^*} - F_{n^*}^* = H$, то $F_N^* = \overline{F}(\tau_N^*)$, где

$$\tau_N^* = \inf\left\{u \in [\tau_{n^*}, T] : \overline{F}(u) = \max\{F_{n^*}, \sup_{[\tau_{n^*}, T]} F\}\right\}$$

а под $\overline{F}(\tau_{n^*})$ здесь понимается $\max\{F_{n^*}, F(\tau_{n^*})\}$. Отметим, что здесь уже рассматривается $\sup_{[\tau_{n^*}, T]} F$, а не $\operatorname{ess\,sup}_{[\tau_{n^*}, T]} F$, так как возможна ситуация, как в примере на рис. 1.2 для $T = t_5$

- если $F_{n^*} - F_n^* = -H$, то $F_N^* = \underline{F}(\tau_N^*)$, где

$$\tau_N^* = \inf \left\{ u \in [\tau_{n^*}, T] : \underline{F}(u) = \min\{F_{n^*}, \inf_{[\tau_{n^*}, T]} F\} \right\}$$

а под $\underline{F}(\tau_{n^*})$ здесь понимается $\min\{F_{n^*}, F(\tau_{n^*})\}$.

В итоге на интервале $[0, T]$ для некоторого конечного $N = N_T(H, F) \geq 1$ получим последовательность $(\tau_n^*, \tau_n, F_n^*, F_n)_{n=0, \dots, N}$, которую будем называть *kagi H-построением* для функции F на $[0, T]$. Отметим, что по построению $|F_n - F_n^*| = H$ для $n = 0, \dots, N - 1$. Если условие (1.1) не выполнено, полагаем $N = 0$, $\tau_0^* = \tau_0 = 0$, $F_0^* = F_0 = F(0)$. Заметим, что если функция F является непрерывной на $[0, T]$, то $F_n^* = F(\tau_n^*)$, $F_n = F(\tau_n)$, поэтому в этом случае в *kagi H-построении* значения F_n^*, F_n будем опускать.

4. В данном пункте определяется *genko H-построение* для непрерывной на интервале $[0, T]$ функции F . Для произвольного $H > 0$ такого, что

$$\sup_{t \in [0, T]} |F(t) - F(0)| \geq H \quad (1.2)$$

построим последовательность моментов времени $(\rho_m^*, \rho_m)_{m=0, \dots, M}$ для некоторого $M = M_T(H, F)$ следующим образом (см. также рис. 1.3). Для начала определим индуктивно последовательность $(\tilde{\rho}_i)_{i=0, \dots, \tilde{M}}$.

База индукции: $\tilde{\rho}_0 = 0$.

Шаг индукции ($i \rightarrow i + 1$): $\tilde{\rho}_{i+1} = \inf\{t \geq \tilde{\rho}_i : |F(t) - F(\tilde{\rho}_i)| = H\}$.

В силу непрерывности F , очевидно, что для некоторого конечного $\tilde{M} = \tilde{M}_T(H, F) \geq 1$ мы остановимся, то есть $|F(\tilde{\rho}_{\tilde{M}}) - F(u)| < H$ для всех $u \in [\tilde{\rho}_{\tilde{M}}, T]$. Отметим, что по построению $|F(\tilde{\rho}_i) - F(\tilde{\rho}_{i-1})| = H$ для $i = 1, \dots, \tilde{M}$. Тогда искомая последовательность индуктивно выделяется из $(\tilde{\rho}_i)_{i=0, \dots, \tilde{M}}$ следующим образом.

База индукции: $\rho_0 = \tilde{\rho}_1$, $\rho_0^* = \tilde{\rho}_0 (= 0)$.

Шаг индукции ($m \rightarrow m+1$): на m -ом шаге имеем $\rho_k = \tilde{\rho}_{i_k}$, $\rho_k^* = \tilde{\rho}_{i_k-1}$, $k = 0, \dots, m$, тогда

$$i_{m+1} = \min\{j > i_m : (F(\tilde{\rho}_{j-1}) - F(\tilde{\rho}_{j-2}))(F(\tilde{\rho}_j) - F(\tilde{\rho}_{j-1})) < 0\}$$

$$\rho_{m+1} = \tilde{\rho}_{i_{m+1}}, \quad \rho_{m+1}^* = \tilde{\rho}_{i_{m+1}-1}$$

Поскольку \tilde{M} конечно, то для некоторого m^* остановимся, то есть i_{m^*+1} не существует. Обозначим тогда

$$M = m^* + 1, \quad \rho_M = T, \quad \rho_M^* = \tilde{\rho}_{\tilde{M}}$$

В итоге на интервале $[0, T]$ для некоторого конечного $M = M_T(H, F) \geq 1$ получим последовательность $(\rho_m^*, \rho_m)_{m=0, \dots, M}$, для которой $|F(\rho_m) - F(\rho_m^*)| = H$ для $m = 0, \dots, M-1$. Если условие (1.2) не выполнено, полагаем $M = 0$, $\rho_0^* = \rho_0 = 0$. Последовательность $(\rho_m^*, \rho_m)_{m=0, \dots, M}$ будем называть *renko H -построением* для функции F на $[0, T]$.

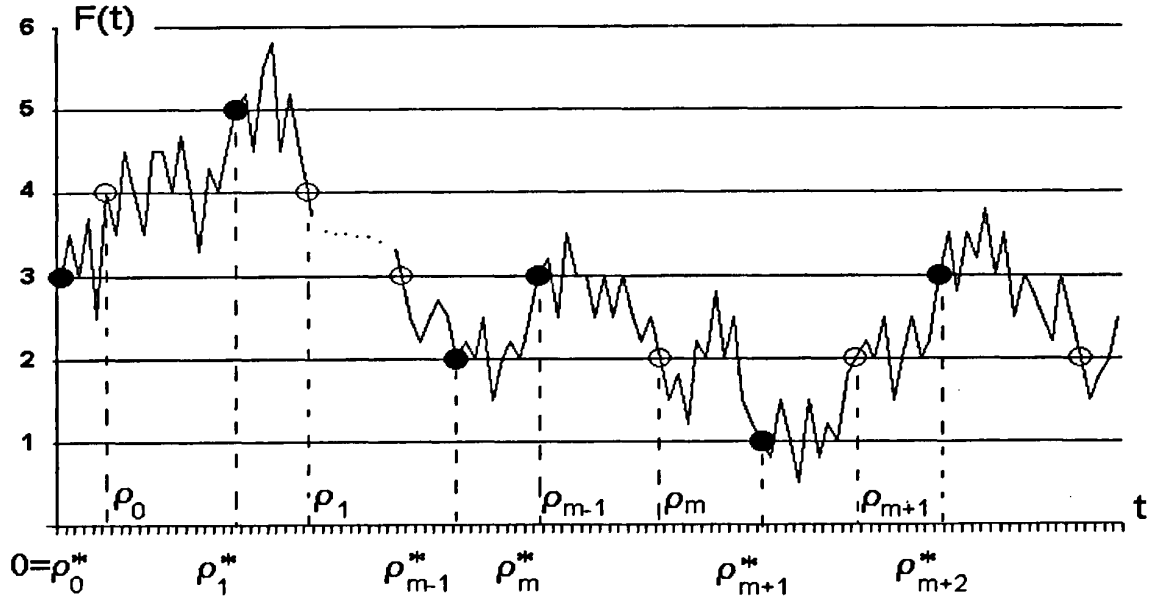


Рис. 1.3: Renko H -построение, $H = 1$

Заметим, что $(\rho_m^*)_{m=0,\dots,M}$ — есть последовательность $(\tilde{\rho}_i)_{i=0,\dots,\widetilde{M}}$, из которой выкинуты все такие $\tilde{\rho}_i$, $i = 1, \dots, \widetilde{M} - 1$, для которых

$$(F(\tilde{\rho}_i) - F(\tilde{\rho}_{i-1}))(F(\tilde{\rho}_{i+1}) - F(\tilde{\rho}_i)) > 0$$

Иначе говоря моменты $(\rho_m^*)_{m=0,\dots,M}$ являются точками, в которых достигается локальный экстремум последовательности $(X(\tilde{\rho}_i))_{i=0,\dots,\widetilde{M}}$.

5. В данном пункте определяется генко H -построение на интервале $[0, T]$ для функции F , непрерывной справа и имеющей пределы слева. В случае непрерывной функции одними из ключевых точек в генко H -построении являются точки, в которых значение функции равно $F(0) + kH$, где k — целое число. В общем случае функция может не достигать данных уровней (ввиду разрывов), поэтому помимо последовательностей $(\tilde{\rho}_i)_{i=0,\dots,\widetilde{M}}$, $(\rho_m^*, \rho_m)_{m=0,\dots,M}$ потребуется определять еще соответствующие им значения $(\widetilde{F}_i)_{i=0,\dots,\widetilde{M}}$, $(F_m^*, F_m)_{m=0,\dots,M}$, которые соответствуют уровням вида $F(0) + kH$. Вначале, как и в непрерывном случае, для произвольного числа $H > 0$ такого, что выполнено условие (1.2), индуктивно строим последовательность $(\tilde{\rho}_i, \widetilde{F}_i)_{i=0,\dots,\widetilde{M}}$

База индукции: $\tilde{\rho}_0 = 0$, $\widetilde{F}_0 = F(0)$.

Шаг индукции ($i \rightarrow i + 1$): на i -ом шаге имеем последовательность $(\tilde{\rho}_j, \widetilde{F}_j)_{j=0,\dots,i}$. Тогда

$$\tilde{\rho}_{i+1} = \inf\{t \geq \tilde{\rho}_i : \sup_{[\tilde{\rho}_i, t]} |F - \widetilde{F}_i| \geq H\}$$

Возможны два взаимоисключающих случая:

- $\tilde{\rho}_{i+1} = \tilde{\rho}_i$, тогда $\widetilde{F}_{i+1} = \widetilde{F}_i + \text{sign}(F(\tilde{\rho}_{i+1}) - \widetilde{F}_i)H$
- $\tilde{\rho}_{i+1} > \tilde{\rho}_i$, тогда, очевидно, имеет место соотношение $|F(\tilde{\rho}_{i+1}-) - \widetilde{F}_i| \leq H$. Рассмотрим два взаимоисключающих случая:

1. $|F(\tilde{\rho}_{i+1}-) - \tilde{F}_i| < H$ (очевидно, что при этом $|F(\tilde{\rho}_{i+1}) - \tilde{F}_i| \geq H$).

Тогда

$$\tilde{F}_{i+1} = \tilde{F}_i + \text{sign}(F(\tilde{\rho}_{i+1}) - \tilde{F}_i)H$$

2. $|F(\tilde{\rho}_{i+1}-) - \tilde{F}_i| = H$. Тогда

$$\tilde{F}_{i+1} = \tilde{F}_i + \text{sign}(F(\tilde{\rho}_{i+1}-) - \tilde{F}_i)H$$

В силу того, что функция F является непрерывной справа и имеет пределы слева, количество точек $t \in [0, T]$, для которых $|F(t) - F(t-)| \geq H$, конечно. Поэтому, очевидно, для некоторого конечного $\tilde{M} = \tilde{M}_T(H, F) \geq 1$ мы остановимся, то есть получим последовательность $(\tilde{\rho}_i, \tilde{F}_i)_{i=0, \dots, \tilde{M}}$, где по построению выполнено $|\tilde{F}_i - \tilde{F}_{i-1}| = H$ для $i = 1, \dots, \tilde{M}$. Отметим, что если функция F непрерывна на $[0, T]$, то $\tilde{F}_i = F(\tilde{\rho}_i)$, $i = 1, \dots, \tilde{M}$. Тогда искомая последовательность индуктивно выделяется из только что определенной следующим образом.

База индукции: $\rho_0^* = \tilde{\rho}_0 (= 0)$, $F_0^* = \tilde{F}_0 (= F(0))$, $\rho_0 = \tilde{\rho}_1$, $F_0 = \tilde{F}_1$.

Шаг индукции ($m \rightarrow m+1$): на m -ом шаге имеем $(\rho_k, \rho_k^*, F_k^*, F_k)_{k=0, \dots, m}$, где $\rho_k = \tilde{\rho}_{i_k}$, $\rho_k^* = \tilde{\rho}_{i_k-1}$, $k = 0, \dots, m$, при этом $|F_k^* - F_k| = H$, $k = 0, \dots, m$, тогда

$$i_{m+1} = \min\{j > i_m : (\tilde{F}_{j-1} - \tilde{F}_{j-2})(\tilde{F}_j - \tilde{F}_{j-1}) < 0\}$$

$$\rho_{m+1} = \tilde{\rho}_{i_{m+1}}, \quad \rho_{m+1}^* = \tilde{\rho}_{i_{m+1}-1}$$

$$F_{m+1} = \tilde{F}_{i_{m+1}}, \quad F_{m+1}^* = \tilde{F}_{i_{m+1}-1}$$

Поскольку \tilde{M} конечно, то для некоторого m^* остановимся, то есть i_{m^*+1} не существует. Обозначим тогда

$$M = m^* + 1, \quad \rho_M = T, \quad \rho_M^* = \tilde{\rho}_{\tilde{M}}$$

$$F_M = F(T), \quad F_M^* = \tilde{F}_{\tilde{M}}$$

В итоге на интервале $[0, T]$ для некоторого конечного $M = M_T(H, F) \geq 1$ получим последовательность $(\rho_m^*, \rho_m, F_m^*, F_m)_{m=0, \dots, M}$, которую будем называть *генко H -построением* для функции F на $[0, T]$. Отметим, что по построению выполнено $|F_m - F_m^*| = H$ для $m = 0, \dots, M-1$. Если условие (1.2) не выполнено, полагаем $M = 0, \rho_0^* = \rho_0 = 0, F_0^* = F_0 = F(0)$. Подчеркнем, что если функция F является непрерывной, то $F_m^* = F(\rho_m^*), F_m = F(\rho_m)$, поэтому в этом случае в *генко H -построении* значения F_m^*, F_m будем опускать.

Важно заметить, что данные конструкции определяются адаптивно, что, в частности, делает корректным пересчет *kagi*, *генко H -построения* при возрастании T . Корректность понимается в том смысле, что если для произвольных моментов T_1, T_2 построены последовательности $(\rho_m^*, \rho_m, F_m^*, F_m)_{m=0, \dots, M_1}, (\hat{\rho}_m^*, \hat{\rho}_m, \hat{F}_m^*, \hat{F}_m)_{m=0, \dots, M_2}$ для функции F на интервале $[0, T_1], [0, T_2]$ соответственно, то выполнено для любого $m = 0, \dots, \min\{M_1, M_2\} - 1$

$$\hat{\rho}_m^* = \rho_m^*, \quad \hat{\rho}_m = \rho_m, \quad \hat{F}_m^* = F_m^*, \quad \hat{F}_m = F_m$$

Аналогично для *kagi H -построения*.

6. Рассмотрим теперь процесс $X = (X(t))_{t \geq 0}$, который задан на некотором стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P})$ и принимает значения в \mathbf{R}^1 , а траектории X являются непрерывными справа и имеющими пределы слева функциями. Определим для процесса X на интервале $[0, T]$ последовательности $(\tau_n^*, \tau_n, X_n^*, X_n)_{n=0, \dots, N_T(H, X)}, (\rho_m^*, \rho_m, X_m^*, X_m)_{m=0, \dots, M_T(H, X)}$ потраекторно по описанным выше алгоритмам. Важно отметить, что из построения следует, что моменты $(\rho_m)_{m=0, \dots, M}, (\tau_n)_{n=0, \dots, N}$ являются марковскими, а величины (немарковские) ρ_m^*, τ_n^* для $m = 0, \dots, M, n = 0, \dots, N$ определяются соответственно в моменты ρ_m, τ_n исходя из поведения X на интервале $[\rho_{m-1}, \rho_m], [\tau_{n-1}, \tau_n]$ ($\rho_{-1} = \tau_{-1} = 0$).

Определение 1.1.1 Последовательность $(\tau_n^*, \tau_n, X_n^*, X_n)_{n=0, \dots, N_T(H, X)}$ будем называть *kagi H-построением* для процесса X на $[0, T]$. ■

Определение 1.1.2 Последовательность $(\rho_m^*, \rho_m, X_m^*, X_m)_{m=0, \dots, M_T(H, X)}$ будем называть *renko H-построением* для процесса X на $[0, T]$. ■

В случае, когда траектории процесса X являются непрерывными функциями, выполнено

$$X_n = X(\tau_n), \quad X_n^* = X(\tau_n^*), \quad n = 0, \dots, N$$

$$X_m = X(\rho_m), \quad X_m^* = X(\rho_m^*), \quad m = 0, \dots, M$$

поэтому данные величины в обозначении kagi, renko H -построения будем опускать. Выделим некоторые свойства данных последовательностей, которые очевидным образом следуют из построения:

$$\begin{aligned} \tau_n^* \leq \tau_n \leq \tau_{n+1}^*, \quad |X_n^* - X_n| = H \quad n = 0, \dots, N-1 \\ |X_N^* - X_N| < H \\ \text{sign}(X_n^* - X_{n-1}^*) = \text{sign}(X_{n-1} - X_{n-1}^*) = \\ = (-1)^{n+1} \text{sign}(X_0 - X_0^*) \quad n = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \rho_m^* \leq \rho_m \leq \rho_{m+1}^*, \quad |X_m^* - X_m| = H \quad m = 0, \dots, M-1 \\ |X_M^* - X_M| < H \\ \text{sign}(X_m^* - X_{m-1}^*) = \text{sign}(X_{m-1} - X_{m-1}^*) = \\ = (-1)^{m+1} \text{sign}(X_0 - X_0^*) \quad m = 1, \dots, M \end{aligned} \quad (1.4)$$

В случае, когда траектории процесса X являются непрерывными функциями, имеет место $\tau_n^* < \tau_n$ для $n = 0, \dots, N-1$, $\rho_m^* < \rho_m$ для $m = 0, \dots, M-1$.

1.2 Kagi, genko H -инверсия. Связь kagi, genko H -построений с кусочно-монотонными аппроксимациями.

1. Для случайного процесса $X = (X(t))_{t \geq 0}$, траектории которого непрерывны справа и имеют пределы слева, на интервале $[0, T]$ рассмотрим величины $N_T(H, X)$, $M_T(H, X)$ соответственно для kagi, genko H -построений из определений 1.1.1, 1.1.2. Отметим, что данные величины в силу построения корректны, то есть зависят только от H , T и самого процесса X , поэтому корректны следующие определения

Определение 1.2.1 Величину $N_T(H, X)$ будем называть kagi H -инверсией процесса X на $[0, T]$. ■

Определение 1.2.2 Величину $M_T(H, X)$ будем называть genko H -инверсией процесса X на $[0, T]$. ■

Величины $N_T(H, X)$, $M_T(H, X)$ играют важную роль при определении меры изменчивости процесса X , то есть волатильности, одного из ключевых понятий финансовой математики (подробнее см. параграф 1.5). В следующем пункте будет показана связь kagi, genko H -инверсии с кусочно-монотонными приближениями.

2. Оказывается, что kagi, genko H -построения, определенные в предыдущем параграфе, являются оптимальными в определенном смысле кусочно-монотонными приближениями траекторий процесса в случае, когда они являются непрерывными функциями.

Определение 1.2.3 Непрерывная на $[0, T]$ функция f является кусочно-монотонной порядка $n \in \mathbf{N} = \{1, 2, \dots\}$, если $\exists (t_0, \dots, t_n) : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ и f монотонна на каждом интервале $\Delta_i = [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \dots, n$ и не является такой на любой паре соседних отрезков Δ_i . ■

Функцию $f \equiv \text{const}$ считаем кусочно-монотонной нулевого порядка. Обозначим

Σ_n — множество кусочно-монотонных функций порядка не выше n

Для функции $F(t)_{t \in [0, T]}$ при данном натуральном n будем рассматривать ее наилучшее приближение элементами семейства Σ_n , которое определяется соотношением

$$\mathcal{M}_n(F) = \inf_{f \in \Sigma_n} \sup_{t \in [0, T]} |F(t) - f(t)|. \quad (1.5)$$

Функцию $f_n \in \Sigma_n$, для которой достигается инфимум, будем называть *элементом наилучшего приближения*. Величины (1.5) достаточно активно изучались в теории приближения функций (в частности, в связи с тем, что $\mathcal{M}_n(F)$ оценивает снизу соответствующие наилучшие полиномиальные и рациональные приближения функции F). В работе [10] был предложен алгоритм вычисления величин (1.5) и нахождения элементов наилучшего приближения $f_n \in \Sigma_n$, $n = 1, 2, \dots$ для произвольной непрерывной на $[0, T]$ функции F . Отметим, что f_n определена, вообще говоря, неединственным образом.

Для наших целей потребуется функция, в определенном смысле обратная к $\mathcal{M}_n(F)$:

$$\tilde{N}_T(H, F) = \min \left\{ n = 0, 1, 2, \dots : \mathcal{M}_n(F) < \frac{H}{2} \right\} \quad (1.6)$$

Знание величины (1.6) позволяет ответить на вопрос: сколько раз на временном интервале $[0, T]$ меняется направление изменения функции F , если мы пренебрегаем изменениями на величину, меньшую H .

Рассмотрим *кагi* H -построение функции F непрерывной на интервале $[0, T]$, то есть последовательность $(\tau_n^*, \tau_n)_{n=0, \dots, N_T(H, F)}$. Определим на $[0, T]$ кусочно-монотонную функцию \tilde{F} порядка $N = N_T(H, F)$ следующим образом. Интервалы монотонности $[\theta_{n-1}, \theta_n]$ для $n = 1, \dots, N$

определяются из соотношений

$$\theta_0 = 0, \quad \theta_N = T, \quad \theta_n = \tau_n^* \quad \text{для } n = 1, \dots, N-1$$

Тогда функция $\widetilde{F}(t)$ для $t \in [0, T]$ имеет вид

$$\widetilde{F}(t) = \frac{\underline{G}(t) + \overline{G}(t)}{2}, \quad (1.7)$$

где значения функций \underline{G} , \overline{G} на каждом интервале $[\theta_{n-1}, \theta_n]$, $n = 1, \dots, N$ определяются для $t \in [\theta_{n-1}, \theta_n]$ из соотношений:

- если $F(\theta_n) > F(\theta_{n-1})$, то

$$\underline{G}(t) = \min_{t \leq u \leq \theta_n} F(u), \quad \overline{G}(t) = \max_{\theta_{n-1} \leq u \leq t} F(u)$$

- если $F(\theta_n) < F(\theta_{n-1})$, то

$$\underline{G}(t) = \min_{\theta_{n-1} \leq u \leq t} F(u), \quad \overline{G}(t) = \max_{t \leq u \leq \theta_n} F(u)$$

Отметим, что $\widetilde{F}(\theta_n) = F(\theta_n)$ для всех $n = 1, \dots, N-1$. Если $N = 0$, тогда полагаем $\widetilde{F} \equiv (\max_{[0, T]} F + \min_{[0, T]} F)/2$. Для кагi H -построения имеет место следующая лемма.

Лемма 1.2.4 Для любой непрерывной на $[0, T]$ функции F и любого $H > 0$ выполнено

$$\widetilde{N}_T(H, F) = N_T(H, F) \quad (1.8)$$

при этом функция \widetilde{F} вида (1.7) является элементом наилучшего приближения функции F из семейства Σ_N для $N = N_T(H, F)$.

Доказательство. Следуя работе [10], для непрерывной на $[0, T]$ функции F и произвольных a, b , $0 \leq a \leq b \leq T$ введем обозначения:

$$\begin{aligned} \omega_F^+(a, b) &= \max_{a \leq x \leq y \leq b} (F(y) - F(x)) \\ \omega_F^-(a, b) &= \max_{a \leq x \leq y \leq b} (F(x) - F(y)) \\ \omega_1^F(a, b) &= \min\{\omega_F^+(a, b), \omega_F^-(a, b)\}, \\ \omega_0^F(a, b) &= \max\{\omega_F^+(a, b), \omega_F^-(a, b)\} \end{aligned}$$

Заметим, что $\omega_0^F(a, b) = \max_{[a, b]} F - \min_{[a, b]} F$, а если $\omega_1^F(a, b) = 0$, то F монотонна на $[a, b]$. Будем считать, что $\omega_0^F(0, T) \geq H$, иначе $\tilde{N}_T(H, F) = N_T(H, F) = 0$ и доказывать нечего. Доказательство разобьем на несколько этапов.

І э т а п. Докажем сначала неравенство $\tilde{N}_T(H, F) \leq N_T(H, F)$. Для этого рассмотрим функцию \tilde{F} вида (1.7) для соответствующего $\text{kagi } H$ -построения. Легко понять, что на каждом интервале $[\theta_{n-1}, \theta_n]$, $n = 1, \dots, N$ выполнено

$$\sup_{t \in [\theta_{n-1}, \theta_n]} |F(t) - \tilde{F}(t)| = \frac{\omega_1^F(\theta_{n-1}, \theta_n)}{2}$$

Но в силу свойства $\text{kagi } H$ -построения, очевидно, $\omega_1^F(\theta_{n-1}, \theta_n) < H$ для каждого $n = 1, \dots, N$, поэтому имеет место соотношение

$$\mathcal{M}_N(F) \leq \sup_{t \in [0, T]} |F(t) - \tilde{F}(t)| < H/2$$

а значит искомое неравенство выполнено.

ІІ э т а п. Докажем равенство (1.8) в случае, когда

$$|F(T) - F(0)| = \omega_0^F(0, T) \geq H$$

Отметим, что в этом случае в точках $0, T$ функция F достигает глобальных экстремумов. Если $\omega_1^F(0, T) < H$, то искомое неравенство очевидным образом выполнено: $N_T(H, F) = 1$ и в силу того, что $\mathcal{M}_1(F) = \frac{\omega_1^F(0, T)}{2}$ (см. также [10], стр.151), выполнено $\tilde{N}_T(H, F) = 1$.

Если $\omega_1^F(0, T) \geq H$, то обозначим через t'_1, t''_1 точки из $[0, T]$ такие, что $t'_1 < t''_1$ и $|F(t'_1) - F(t''_1)| = \omega_1^F(0, T)$. Очевидно, в точках t'_1, t''_1 достигается глобальный экстремум функции F соответственно на отрезках $[0, t'_1]$, $[t'_1, T]$, кроме того выполнено

$$\omega_0^F(a, b) = |F(a) - F(b)| \geq H$$

где отрезок $[a, b]$ обозначает один из отрезков $[0, t'_1]$, $[t'_1, t''_1]$, $[t''_1, T]$. Далее, если выполнено хотя бы одно из неравенств

$$\omega_1^F(0, t'_1) \geq H, \omega_1^F(t'_1, t''_1) \geq H, \omega_1^F(t''_1, T) \geq H,$$

то для соответствующего отрезка, на котором данное неравенство имеет место, производим аналогичным образом дробление соответствующими точками t'_2, t''_2 . И так далее до тех пор, пока на некотором конечном (в силу непрерывности F) шаге $K \geq 1$ не остановимся. То есть, пока не получим некоторое разбиение (u_0, \dots, u_I) , $0 = u_0 < \dots < u_I = T$, $I = 2K+1$ такое, что множество точек $\{u_0, \dots, u_I\} = \{0, T, (t'_k, t''_k)_{k=1, \dots, K}\}$. При этом для всех $i = 1, \dots, I$ выполнено

$$\omega_1^F(u_{i-1}, u_i) < H, \quad \omega_0^F(u_{i-1}, u_i) = |F(u_i) - F(u_{i-1})| \geq H$$

Легко понять, что $I = \widetilde{N}_T(H, F)$. Действительно, кусочно-монотонная функция вида (1.7) с соответствующим разбиением $(\theta_0, \dots, \theta_N) = (u_0, \dots, u_I)$ будет доставлять наилучшее приближение для функции F на $[0, T]$ семейством Σ_I , при этом

$$\sup_{t \in [0, T]} |F(t) - \widetilde{F}(t)| = \frac{1}{2} \max_{i=1, \dots, I} \omega_1^F(u_{i-1}, u_i) < \frac{H}{2}$$

Кроме того по построению следует, что $\mathcal{M}_n(F) \geq H/2$ для $n < I$ (см. также [10], стр.151). С другой стороны очевидно, что $I \leq N_T(H, F)$, поскольку выполнено (см. также дальнейшие рассуждения III этапа)

$$\begin{aligned} \omega_0^F(u_{i-1}, u_i) &= |F(u_i) - F(u_{i-1})| \geq H, \quad i = 1, \dots, I \\ (F(u_i) - F(u_{i-1}))(F(u_{i+1}) - F(u_i)) &< 0, \quad i = 1, \dots, I-1 \end{aligned}$$

А значит, с учетом доказанного ранее, искомое равенство выполнено.

III этап. Докажем равенство (1.8) в случае, когда интервал $[0, T]$ допускает разбиение $(t_j)_{j=0, \dots, J}$, $J \geq 2$, $0 = t_0 < \dots < t_J = T$, что выполнено

$$\begin{aligned} \omega_0^F(t_{j-1}, t_j) &= |F(t_j) - F(t_{j-1})| \geq H, \quad j = 1, \dots, J \\ (F(t_j) - F(t_{j-1}))(F(t_{j+1}) - F(t_j)) &< 0, \quad j = 1, \dots, J-1 \end{aligned}$$

Рассмотрим последовательность $(\tau_n^*(j))_{n=0,\dots,N_j}$ из соответствующего kagi H -построения для функции F на интервале $[t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, \dots, J$. При этом без ограничения общности можно считать, что

$$\tau_0^*(1) = 0, \quad \tau_{N_j}^*(J) = T, \quad \tau_{N_j}^*(j) = \tau_0^*(j+1) = t_j \quad \text{для } j = 1, \dots, J-1$$

Как несложно понять, последовательность

$$(\tau_0^*(1), ((\tau_n^*(j))_{n=1,\dots,N_j})_{j=1,\dots,J}) \quad (1.9)$$

будет соответствовать kagi H -построению для функции F на интервале $[0, T]$, а значит $N_T(H, F) = \sum_{j=1}^J N_j$. Обозначим через \tilde{N}_j величину (1.6), определенную на интервале $[t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, \dots, J$. Также, очевидно, что величина $\tilde{N}_T(H, F) = \sum_{j=1}^J \tilde{N}_j$, но по доказанному выше следует, что $N_j = \tilde{N}_j$ для любого $j = 1, \dots, J$, следовательно искомое равенство выполнено. Кроме того функция вида (1.7) с соответствующим разбиением (1.9) будет доставлять наилучшее приближение для функции F на $[0, T]$ семейством $\Sigma_{N_T(H, F)}$.

IV э т а п. Докажем равенство (1.8) для произвольного случая. Для этого осуществим дробление интервала $[0, T]$ следующим образом. Обозначим, через T'_1, T''_1 точки из $[0, T]$ такие, что $T'_1 < T''_1$ и

$$|F(T'_1) - F(T''_1)| = \omega_0^F(0, T)$$

Для определенности считаем, что $F(T'_1) = \min_{[0, T]} F$. Если $\omega_0^F(0, T'_1) \geq H$, то ищем точку T'_2 , что $F(T'_2) = \max_{[0, T'_1]} F$ и так далее (с чередованием минимумов и максимумов), пока для некоторого L -ого шага не получим $\omega_0^F(0, T'_L) < H$. Отметим, что L конечно в силу непрерывности F . Если $\omega_0^F(T''_1, T) \geq H$, то аналогичным образом дробим интервал $[T''_1, T]$, то есть строим последовательность (T''_m) , пока для некоторого конечного M не выполнится условие $\omega_0^F(T''_M, T) < H$. Иначе говоря получаем разби-

ние $(s_0, s_1, \dots, s_P) = (T'_L, \dots, T'_1, T''_1, \dots, T''_M)$ такое, что $0 \leq s_0 < \dots < s_P \leq T$ и выполнено

$$\begin{aligned}\omega_0^F(s_{p-1}, s_p) &= |F(s_p) - F(s_{p-1})| \geq H, \quad p = 1, \dots, P \\ \omega_0^F(0, s_1) &= \omega_0^F(s_0, s_1), \quad \omega_0^F(s_{P-1}, T) = \omega_0^F(s_{P-1}, s_P) \\ (F(s_p) - F(s_{p-1}))(F(s_{p+1}) - F(s_p)) &< 0, \quad p = 1, \dots, P-1 \\ \omega_0^F(0, s_0) &< H, \quad \omega_0^F(s_P, T) < H\end{aligned}$$

Рассмотрим *kagi* H -построение для функции F на $[s_0, s_P]$, то есть последовательность $(\tau_n^*, \tau_n)_{n=0, \dots, N'}$. Несложно понять, что данную последовательность без ограничения общности можно рассматривать как *kagi* H -построение для функции F на $[0, T]$, так как $\omega_0^F(0, s_0) < H$, $\omega_0^F(s_P, T) < H$, а значения $F(s_0)$, $F(s_P)$ являются глобальными экстремумами функции F соответственно на интервале $[0, s_1]$, $[s_{P-1}, T]$. А значит $N_T(H, F) = N'$. Рассмотрим также величину \tilde{N}' вида (1.6), определенную для функции F на $[s_0, s_P]$. По доказанному выше $N' = \tilde{N}'$, но при этом, очевидно, $\tilde{N}_T(H, F) = \tilde{N}'$, поэтому равенство (1.8) доказано. Кроме того, по построению кусочно-монотонная функция вида (1.7) из семейства $\Sigma_{N_T(H, F)}$ будет доставлять наилучшее приближение для функции F на $[0, T]$. ■

Рассмотрим теперь *genko* H -построение непрерывной функции F на интервале $[0, T]$, то есть последовательность $(\rho_m^*, \rho_m)_{m=0, \dots, M_T(H, F)}$. Заметим, что в *genko* H -построении играет роль только конечное число моментов времени $(\tilde{\rho}_i)_{i=0, \dots, \tilde{M}_T(H, F)}$. Для дискретного множества $(F(\tilde{\rho}_i))_{i=0, \dots, \tilde{M}}$ определим непрерывную на $[0, T]$ функцию \widehat{F} следующим образом:

$$\widehat{F}(t) = \begin{cases} F(\tilde{\rho}_i) + (F(\tilde{\rho}_{i+1}) - F(\tilde{\rho}_i)) \frac{t - \tilde{\rho}_i}{\tilde{\rho}_{i+1} - \tilde{\rho}_i}, & t \in [\tilde{\rho}_i, \tilde{\rho}_{i+1}], i = 0, \dots, \tilde{M} - 1 \\ F(\tilde{\rho}_{\tilde{M}}), & t \in [\tilde{\rho}_{\tilde{M}}, T] \end{cases} \quad (1.10)$$

Очевидно, что функция \widehat{F} является кусочно-монотонной, зависящей только от H , T и функции F . При этом понятно, что порядок данной функции равен $M_T(H, F)$. Иначе говоря, доказана следующая

Лемма 1.2.5 Для любой непрерывной на $[0, T]$ функции F и любого $H > 0$ величина $M_T(H, F)$ является порядком кусочно-монотонной функции \widehat{F} вида (1.10). ■

1.3 Kagi, renko H -волатильность

1. Вводимое в настоящем параграфе понятие играет ключевую роль в решении искомой задачи, то есть при построении соответствующих арбитражных стратегий. Рассмотрим сначала случай процесса $X = (X(t))_{t \geq 0}$, траектории которого непрерывны, и рассмотрим kagi, renko H -построения для него на $[0, T]$, то есть последовательности $(\tau_n^*, \tau_n)_{n=0, \dots, N}$, $(\rho_m^*, \rho_m)_{m=0, \dots, M}$ соответственно, где $N = N_T(H, X)$, $M = M_T(H, X)$. Определим для них следующие величины

$$V_T(H, X) = \sum_{n=1}^N |X(\tau_n^*) - X(\tau_{n-1}^*)|. \quad (1.11)$$

$$U_T(H, X) = \sum_{m=1}^M |X(\rho_m^*) - X(\rho_{m-1}^*)|, \quad (1.12)$$

Отметим, что эти определения корректны, в том смысле, что данные величины зависят только от H , T и самого процесса X (значения $X(\tau_n^*)$, $X(\rho_m^*)$ определены однозначно). Более того, как будет показано ниже, величины $V_T(H, X)$, $U_T(H, X)$ являются следующими вариационными характеристиками процесса X :

$$\widetilde{V}_T(H, X) = \sup_{\mathbf{T}_1} \sum_{l=1}^L |X(t_l) - X(t_{l-1})|, \quad (1.13)$$

$$\widetilde{U}_T(H, X) = \sup_{\mathbf{T}_2} \sum_{k=1}^K |X(t_k) - X(t_{k-1})|, \quad (1.14)$$

где \mathbf{T}_1 — множество всех конечных разбиений (t_0, \dots, t_L) таких, что

$$0 \leq t_0 < \dots < t_L \leq T$$

$$|X(t_l) - X(t_{l-1})|/H \in [1, +\infty) \quad \text{для } l = 1, \dots, L;$$

T_2 — множество всех конечных разбиений (t_0, \dots, t_K) таких, что

$$0 = t_0 < \dots < t_K \leq T$$

$$|X(t_k) - X(t_{k-1})|/H \in \mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \text{ для } k = 1, \dots, K.$$

Величину (1.13) будем называть *H-вариацией* реализации процесса X на $[0, T]$, а величину (1.14) — *H-флуктуацией* реализации процесса X на $[0, T]$. Если для какого-то $H > 0$ не существует соответствующих разбиений из (1.13), (1.14), полагаем указанные величины равными нулю. Имеет место следующая лемма:

Лемма 1.3.1 *Пусть реализации процесса X являются непрерывными функциями на $[0, T]$. Тогда для любого $H > 0$ выполнены соотношения*

$$V_T(H, X) = \tilde{V}_T(H, X) \quad (1.15)$$

$$U_T(H, X) = \tilde{U}_T(H, X) \quad (1.16)$$

Доказательство. Если H таково, что соответствующее *kagi, genko H*-построение для процесса X на $[0, T]$ тривиально, то есть $N_T(H, X) = 0$, $M_T(H, X) = 0$, то тогда, очевидно, соотношения (1.15), (1.16) выполнены. В дальнейшем будем считать, что *kagi, genko H*-построение для процесса X на $[0, T]$ нетривиально, то есть $N_T(H, X) \geq 1$, $M_T(H, X) \geq 1$.

Рассмотрим произвольную функцию F непрерывную на $[0, T]$ и определим для произвольных (t_0, t_1, \dots, t_L) таких, что $0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_L \leq T$, функционал

$$\Psi(t_0, \dots, t_L) = \sum_{l=1}^L |F(t_l) - F(t_{l-1})|$$

Для доказательства соотношений (1.15), (1.16) в виду непрерывности траекторий процесса X и в силу того, что величины (1.11), (1.12), (1.13), (1.14) определяются потраекторно, достаточно показать, что для моментов $(\tau_n^*)_{n=0, \dots, N}$, $(\rho_m^*)_{m=0, \dots, M}$ из соответствующего *kagi, genko*

H -построения для функции F на $[0, T]$ выполнено

$$\Psi(\tau_0^*, \dots, \tau_N^*) = \widetilde{V}_T(H, F) \quad (1.17)$$

$$\Psi(\rho_0^*, \dots, \rho_M^*) = \widetilde{U}_T(H, F) \quad (1.18)$$

Докажем сначала соотношение (1.17). Рассмотрим произвольное разбиение $(t_0, \dots, t_L) \in \mathbf{T}_1$ (\mathbf{T}_1 — множество из определения величины (1.13)) и покажем, что

$$\Psi(t_0, \dots, t_L) \leq \Psi(\tau_0^*, \dots, \tau_N^*) \quad (1.19)$$

Если $L > 1$ и существует $i = 1, \dots, L-1$, что

$$(F(t_i) - F(t_{i-1}))(F(t_{i+1}) - F(t_i)) > 0,$$

то точку t_i из (t_0, \dots, t_L) выкидываем, при этом понятно, что

$$|F(t_{i+1}) - F(t_{i-1})| = |F(t_i) - F(t_{i-1})| + |F(t_{i+1}) - F(t_i)|$$

И так далее до тех пор, пока не получим некоторое разбиение $(s_0, \dots, s_M) \in \mathbf{T}_1$ для некоторого $M \leq L$, $(s_0, \dots, s_M) \subseteq (t_0, \dots, t_L)$, что выполнено

$$(F(s_i) - F(s_{i-1}))(F(s_{i+1}) - F(s_i)) < 0, \quad i = 1, \dots, M-1$$

При это, очевидно,

$$\Psi(t_0, \dots, t_L) = \Psi(s_0, \dots, s_M)$$

Положим для определенности $F(\tau_1^*) - F(\tau_0^*) > 0$ и рассмотрим все $\tau_i^* \in [0, s_1]$, пусть это точки $(\tau_0^*, \dots, \tau_I^*)$. Заметим, что это множество не пусто, так как $\tau_0^* \in [0, s_1]$ (действительно, поскольку $(s_0, \dots, s_M) \in \mathbf{T}_1$, то $|F(s_1) - F(s_0)| \geq H$, а значит в силу определения τ_0^* выполнено искомое). Возможны два случая.

1 с л у ч а й. $F(s_1) - F(s_0) > 0$. Для этого случая возможны два варианта (А) и (В).

(А) I – нечетное число. Тогда в разбиении (s_0, \dots, s_M) меняем точки s_0, s_1 на $\tau_0^*, \dots, \tau_I^*$. Тогда, очевидно, что новое разбиение

$$(u_0, \dots, u_P) = (\tau_0^*, \dots, \tau_I^*, s_2, \dots, s_M), \quad P = I + M$$

принадлежит множеству \mathbf{T}_1 (в случае $M = 1$ полагаем $(u_0, \dots, u_P) = (\tau_0^*, \dots, \tau_I^*)$). Для этого достаточно заметить, что $F(\tau_I^*) \geq F(s_1)$. Действительно, в противном случае либо $s_1 \geq \tau_{I+1}^*$, что противоречит нечетности I , либо $s_1 \in [\tau_I^*, \tau_{I+1}^*)$, что противоречит тому, что $F(\tau_I^*)$ — есть максимум F на $[\tau_I^*, \tau_{I+1}^*]$.

(В) I – четное число (в частности 0). Тогда в случае $F(s_1) - F(\tau_I^*) \geq H$ точку s_0 меняем на $\tau_0^*, \dots, \tau_I^*$. Тогда, очевидно, что новое разбиение

$$(u_0, \dots, u_P) = (\tau_0^*, \dots, \tau_I^*, s_1, \dots, s_M), \quad P = I + M + 1$$

принадлежит \mathbf{T}_1 . Если $F(s_1) - F(\tau_I^*) < H$, точки s_0, s_1 меняем на $\tau_0^*, \dots, \tau_{I-1}^*$. В этом случае новое разбиение

$$(u_0, \dots, u_P) = (\tau_0^*, \dots, \tau_{I-1}^*, s_2, \dots, s_M), \quad P = I + M - 1$$

также принадлежит \mathbf{T}_1 (в случае $M = 1$ полагаем $(u_0, \dots, u_P) = (\tau_0^*, \dots, \tau_{I-1}^*)$). Действительно, во-первых отметим, что тогда $I > 0$, иначе было бы выполнено (в силу того, что $F(\tau_0^*) = \min_{[0, \tau_1^*]} F$)

$$F(s_1) - F(s_0) \leq F(s_1) - F(\tau_0^*) < H$$

Противоречие с тем, что $(s_0, \dots, s_M) \in \mathbf{T}_1$. Во-вторых, в силу предположений о том, что $F(\tau_1^*) > F(\tau_0^*)$ и I – четное, очевидно, будет выполнено

$$F(\tau_{I-1}^*) \geq F(\tau_I^*) + H > F(s_1)$$

А значит в случае $M \geq 2$ будет выполнено $F(\tau_{I-1}^*) - F(s_2) \geq H$.

2 с л у ч а й. $F(s_1) - F(s_0) < 0$. Также возможны возможны два варианта (А) и (В).

(А) I – четное число. Тогда в разбиении (s_0, \dots, s_M) меняем точки s_0, s_1 на $\tau_0^*, \dots, \tau_I^*$, при этом новое разбиение

$$(u_0, \dots, u_P) = (\tau_0^*, \dots, \tau_I^*, s_2, \dots, s_M), \quad P = I + M$$

принадлежит \mathbf{T}_1 (если $M = 1$, полагаем $(u_0, \dots, u_P) = (\tau_0^*, \dots, \tau_I^*)$), так как, очевидно, $F(\tau_I^*) \leq F(s_1)$ (иначе противоречие либо с тем, что I – четное, либо с тем, что $F(\tau_I^*)$ – есть минимум F на $[\tau_I^*, \tau_{I+1}^*]$).

(В) I – нечетное число. Тогда в случае $F(\tau_I^*) - F(s_1) \geq H$ точку s_0 меняем на $\tau_0^*, \dots, \tau_I^*$, при этом новое разбиение

$$(u_0, \dots, u_P) = (\tau_0^*, \dots, \tau_I^*, s_1, \dots, s_M), \quad P = I + M + 1$$

очевидно, принадлежит \mathbf{T}_1 . Если $F(\tau_I^*) - F(s_1) < H$, точки s_0, s_1 меняем на $\tau_0^*, \dots, \tau_{I-1}^*$, тогда новое разбиение

$$(u_0, \dots, u_P) = (\tau_0^*, \dots, \tau_{I-1}^*, s_2, \dots, s_M), \quad P = I + M - 1$$

также принадлежит \mathbf{T}_1 (в случае $M = 1$ полагаем $(u_0, \dots, u_P) = (\tau_0^*, \dots, \tau_{I-1}^*)$), так как легко понять, что, во-первых, $I > 1$, во-вторых, $F(\tau_{I-1}^*) < F(s_1)$.

В итоге для обоих случаев 1, 2 получаем разбиение $(u_0, \dots, u_P) \in \mathbf{T}_1$ такое, что

$$(u_0, \dots, u_J) = (\tau_0^*, \dots, \tau_J^*)$$

для некоторого $J \geq 0$, при этом по построению очевидным образом выполнено

$$\Psi(u_0, \dots, u_P) \geq \Psi(s_0, \dots, s_M)$$

$$(F(u_i) - F(u_{i-1}))(F(u_{i+1}) - F(u_i)) < 0, \quad i = 1, \dots, P - 1$$

Далее действуем индуктивно. Если $J = P$, то останавливаемся, то есть неравенство (1.19) выполнено. Иначе для интервала $[u_J, u_{J+1}]$ проведем следующее дробление. Для определенности положим $F(u_{J+1}) - F(u_J) > 0$

и рассмотрим все $\tau_i^* \in (u_J, u_{J+1}]$. Пусть это точки $(\tau_{J+1}^*, \dots, \tau_{J+Q}^*)$ для некоторого Q ($\tau_J^* = u_J$). Возможны три случая:

1 с л у ч а й. $Q = 0$, то есть таких точек не найдется. Тогда u_{J+1} заменяем на τ_{J+1}^* , при этом, во-первых, τ_{J+1}^* существует, иначе получаем противоречие с тем, что колебание F на $[\tau_N^*, T]$ меньше H . Во-вторых, в силу предположения $F(u_{J+1}) - F(u_J) > 0$ (а значит $F(\tau_{J+1}^*) - F(\tau_J^*) > 0$) будет выполнено $F(\tau_{J+1}^*) \geq F(u_{J+1})$.

2 с л у ч а й. Q — нечетное число. Тогда точку u_{J+1} заменяем на $\tau_{J+1}^*, \dots, \tau_{J+Q}^*$, при этом, очевидно, $F(\tau_{J+Q}^*) \geq F(u_{J+1})$.

3 с л у ч а й. Q — четное число, $Q \geq 2$. Тогда в случае $F(u_{J+1}) - F(\tau_{J+Q}^*) \geq H$ к исходному разбиению добавляем $(\tau_{J+1}^*, \dots, \tau_{J+Q}^*)$. Если $F(u_{J+1}) - F(\tau_{J+Q}^*) < H$, то меняем u_{J+1} на $(\tau_{J+1}^*, \dots, \tau_{J+Q-1}^*)$, при этом, очевидно, $F(\tau_{J+Q-1}^*) > F(u_{J+1})$.

Для всех трех случаев полученное новое разбиение, которое обозначим через (w_0, \dots, w_K) , принадлежит \mathbf{T}_1 , кроме того по построению будет выполнено

$$\begin{aligned} (w_0, \dots, w_{J'}) &= (\tau_0^*, \dots, \tau_{J'}^*) \text{ для некоторого } J' > J, \\ \Psi(w_0, \dots, w_K) &\geq \Psi(u_0, \dots, u_P) \\ (F(w_i) - F(w_{i-1}))(F(w_{i+1}) - F(w_i)) &< 0 \quad \forall i = 1, \dots, K-1 \end{aligned}$$

Аналогичную процедуру проводим с интервалом $[w_{J'}, w_{J'+1}]$ и так далее до тех пор, пока не получим разбиение, состоящее только из точек $(\tau_i^*)_{i=0, \dots, N}$. Это действительно произойдет на некотором конечном шаге индукции, так как для каждого шага индукции у нас к предыдущему разбиению добавляется хотя бы одна новая точка τ_i^* из соответствующего $\text{kagi } H$ -построения. Кроме того, если на некотором шаге разбиение содержит все точки $(\tau_i^*)_{i=0, \dots, N}$, то в силу того, что $F(\tau_N^*)$ является экстремумом F на интервале $[\tau_{N-1}^*, T]$, оно никаких других точек содержать не будет. Итак, неравенство (1.19) выполнено для любого $(t_0, \dots, t_L) \in \mathbf{T}_1$,

а значит $\tilde{V}_T(H, F) \leq \Psi(\tau_0^*, \dots, \tau_N^*)$. Обратное неравенство очевидно, а следовательно соотношение (1.17) доказано.

Докажем теперь соотношение (1.18). Для этого определим функцию \tilde{F} следующим образом

$$\tilde{F}(t) = \begin{cases} F(\tilde{\rho}_i) & \text{если } t \in [\tilde{\rho}_i, \tilde{\rho}_{i+1}), i = 0, \dots, \tilde{M} - 1 \\ F(\tilde{\rho}_{\tilde{M}}) & \text{если } t \in [\tilde{\rho}_{\tilde{M}}, T] \end{cases}$$

где моменты $(\tilde{\rho}_0, \dots, \tilde{\rho}_{\tilde{M}})$ являются определяющими для генко H -построения (см. параграф 1.1). С одной стороны, очевидно, $(\tilde{\rho}_0, \dots, \tilde{\rho}_{\tilde{M}}) \in \mathbf{T}_2$, с другой стороны для произвольного разбиения $(t_0, t_1, \dots, t_K) \in \mathbf{T}_2$ выполнено следующее:

$$\forall k = 0, \dots, K \quad \exists m = m(k) = 0, \dots, \tilde{M}, \quad \text{что} \quad F(t_k) = F(\tilde{\rho}_m).$$

Отсюда следует, что $\tilde{U}_T(H, F) = \tilde{U}_T(H, \tilde{F})$. Но для кусочно-постоянной функции \tilde{F} с конечным числом (так как F непрерывна) интервалов постоянства равенство $\Psi(\rho_0^*, \dots, \rho_M^*) = \tilde{U}_T(H, \tilde{F})$ выполнено очевидным образом. Действительно, набор $(\rho_0^*, \dots, \rho_M^*)$ получается из $(\tilde{\rho}_0, \dots, \tilde{\rho}_{\tilde{M}})$ выкидыванием точек $\tilde{\rho}_i$, для которых

$$(F(\tilde{\rho}_i) - F(\tilde{\rho}_{i-1}))(F(\tilde{\rho}_{i+1}) - F(\tilde{\rho}_i)) > 0.$$

А значит $\Psi(\rho_0^*, \dots, \rho_M^*) = \tilde{U}_T(H, \tilde{F}) = \tilde{U}_T(H, F)$. ■

2. Поскольку величины $V_T(H, X)$, $U_T(H, X)$, как следует из данной леммы, являются соответствующими вариационными характеристиками процесса X , уместно в этой связи привести понятие, широко используемое в финансовой математике, которое также основано на вариационных характеристиках процесса. Рассмотрим величину

$$Z_T(\Delta, X) = \sum_{k=1}^{\left[\frac{T}{\Delta}\right]} |X(k\Delta) - X((k-1)\Delta)| \quad (1.20)$$

где $\Delta, T > 0$, а $[\cdot]$ означает взятие целой части. Величину $Z_T(\Delta, X)$ называют Δ -вариацией процесса X на интервале $[0, T]$ (см. [11] стр. 419). Схожесть величин (1.13), (1.14) и (1.20) состоит в том, что для достаточно „регулярных“ процессов (например, обладающих конечной вариацией на $[0, T]$) они при малых H и Δ соответственно близки к полной вариации, которая есть по определению

$$\sup \sum_{n=1}^N |X(t_n) - X(t_{n-1})|$$

где супремум берется по всем разбиениям (t_0, t_1, \dots, t_N) таким, что $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_N \leq T$. Принципиальным же отличием является то, что в случае Δ -вариации используется, так называемый, “римановский” подход, то есть значения процесса группируются по временной оси. В настоящей же работе предлагается “лебеговский” вариант построения вариационных характеристик, то есть существенны лишь значения X , а временная шкала не имеет значения. Кроме того, как уже отмечалось выше, в случае использования Δ -вариации на финансовом рынке процесс X определяет цены $(S(t))_{t \geq 0}$ финансового актива посредством соотношения $S(t) = S(0)e^{X(t)}$, в то время как мы предполагаем, что $S(t) = X(t)$ (данное предположение не носит принципиальный характер, однако придает вводимым ниже понятиям большую наглядность).

При статистическом анализе процесса X обычно оперируют не с (1.20), а с нормированной величиной

$$\zeta_T(\Delta, X) = \frac{Z_T(\Delta, X)}{\left[\frac{T}{\Delta}\right]} \quad (1.21)$$

так называемой, Δ -волатильностью. Отметим, что величина $\zeta_T(\Delta, X)$ весьма популярна в последнее время в финансовой математике, так как позволяет оценить параметр Харста H для соответствующих процессов, широко используемых при построении модели рынка со свойством самоподобия, о которой говорилось выше. А именно, пусть процесс $X_1 =$

$(X_1(t))_{t \geq 0}$ — есть фрактальное броуновское движение с параметром H , $X_2 = (X_2(t))_{t \geq 0}$ — строго α -устойчивый процесс Леви, $\alpha \in (0, 2]$. Известно (см., например, [11], стр. 418), что для всякого $\Delta > 0$ выполнены соотношения

$$E|X_1(t + \Delta) - X_1(t)| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Delta^H \quad (1.22)$$

$$E|X_2(t + \Delta) - X_2(t)| = \Delta^H E|X_2(1)| \quad (1.23)$$

(в последнем равенстве переобозначено $H = 1/\alpha$). Вместе с тем было обнаружено свойство, состоящее в том, что Δ -волатильность на финансовых рынках ведет себя *весьма регулярно* в том смысле, что ее оценка для достаточно большого T удовлетворяет соотношению

$$\zeta_T(\Delta, X) \approx C_T \Delta^H \quad (1.24)$$

где константа C_T зависит только от вида финансового актива X (см., например, [22]). Сравнивая (1.24) с (1.22) и (1.23), можно сказать, что соотношение (1.24) говорит в пользу гипотезы о том, что поведение цены того или иного актива удовлетворительно может описываться указанными выше процессами X_1 и X_2 с параметром H . В частности, на FX-рынке для основных валют (см. [22])

$$H \approx 0.585$$

3. Ввиду отмеченной выше схожести Δ -вариации с H -вариацией и H -флуктуацией напрашивается рассмотрение для (1.13), (1.14) нормированных величин, аналогично Δ -волатильности. В силу леммы 1.3.1 такая нормировка возникает естественным образом. А именно, рассмотрим следующие величины

$$\eta_T(H, X) = \frac{V_T(H, X)}{N_T(H, X)} \quad (1.25)$$

$$\xi_T(H, X) = \frac{U_T(H, X)}{M_T(H, X)} \quad (1.26)$$

Поскольку все величины, участвующие в определении $\eta_T(H, X)$ и $\xi_T(H, X)$, корректно определены, то есть зависят только от X, H, T , то следующие определения также корректны.

Определение 1.3.2 Величину (1.25) будем называть *kagi H-волатильностью* процесса X на $[0, T]$. ■

Определение 1.3.3 Величину (1.26) будем называть *renko H-волатильностью* процесса X на $[0, T]$. ■

Отметим, что данные определения весьма наглядны с практической точки зрения, так как характеризуют средний размер приращения цены X на соответствующих интервалах монотонности. Иначе говоря H -волатильность говорит о том, насколько сильны тенденции роста и падения, если пренебрегать изменениями на величину, меньшую H . Использование термина „ H -волатильность“ представляется целесообразным ввиду указанного выше сходства данных понятий с Δ -волатильностью.

4. Рассмотрим теперь общий случай, то есть траектории процесса $X = (X(t))_{t \geq 0}$ являются непрерывными справа и имеющими пределы слева функциями. Построим *kagi, renko H-построения* для процесса X на $[0, T]$, то есть соответствующие последовательности

$$(\tau_n^*, \tau_n, X_n^*, X_n)_{n=0, \dots, N}, \quad (\rho_m^*, \rho_m, X_m^*, X_m)_{m=0, \dots, M}$$

где $N = N_T(H, X)$, $M = M_T(H, X)$. Наряду с величинами (1.25), (1.26) для произвольного $p \geq 1$ будем рассматривать также величины

$$\eta_T^{(p)}(H, X) = \frac{V_T^{(p)}(H, X)}{N_T(H, X)} \quad (1.27)$$

$$\xi_T^{(p)}(H, X) = \frac{U_T^{(p)}(H, X)}{M_T(H, X)} \quad (1.28)$$

где $V_T^{(p)}(H, X)$, $U_T^{(p)}(H, X)$ определяются из соотношений

$$V_T^{(p)}(H, X) = \sum_{n=1}^N |X_n^* - X_{n-1}^*|^p, \quad (1.29)$$

$$U_T^{(p)}(H, X) = \sum_{m=1}^M |X_m^* - X_{m-1}^*|^p, \quad (1.30)$$

Поскольку все величины, участвующие в определении $\eta_T^{(p)}(H, X)$ и $\xi_T^{(p)}(H, X)$, корректно определены, то есть зависят только от X , H , T , и p , то следующие определения также корректны.

Определение 1.3.4 Величину (1.27) будем называть *кад \bar{H} -волатильностью порядка p процесса X на $[0, T]$* . ■

Определение 1.3.5 Величину (1.28) будем называть *гепко H -волатильностью порядка p процесса X на $[0, T]$* . ■

Отметим, что если для $p \geq 1$ по аналогии с (1.13) определить величину

$$\tilde{V}_T^{(p)}(H, X) = \sup_{\mathbf{T}_1} \sum_{l=1}^L |X(t_l) - X(t_{l-1})|^p \quad (1.31)$$

где \mathbf{T}_1 — множество разбиений из (1.13), то для $p > 1$ (в отличие от $p = 1$) вообще говоря $\tilde{V}_T^{(p)}(H, X) \neq V_T^{(p)}(H, X)$ даже в случае, когда траектории процесса X являются непрерывными функциями (заметим, что величина $\tilde{V}_T^{(p)}(H, X)$ при малом H близка к p -вариации Винера, определенной в работе [33]). Иначе говоря, обобщение леммы 1.3.1 для $p > 1$ невозможно. Очевидно, что для гепко случая данное обобщение также невозможно.

1.4 Свойства H -волатильности и H -инверсии винеровского процесса

1. Введенные в предыдущих параграфах понятия обладают рядом

свойств в случае, когда X — есть винеровский процесс. Для *кагі*, *генко* H -волатильности порядка p имеет место следующая теорема.

Теорема 1.4.1 (Об H -волатильности винеровского процесса)

Пусть $W = (W(t))_{t \geq 0}$ — стандартный винеровский процесс, тогда для любых $p \geq 1$, $H > 0$, $\sigma > 0$ выполнено

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \xi_T^{(p)}(H, \sigma W) = R_W(p) H^p \quad (\text{н.н.}), \quad (1.31)$$

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \eta_T^{(p)}(H, \sigma W) = K_W(p) H^p \quad (\text{н.н.}), \quad (1.32)$$

где $R_W(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{2^n}$, $K_W(p) = \int_0^{+\infty} (1+x)^p e^{-x} dx$.

Доказательство. Доказательство разобьем на два шага.

1 Ш А Г. Случай $\sigma = 1$. Докажем сначала соотношение (1.32). Рассмотрим *кагі* H -построение для процесса W на интервале $[0, T]$, то есть последовательность $(\tau_n^*, \tau_n)_{n=0, \dots, N}$ для $N = N_T(H, W)$ и обозначим для $n = 1, \dots, N$

$$\alpha_n = |W(\tau_n^*) - W(\tau_{n-1}^*)|^p \quad (1.33)$$

$$\Delta_n = \tau_n - \tau_{n-1} \quad (1.34)$$

Отметим, что из соотношений (1.3) следует для любого $n = 1, \dots, N-1$:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= |W(\tau_n^*) - W(\tau_n) + W(\tau_n) - W(\tau_{n-1}) + W(\tau_{n-1}) - W(\tau_{n-1}^*)|^p \\ &= \left(2H + (W(\tau_n) - W(\tau_{n-1})) \operatorname{sign}(W(\tau_n^*) - W(\tau_{n-1}^*)) \right)^p \end{aligned} \quad (1.35)$$

Поскольку величина $\operatorname{sign}(W(\tau_n^*) - W(\tau_{n-1}^*))$ полностью определяется значениями $(W(t))_{t \in [\tau_{n-1}, \tau_n]}$, а моменты $(\tau_n)_{n=0, \dots, N}$ являются марковскими, то в силу свойства строгой марковости винеровского процесса величины $(\alpha_n)_{n=1, \dots, N-1}$ являются независимыми. Отметим, что $(\Delta_n)_{n=1, \dots, N-1}$ также являются независимыми величинами. При этом понятно, что для любого $n = 1, \dots, N-1$

$$\Delta_n \stackrel{Law}{=} \theta \quad (1.36)$$

$$\alpha_n \stackrel{Law}{=} (2H + W(\theta))^p \quad (1.37)$$

где величины θ определяются из соотношения

$$\theta = \inf\{u \geq 0 : \max_{[0,u]} W - W(u) = H\} \quad (1.38)$$

Для того чтобы описать распределение θ , определим величину θ' :

$$\theta' = \inf\{u \geq 0 : |W(u)| = H\} \quad (1.39)$$

Поскольку в силу теоремы Леви (см., например, [25], стр.211)

$$(|W(t)|, t \geq 0) \stackrel{Law}{=} (\max_{[0,t]} W - W(t), t \geq 0)$$

то величины θ' и θ имеют одинаковые распределения, а значит, учитывая то, что $\mathbf{E}\theta' < \infty$ (см., например, [11], стр.303), в силу тождества Вальда для винеровского процесса $\mathbf{E}\theta' = \mathbf{E}(W(\theta'))^2$ (см. [6], стр.122), получим

$$\mathbf{E}\theta = \mathbf{E}\theta' = H^2 \quad (1.40)$$

откуда, в частности, следует, что $N_T(H, W) \rightarrow +\infty$ (п.н.) при $T \rightarrow +\infty$. Действительно, во-первых отметим, что при возрастании T корректным образом пересчитывается $\text{kagi } H$ -построение (см. параграф 1.1), то есть переход к пределу $T \rightarrow +\infty$ в соотношении (1.32) происходит корректно. Во-вторых, процесс $N_T = N_T(H, W)$ можно считать процессом восстановления (см. [12], стр.322), поскольку, как легко понять

$$(N_T, T \geq 0) \stackrel{Law}{=} (1 + \sum_{n=1}^{\infty} \chi\{\Delta_0 + \sum_{i=1}^n \Delta_i \leq T\}, T \geq 0) \quad (1.41)$$

где $\chi\{A\}$ — индикатор множества A , а $(\Delta_n)_{n \geq 1}$ — последовательность независимых одинаково распределенных положительных случайных величин с распределением (1.36), а величина Δ_0 есть

$$\Delta_0 = \inf\{u \geq 0 : \max_{[0,u]} W - \min_{[0,u]} W = H\} \quad (1.42)$$

Поэтому из того, что для любого $n \geq 1$ выполнено $E\Delta_n = H^2 < +\infty$ (см.(1.40), также очевидно, что $E\Delta_0 < +\infty$) следует $N_T \rightarrow +\infty$ (п.н.) при $T \rightarrow +\infty$. Тогда в силу сказанного выше и в силу усиленного закона больших чисел для последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ получаем, что

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \eta_T^{(p)}(H, W) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=1}^N \alpha_n}{N} = E(2H + W(\theta))^p \quad (\text{п.н.})$$

Найти $E(2H + W(\theta))^p$ несложно, так как известно преобразование Лапласа величины $\max_{0 \leq t \leq \theta} W(t)$ (см.[25], стр.429, соотношение 4.19), то есть

$$E \left(e^{-\lambda \max_{0 \leq t \leq \theta} W(t)} \right) = \frac{1}{1 + \lambda H} \quad \lambda \geq 0$$

Отсюда очевидным образом следует, что величина $H + W(\theta)$, равная по построению $\max_{0 \leq t \leq \theta} W(t)$, имеет экспоненциальное распределение с показателем $\frac{1}{H}$. Следовательно

$$E(2H + W(\theta))^p = \int_0^{+\infty} (H + x)^p \frac{e^{-\frac{x}{H}}}{H} dx = \int_0^{+\infty} (H + Hy)^p e^{-y} dy$$

Полагая $K_W(p) = \int_0^{+\infty} (1 + y)^p e^{-y} dy$, получаем соотношение (1.32).

Для доказательства соотношения (1.31) рассмотрим генко H -построение для процесса W на интервале $[0, T]$, то есть последовательность $(\rho_m^*, \rho_m)_{m=0, \dots, M}$ для $M = M_T(H, W)$, а также последовательность $(\tilde{\rho}_i)_{i=0, \dots, \tilde{M}}$ для $\tilde{M} = \tilde{M}_T(H, W)$, по которой определяется генко H -построение (см. параграф 1.1). Обозначим для $i = 1, \dots, \tilde{M}$, $m = 1, \dots, M$

$$\beta_m = |W(\rho_m^*) - W(\rho_{m-1}^*)|^p \quad (1.43)$$

$$\gamma_i = (W(\tilde{\rho}_i) - W(\tilde{\rho}_{i-1}))/H \quad (1.44)$$

$$\Lambda_i = \tilde{\rho}_i - \tilde{\rho}_{i-1} \quad (1.45)$$

Используя соотношения (1.4), аналогично равенству (1.35) можно показать, что для любого $m = 1, \dots, M - 1$ выполнено

$$\beta_m = \left(2H + (W(\rho_m) - W(\rho_{m-1})) \operatorname{sign}(W(\rho_m^*) - W(\rho_{m-1}^*)) \right)^p \quad (1.46)$$

Поскольку моменты $(\rho_m)_{m=0, \dots, M}$ являются марковскими, то в силу свойства строгой марковости винеровского процесса величины $(\beta_m)_{m=1, \dots, M-1}$ являются независимыми (доказывается аналогично случаю kagi). Отметим, что в силу марковости моментов $(\tilde{\rho}_i)_{i=0, \dots, \widetilde{M}}$ величины $(\gamma_i)_{i=1, \dots, \widetilde{M}}$, $(\Lambda_i)_{i=1, \dots, \widetilde{M}}$ также являются соответственно независимыми, причем для любого $i = 1, \dots, \widetilde{M}$, очевидно,

$$\Lambda_i \stackrel{Law}{=} \theta' \quad (1.47)$$

$$\gamma_i \stackrel{Law}{=} \pm 1 \text{ с вероятностью } 1/2 \quad (1.48)$$

где величина θ' имеет вид (1.39). Рассмотрим также величины ν , $(S_k)_{k \geq 1}$, которые по определению есть

$$S_k = \sum_{i=1}^k \gamma_i \quad (1.49)$$

$$\nu = \min\{k \geq 1 : S_k = k - 2\} \quad (1.50)$$

Заметим, что величина ν определяет момент первого падения S_k , при этом, очевидно, что

$$E\nu^p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{2^n} \quad (1.51)$$

Из (1.46) легко понять, что

$$\beta_m \stackrel{Law}{=} (2H + S_\nu H)^p = \nu^p H^p \quad (1.52)$$

Отметим, что, как и в случае kagi, переход к пределу $T \rightarrow +\infty$ происходит корректно. Процесс $M_T = M_T(H, W)$ можно, как и процесс

$N_T = N_T(H, W)$, считать процессом восстановления, поскольку (аналогично (1.41))

$$(M_T, T \geq 0) = (1 + \sum_{m=1}^{\infty} \chi\{\tilde{\Delta}_0 + \sum_{i=1}^m \tilde{\Delta}_i \leq T\}, T \geq 0) \quad (1.53)$$

где $\tilde{\Delta}_0$ распределена также как и величина (1.39), а $(\tilde{\Delta}_m)_{m \geq 1}$ — последовательность независимых одинаково распределенных положительных случайных величин

$$\tilde{\Delta}_m (= \rho_m - \rho_{m-1}) \stackrel{Law}{=} \sum_{i=1}^{\nu} \Lambda_i \quad (1.54)$$

Заметим, что в силу тождества Вальда (см. [12], стр. 663) и соотношения (1.47) для любого $m \geq 1$ выполнено

$$\mathbf{E} \tilde{\Delta}_m = \mathbf{E} \nu \mathbf{E} \theta' \quad (1.55)$$

поэтому из (1.51), (1.40) следует, что $\mathbf{E} \tilde{\Delta}_m \leq +\infty$ для любого $m \geq 0$, а значит $M_T(H, W) \rightarrow +\infty$ (п.н.) при $T \rightarrow +\infty$.

Тогда в силу сказанного выше и в силу усиленного закона больших чисел для последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин $(\beta_m)_{m \geq 1}$ получаем, что

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \xi_T^{(p)}(H, W) = \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{m=1}^M \beta_m}{M} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{2^n} \right) H^p \quad (\text{п.н.})$$

2 Ш А Г. Случай произвольного $\sigma > 0$. Воспользуемся свойством автомодельности винеровского процесса:

$$(\sigma W(t); 0 \leq t \leq T) \stackrel{Law}{=} (W(t); 0 \leq t \leq \sigma^2 T)$$

Отсюда очевидным образом следуют соотношения

$$(M_T(H, \sigma W), U_T^{(p)}(H, \sigma W)) \stackrel{Law}{=} (M_{\sigma^2 T}(H, W), U_{\sigma^2 T}^{(p)}(H, W)) \quad (1.56)$$

$$(N_T(H, \sigma W), V_T^{(p)}(H, \sigma W)) \stackrel{Law}{=} (N_{\sigma^2 T}(H, W), V_{\sigma^2 T}^{(p)}(H, W)) \quad (1.57)$$

которые доказывают теорему. ■

Схожесть в пределе у обеих H -волатильностей может быть объяснена тем, что определяющими в kagi и genko H -построениях являются процессы $\max_{[0,t]} X - X(t)$ и $|X(t) - X(0)|$ соответственно (см. параграф 1.1). В случае, когда X — есть броуновское движение, указанные процессы эквиваленты по распределению в силу теоремы Леви (см., например, [25], стр.211). В частности, для $p = 1$ пределы совпадают, поскольку $K_W(1) = R_W(1) = 2$ (см. утверждение 1.4.4 ниже). Иными словами, если известно, что от соответствующего экстремума винеровский процесс вырос (упал) на H , то в среднем он еще вырастет (упадет) на H , если пренебрегать изменениями в противоположную сторону на величину меньшую H . Данное свойство есть в определенном смысле проявление мартингальности броуновского движения.

Здесь же заметим, что величины $K_W(p), R_W(p)$ не зависят от σ , то есть H -волатильность (в пределе) является инвариантом относительно растяжения и сжатия винеровского процесса. В дальнейшем будет показано, что подобным свойством обладает и финансовый рынок (см. параграф 3.1). Для kagi, genko H -инверсии винеровского процесса имеет место следующая теорема.

Теорема 1.4.2 (Об H -инверсии винеровского процесса)

Пусть $W = (W(t))_{t \geq 0}$ — стандартный винеровский процесс, тогда для любых $H, \sigma > 0$ выполнено

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{T}{M_T(H, \sigma W)} = \frac{2H^2}{\sigma^2} \quad (n.n.) \quad (1.58)$$

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{T}{N_T(H, \sigma W)} = \frac{H^2}{\sigma^2} \quad (n.n.) \quad (1.59)$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $\sigma = 1$ и докажем соотношение (1.59). Как было показано в доказательстве теоремы 1.4.1, процесс

$N_T = N_T(H, W)$ можно считать процессом восстановления (см. (1.41)). Тогда искомое утверждение — есть не что иное, как известный факт усиленного закона больших чисел для процесса восстановления (см. [12], стр. 548). Действительно, рассмотрим $(\Delta_n)_{n \geq 1}$ — последовательность независимых одинаково распределенных положительных случайных величин с распределением (1.36) и величину Δ_0 вида (1.42). Из (1.41) легко понять, что

$$\frac{\Delta_0 + \sum_{n=1}^{N_T-1} \Delta_n}{N_T - 1} \left(1 - \frac{1}{N_T}\right) \leq \frac{T}{N_T} < \frac{\Delta_0 + \sum_{n=1}^{N_T} \Delta_n}{N_T}$$

Так как ранее было показано, что $N_T \rightarrow +\infty$ (п.н.) при $T \rightarrow +\infty$, то в силу усиленного закона больших чисел для последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин $(\Delta_n)_{n \geq 1}$, а также того, что $\mathbf{E}\Delta_0 < \infty$, $\mathbf{E}\Delta_n = H^2$ для $n \geq 1$ следует искомое.

Соотношение (1.58) для $M_T(H, W)$ доказывается аналогично, так как процесс $M_T = M_T(H, W)$, также как и процесс N_T , является процессом восстановления. Для окончательного доказательства надо лишь найти значение (1.55). Из (1.51) легко понять, что $\mathbf{E}\nu = 2$, тогда в силу (1.40) следует искомое.

Доказательство теоремы для произвольного $\sigma > 0$ следует из (1.56), (1.57).

Здесь же отметим, что величины $M_T(H, \sigma W)$, $\widetilde{M}_T(H, \sigma W)$ связаны соотношением

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\widetilde{M}_T(H, \sigma W)}{M_T(H, \sigma W)} = 2 \quad (1.60)$$

Действительно, так как $\mathbf{E}\nu = 2$, а $U_T^{(1)}(H, \sigma W) = \widetilde{M}_T(H, \sigma W)H$, то в силу (1.31) следует искомое. ■

Из теоремы 1.4.2 видно, что, в отличие от H -волатильности, H -инверсия процесса σW напрямую зависит от параметра σ . И, как будет показано ниже (см. параграф 1.5), данное обстоятельство дает основа-

ние для использования H -инверсии при определении меры изменчивости (волатильности) процесса, описывающего поведение финансового актива. Интересно отметить следствия из теорем 1.4.1, 1.4.2, которые также понадобятся для определения волатильности.

Следствие 1.4.3 Пусть $W = (W(t))_{t \geq 0}$ — стандартный винеровский процесс, тогда для любых $p \geq 1$, $H > 0$, $\sigma > 0$ выполнено

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{2U_T^{(p)}(H, \sigma W)}{T} = \sigma^2 R_W(p) H^{p-2} \quad (\text{n.н.}) \quad (1.61)$$

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{V_T^{(p)}(H, \sigma W)}{T} = \sigma^2 K_W(p) H^{p-2} \quad (\text{n.н.}) \quad (1.62)$$

где $R_W(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{2^n}$, $K_W(p) = \int_0^{+\infty} (1+x)^p e^{-x} dx$. ■

В дальнейшем для практического использования указанных выше результатов нам понадобится численное значение функций $R_W(p)$, $K_W(p)$ для $p = 1, 2$.

Утверждение 1.4.4 Функции $R_W(p)$, $K_W(p)$, определенные в теореме 1.4.1, для случаев $p = 1, 2$ принимают значения:

$$R_W(1) = 2, \quad R_W(2) = 6, \quad K_W(1) = 2, \quad K_W(2) = 5$$

Доказательство. Несложно заметить, что

$$R_W(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} R_W(1)$$

$$R_W(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^2}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} R_W(2) + 2R_W(1) - 1$$

Отсюда следует, что $R_W(1) = 2$, $R_W(2) = 6$.

$$K_W(1) = 1 - \int_0^{+\infty} x d(e^{-x}) = 1 + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 2$$

$$K_W(2) = - \int_0^{+\infty} (1+x)^2 d(e^{-x}) = 1 + 2K_W(1) = 5 \quad \blacksquare$$

1.5 H -инверсия как мера изменчивости

1. Как показывает статистический анализ (см. параграф 3.1), H -волатильность является устойчивой характеристикой финансового актива в зависимости от колебаний рынка, то есть для “бурных” и “спокойных” дней ее значения близки друг к другу. Иначе говоря, H -волатильность является некоторой фрактальной характеристикой актива и слабо соответствует нашему интуитивному представлению о волатильности, как меры изменчивости рынка. В этом смысле термин “ H -волатильность” не совсем адекватно отражает само понятие волатильности (тем не менее, как отмечалось ранее, данная терминология представляется целесообразной в виду аналогии с Δ -волатильностью). В настоящей работе предлагается новый подход к определению меры изменчивости актива, в основе которого лежит H -инверсия.

Пожалуй, ни одно понятие в финансовой математике не носит столь разноречивого характера и не дискутируется столь широко, как понятие волатильности. Волатильность определяется многими разными способами, а сам термин используется для наименования разнообразных мер изменчивости. Осознанию важности данного понятия во многом способствовала работа [14], в которой была дана формула (Блэка, Шоулса) справедливой стоимости стандартного опциона в модели, где цены $S = S(t)_{t \geq 0}$ описываются геометрическим броуновским движением, то есть

$$S(t) = S(0)e^{\mu t + \sigma W(t) - \frac{\sigma^2}{2}t}$$

где $W(t)$ – стандартный Винеровский процесс, а константы $\mu, \sigma > 0$ (см. также [32]). Согласно этой формуле, справедливая стоимость не зависит от μ , но зависит от параметра σ , который в рамках данной модели принято называть волатильностью. В силу того, что формула Блэка-Шоулса

широко используется на практике, а предположение о том, что σ является константой, более того, известной константой мало реалистично, в настоящее время существует множество моделей, направленных на описание эволюции волатильности. В наиболее общей постановке понятие волатильности в классической финансовой математике определяется в следующем виде. Пусть значения цен $(S_n)_{n \geq 0}$ (дискретный случай) удовлетворяют соотношениям

$$\ln \left(\frac{S_n}{S_{n-1}} \right) = \sigma_n \varepsilon_n, \quad n \geq 1, \quad (1.63)$$

где последовательность $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ является последовательностью независимых случайных величин, как правило гауссовских, причем ε_n — \mathcal{F}_n -измеримы, а σ_n — \mathcal{F}_{n-1} -измеримы, где (\mathcal{F}_n) — некоторый поток „информации“ (например, значения о ценах). Среди моделей, в которых предполагается тот или иной характер поведения волатильности (σ_n) , отметим, не останавливаясь на их подробном описании, наиболее популярные модели типа ARCH, GARCH и т.д. (см. [21], [15]).

Однако, в отмеченных выше методах определения волатильности можно выделить два существенных недостатка. Во-первых, в выражении (1.63) величины $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ предполагаются независимыми и, как правило гауссовскими. Данное предположение является вполне естественным в рамках концепции безарбитражности, однако, как уже отмечалось выше, эта концепция не всегда адекватна реальности. Во-вторых, понятие волатильности, определенное таким образом, не всегда удобно для практического использования на финансовых рынках, поскольку лишено простого наглядного смысла. В то же время подход, предлагаемый в настоящей работе, не имеет отмеченных недостатков, то есть волатильность определяется без предположения безарбитражности рынка для широкого класса процессов (требуется лишь, чтобы траектории были непрерывны

справа и имели пределы слева). Кроме того, она обладает практической наглядностью.

2. Прежде чем перейти к строгим определениям, отметим, что H -инверсия с интуитивной точки зрения вполне адекватно и весьма наглядно характеризует меру изменчивости. Действительно, знание $kagi$ H -инверсии, позволяет ответить на вопрос: сколько раз на интервале $[0, T]$ меняется направление изменения цен X , если пренебрегать изменениями на величину, меньшую H . При этом понятно, что чем чаще рынок меняет свое направление, тем больше значение $kagi$ H -инверсии и наоборот. Renko H -инверсия дает подобную информацию, с тем лишь отличием от случая $kagi$, что рассматриваются вообще говоря не все изменения цены, а только скачки размера H , где под скачком понимается попадание цены на новый по отношению к предыдущему уровень вида $X(0) + kH$, где k — целое число. При этом помимо наглядности H -инверсия определяется без какого-либо априорного предположения о распределении X .

Для процесса X на интервале $[0, T]$ для заданного H определим величины σ_{kagi} , σ_{renko} следующим образом:

$$\sigma_{kagi} = \sigma_{kagi}(T, H, X) = H \sqrt{\frac{N_T(H, X)}{T}} \quad (1.64)$$

$$\sigma_{renko} = \sigma_{renko}(T, H, X) = H \sqrt{\frac{2M_T(H, X)}{T}} \quad (1.65)$$

где $N_T(H, X)$, $M_T(H, X)$ — есть $kagi$; $renko$ H -инверсия соответственно. Из теоремы 1.4.2 можно заметить, что для процесса $X = \sigma W$, где W — стандартный винеровский процесс, данные величины могут быть использованы в качестве оценки параметра σ , поскольку при $T \rightarrow \infty$ для различных H они сходятся к одному и тому же значению σ . Иначе говоря, в рамках классической финансовой математики, где для описания поведения цены используется броуновское движение (в том или ином виде), величины (1.64), (1.65) вполне адекватно описывают традиционное

понятие волатильности (то есть параметр σ). Если в качестве X брать произвольный процесс, то величины σ_{kagi} , σ_{renko} зависят вообще говоря от H . Оказывается, что для процесса X , описывающего поведение цены финансового актива, величины σ_{kagi} , σ_{renko} , как показывает статистический анализ (см. параграф 3.2), можно считать в первом приближении константами в зависимости от H для достаточно большого T . Это можно трактовать как проявление свойства „самоподобия“ финансового рынка, о котором упоминалось выше. Действительно, с интуитивной точки зрения степень активности рынка, иными словами волатильность, зависит от общих факторов (например, от макроэкономической информации), которые оказывают схожее влияние на различные группы инвесторов. А так как в нашем случае инвесторы классифицируются величиной H , то схожесть в их поведении как раз и проявляется в примерном равенстве величин (1.64) ((1.65)) для различных H . Данное обстоятельство служит основанием для того, чтобы брать их в качестве меры изменчивости финансового актива.

Определение 1.5.1 *Под волатильностью процесса X будем понимать величину (1.64) ((1.65)), определенную на интервале $[0, T]$ для заданного H*

Помимо того, что данное понятие определяется без какого-либо априорного предположения о распределении X , оно обладает хорошей практической наглядностью (в силу наглядности H -инверсии). В частности, при таком подходе становится весьма наглядным сравнение изменчивости для двух произвольных активов X_1 и X_2 , поскольку в этом случае можно ввести понятие подобия данных активов следующим естественным образом. Если пороги H_1 , H_2 выбраны таким образом, что изменение цены X_1 на величину H_1 соответствует в каком-то смысле изменению

цены X_2 на величину H_2 (например, равенство относительных изменений, равенство изменения денежной позиции для фьючерсов и т.д.), то сравнение волатильностей равносильно простому сравнению H -инверсий для активов X_1, X_2 с соответствующими порогами H_1, H_2 .

Следует отметить, что в *renko* случае, учитывая соотношение (1.60), можно рассматривать волатильность, наряду с (1.65), как величину

$$\sigma'_{renko} = \sigma'_{renko}(T, H, X) = H \sqrt{\frac{\widetilde{M}_T(H, X)}{T}} \quad (1.66)$$

где величина $\widetilde{M}_T(H, X)$ определяется соответствующим образом из *renko* H -построения. Действительно, для процесса $X = \sigma W$, где W — стандартный винеровский процесс величины σ_{renko} , σ'_{renko} сходятся к одному и тому же значению σ (см. (1.60)). В общем случае, как показывает статистический анализ, также $\sigma_{renko} \approx \sigma'_{renko}$, что обусловлено соотношением $\sqrt{\frac{\widetilde{M}_T(H, X)}{2M_T(H, X)}} \approx 1$ (см. параграф 3.2). Поэтому в случае *renko* мы ограничимся рассмотрением только величины (1.65).

3. Помимо того, что H -инверсия является хорошей мерой изменчивости финансового актива, она может быть использована также для оценивания и других рыночных характеристик, в частности, амплитуды колебания цен. Для произвольного процесса $X = (X(t))_{0 \leq t \leq T}$ обозначим

$$R_T(X) = \sup_{[0, T]} X - \inf_{[0, T]} X$$

Если в качестве X взять процесс σW , где W — стандартное броуновское движение, а $\sigma > 0$, то выполнено равенство (см. например [3])

$$\mathbf{E} \left(\frac{R_T(X)}{\sigma \sqrt{T}} \right) = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \approx 1.596 \quad (1.67)$$

Для произвольного процесса X в качестве σ будем брать выражения (1.64), (1.65). Обозначим тогда

$$\omega_T^{kagi}(H, X) = \frac{R_T(X)}{H \sqrt{N_T(H, X)}} \quad (1.68)$$

$$\omega_T^{renko}(H, X) = \frac{R_T(X)}{H\sqrt{2M_T(H, X)}} \quad (1.69)$$

Оказывается, если X описывает поведение цены финансового актива, то для реализаций процесса X имеет место свойство (см. параграф 3.2)

$$\omega_T^{kagi}(H, X) \approx C^{kagi}, \quad \omega_T^{renko}(H, X) \approx C^{renko} \quad (1.70)$$

где константы $C^{kagi} = C^{kagi}(X)$, $C^{renko} = C^{renko}(X)$ не зависят от H , что есть в каком-то смысле проявление свойства „самоподобия“, о котором неоднократно упоминалось выше. Более того для многих активов $C^{kagi} \approx C^{renko} \approx \sqrt{8/\pi}$ (сравни с (1.67)). Из (1.70), в частности, следуют соотношения

$$R_T(X) \approx C^{kagi} H \sqrt{N_T(H, X)}, \quad R_T(X) \approx C^{renko} H \sqrt{2M_T(H, X)}$$

Иначе говоря с помощью H -инверсии можно достаточно хорошо оценивать амплитуду колебания цен финансового актива.

4. Вернемся опять к понятию волатильности. Оценку параметра σ для процесса $X = \sigma W$, где W – стандартное броуновское движение можно получить также из следствия 1.4.3. Особенно следует выделить случай $p = 2$, поскольку тогда соответствующая оценка не зависит явно от H . Рассмотрим следующие величины

$$\sigma_{kagi}^{(2)} = \sqrt{\frac{V_T^{(2)}(H, X)}{K_2 T}} \quad (1.71)$$

$$\sigma_{renko}^{(2)} = \sqrt{\frac{2U_T^{(2)}(H, X)}{R_2 T}} \quad (1.72)$$

где $V_T^{(2)}(H, X)$, $U_T^{(2)}(H, X)$ определяются из соотношений (1.29), (1.30) соответственно, а K_2 , R_2 – некоторые константы, зависящие от X . В частности, если взять $K_2 = 5$, $R_2 = 6$, то в случае $X = \sigma W$ величины (1.71), (1.72) при $T \rightarrow \infty$ для различных H сходятся к одному и тому же значению σ (см. следствие 1.4.3 и утверждение 1.4.4), что вполне

соответствует понятию волатильности в классическом случае. Если рассматривать процесс X , описывающий поведение цен произвольного финансового актива, то возникают два вопроса: во-первых, насколько сильна зависимость $\sigma_{kagi}^{(2)}, \sigma_{renko}^{(2)}$ от H , во-вторых, как подбирать параметры K_2, R_2 . Оказывается, что на финансовом рынке величины $\sigma_{kagi}^{(2)}, \sigma_{renko}^{(2)}$, как показывает статистический анализ (см. параграф 3.2), ведут себя регулярным образом, то есть их можно считать в первом приближении константами в зависимости от H для достаточно большого T . По поводу второго вопроса скажем следующее. Рассмотрим величины $\eta_T^{(2)}(H, X)$, $\xi_T^{(2)}(H, X)$, которые есть соответственно kagi, renko H -волатильность второго порядка процесса X . Предположим, что имеют место следующие соотношения:

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} E\eta_T^{(2)}(H, X) = K_2 H^2 \quad (1.73)$$

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} E\xi_T^{(2)}(H, X) = R_2 H^2 \quad (1.74)$$

где K_2, R_2 — некоторые константы, зависящие только от X . В случае $X = \sigma W$ данные свойства выполнены (см. теорему 1.4.1). В общем случае результаты статистического анализа (см. параграф 3.1) также позволяют говорить о том, что для процесса X , описывающего поведение цен финансового актива, выполнены свойства (1.73), (1.74). Иначе говоря, наряду с величинами (1.64), (1.65)

Определение 1.5.2 *Под волатильностью процесса X , удовлетворяющего соотношению (1.73) ((1.74)), будем понимать величину (1.71) ((1.72)), определенную на интервале $[0, T]$ для заданного H*

Очевидным недостатком такого определения, по сравнению с определением, основанным на H -инверсии, является дополнительное предположение (1.73) ((1.74)), которое, хотя и адекватно реальности, все же суще-

ственным образом ограничивает класс процессов, для которых определяется искомое понятие. Преимуществом же является то, что $\sigma_{kagi}^{(2)}, \sigma_{renko}^{(2)}$ лучше, чем $\sigma_{kagi}, \sigma_{renko}$ соответственно, аппроксимируются константой, то есть обладают меньшим квадратическим отклонением от среднего для различных H (см. параграф 3.2). Но, несмотря на это, введение понятия волатильности посредством H -инверсии представляется более целесообразным как с теоретической, так и с практической точки зрения.

Глава 2

Описание моделей

2.1 Одношаговая модель. Kagi, genko H -стратегии

1. В данном параграфе описываются искомые арбитражные стратегии для процесса $X = (X(t))_{t \geq 0}$, траектории которого непрерывны справа и имеют пределы слева. В основе данных стратегий лежит введенное в настоящей работе понятие H -волатильности, а определяющим фактором при их построении является то, что соотношения, подобные (1.31), (1.32), имеют место и на финансовом рынке. Иначе говоря, эмпирическая kagi, genko H -волатильность для достаточно большого T ведет себя следующим образом (в дальнейшем в этом параграфе мы будем рассматривать только случай $p = 1$, поэтому для простоты обозначений индекс $p = 1$ в соответствующих величинах будем опускать):

$$\eta_T(H, X) \approx C_K H, \quad (2.1)$$

$$\xi_T(H, X) \approx C_R H, \quad (2.2)$$

где константы C_K, C_R для достаточно большого T зависят от вида финансового актива X , но не зависят от H (подробнее см. параграф 3.1). При этом для многих активов значения C_K, C_R отличаются от двойки, соответствующей константы в случае винеровского процесса (см. утвер-

ждение 1.4.4). Поэтому если считать, что винеровский процесс соответствует безарбитражному случаю, то отличие C_K, C_R от двойки может указывать на существование арбитражных возможностей для данного X . Оказывается, что в этом случае знание H -волатильности (а точнее его предельного значения) позволяет построить стратегии с положительным в среднем доходом при нулевом начальном капитале. Более того, как показывает статистический анализ, величины $C_K(X), C_R(X)$ зависят не столько от вида X , сколько от класса инвесторов, которые торгуют данным активом. Поэтому при статистическом анализе активов, торгуемых на одной бирже и схожих по своей специфике, значения $C_K(X), C_R(X)$ для них оказываются почти одинаковыми (см. параграф 3.1).

В настоящей работе мы полагаем, что:

- инвестор имеет возможность “коротко” продавать актив X (то есть брать его займы с целью продажи)
- процентная ставка за взятие займа денег и актива равна нулю
- за сделку с единицей актива X уплачивается комиссия в размере $\lambda \geq 0$

Заметим, что предположение о нулевой процентной ставке выглядит вполне адекватным, если речь идет, например, о внутридневной торговле. Действительно, в этом случае неважно на сколько мы берем кредит: на несколько секунд или на несколько часов. Главное, чтобы в конце торгового дня не оставалось заемных средств. Конечно, за возможность в кредит покупать актив с целью его перепродажи внутри одного дня тоже нужно платить, но, как правило, эти издержки существенно малы по сравнению с комиссией, уплачиваемой за совершение одной сделки, поэтому мы будем ими пренебрегать. Здесь также считаем, что издержки являются величиной постоянной, а не пропорциональной цене акти-

ва, как это достаточно часто предполагается в финансовой математике. Данный подход является вполне обоснованным, поскольку комиссии на рынке (брокера, биржи и т.д.) как правило являются фиксированными величинами, порой не зависящими даже от вида актива. Кроме того величина спреда, то есть разница между ценами покупки и продажи, которая также определяет размер издержек, зачастую зависит не столько от значения цены, сколько от ликвидности рынка. Эти аргументы, как и многие другие, говорят в пользу фиксированного размера издержек.

2. Kagi случай.

Для процесса $X = (X(t))_{t \geq 0}$, траектории которого являются непрерывными справа и имеющими пределы слева функциями, на интервале $[0, T]$ рассмотрим kagi H -построение, то есть последовательность $(\tau_n^*, \tau_n, X_n^*, X_n)_{n=0, \dots, N_T(H, X)}$ и определим процесс $\tilde{\gamma}^K = (\tilde{\gamma}_t^K)_{0 \leq t \leq T}$, который будет задавать количество актива X в портфеле инвестора, следующим образом:

$$\tilde{\gamma}_t^K = \tilde{\gamma}_t^K(H, X) = \sum_{n=1}^{N_T(H, X)} \text{sign}(X_{n-1} - X_n^*) \chi_{[\tau_{n-1}, \tau_n)}(t) \quad (2.3)$$

Процесс $\tilde{\gamma}^K$ будем называть *kagi⁺ H -стратегией* для процесса X на $[0, T]$. Иными словами kagi⁺ H -стратегия состоит в том (см. также соответствующие сигналы на покупку, продажу стратегии $\tilde{\gamma}^K$ на рис. 2.1), что в момент τ_n :

- покупаем единицу актива X , если $X_n - X_n^* > 0$
- продаем единицу актива X , если $X_n - X_n^* < 0$.

То есть в каждый момент времени на интервале $[\tau_0, \tau_N)$ в портфеле инвестора содержится единица актива X со знаком, а переформирование происходит в марковские моменты $(\tau_n)_{n=0, \dots, N}$. Указанная стратегия, по-

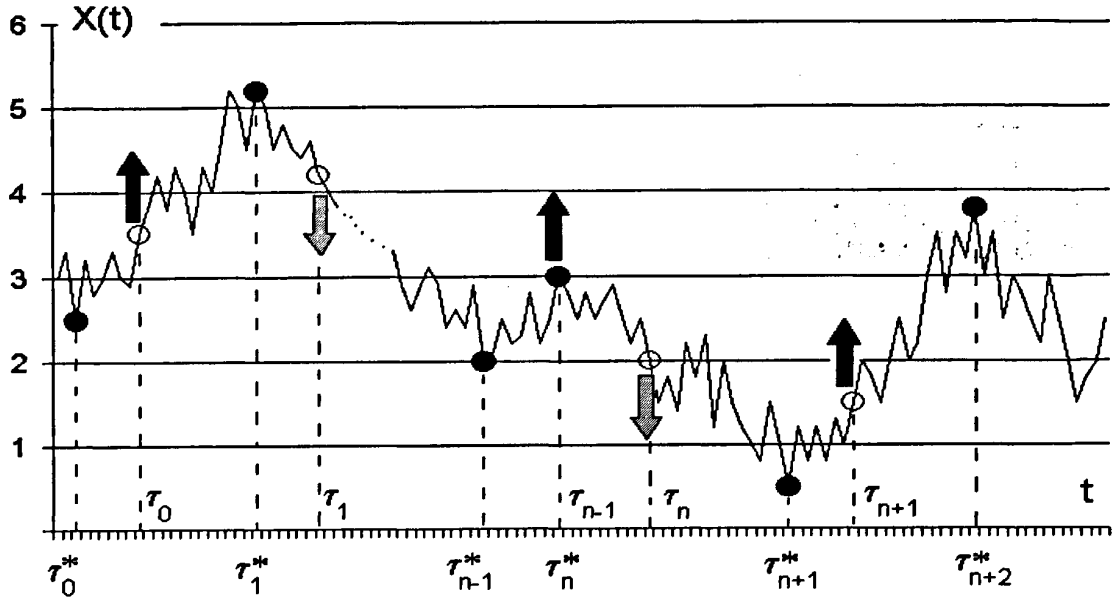


Рис. 2.1: Сигналы $kagi^+H$ -стратегии ($H = 1$)

видимому, известна с достаточно давних времен, по крайней мере аналогичная стратегия для случая genko (см. (2.8)) активно применяется на финансовом рынке (см. [30], гл.7). Однако, как будет показано ниже (см. утверждение 2.1.1), для некоторого рода финансовых активов применение $\tilde{\gamma}^K$ заведомо нецелесообразно.

Прежде чем перейти к дальнейшему изложению, отметим, что, вообще говоря, для $kagi$ H -построения может выполняться $\tau_n = \tau_{n+1}$. Это соотношение подразумевает, что мы одновременно покупаем и продаем в момент τ_n , что некорректно с точки зрения реальной ситуации, к тому же индикатор пустого множества $[\tau_n, \tau_{n+1})$ будет равен нулю. Однако, если предполагать, что процесс X удовлетворяет условию

- для любых моментов времени t_1, t_2 ($t_1 < t_2$) выполнено

$$\sup_{[t_1, t_2]} X = \max_{[t_1, t_2]} X, \quad \inf_{[t_1, t_2]} X = \min_{[t_1, t_2]} X \quad (2.4)$$

то, очевидно, $\tau_n < \tau_{n+1}$ (иначе экстремум $X(\tau_n-)$ не достигался бы на отрезке $[\tau_n - \varepsilon, \tau_n]$ для некоторого ε).

Отметим, что данное ограничение является полностью адекватным реальности. Действительно, информация о ценах финансового актива поступает на рынок дискретно, поэтому цена будет неизменной некоторое время, прежде чем обновит свое значение. Иными словами, любой процесс, описывающий поведение цен, удовлетворяет данному условию. Поэтому в дальнейшем, говоря о стратегии на финансовом рынке, всегда будем подразумевать выполнение условия (2.4).

Капитал в момент времени $t \in [0, T]$, соответствующий kagi^+H -стратегии, с учетом издержек будем обозначать через

$$\tilde{Y}_t^K(H, X) = \int_0^t \tilde{\gamma}_u^K dX(u) - \lambda \int_0^t |d\tilde{\gamma}_u^K|$$

Значение $\tilde{Y}_T^K(H, X)$ определяет *доход* от kagi^+H -стратегии на $[0, T]$. Поскольку процесс $\tilde{\gamma}^K$ является кусочно-постоянным с конечным числом скачков на $[0, T]$, то под интегралами мы будем понимать соответствующие суммы. В частности, по определению полагаем, что

$$\int_0^T \chi_{[\tau_{n-1}, \tau_n)}(t) dX(t) = X(\tau_n) - X(\tau_{n-1}) \quad (2.5)$$

Утверждение 2.1.1 *Доход от kagi^+H -стратегии на интервале $[0, T]$ для процесса X , обладающего свойством (2.4), удовлетворяет соотношению*

$$\tilde{Y}_T^K(H, X) \leq (\eta_T(H, X) - 2H - 2\lambda)N_T(H, X) + \varepsilon_T^K(H, X),$$

где $0 < \varepsilon_T^K(H, X) \leq H$.

Доказательство. Из (2.3) с учетом (1.3) и (2.5) следует

$$\tilde{Y}_T^K(H, X) = \sum_{n=1}^{N_T(H, X)} (-1)^{n+1} \text{sign}(X_0 - X_0^*) \int_0^T \chi_{[\tau_{n-1}, \tau_n)}(t) dX(t) - 2\lambda N_T(H, X)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{N_T(H,X)} \text{sign}(X_n^* - X_{n-1}^*)(X(\tau_n) - X(\tau_{n-1}) + X_{n-1}^* - X_n^*) \\
&\quad + X_n^* - X_n + X_{n-1} - X_{n-1} + X_n - X_n - 2\lambda N_T(H, X) \\
&= \sum_{n=1}^{N_T(H,X)} (|X_n^* - X_{n-1}^*| - 2H - 2\lambda) + \varepsilon_T^K(H, X) \\
&\quad + \sum_{n=1}^{N_T(H,X)} \text{sign}(X_{n-1} - X_{n-1}^*)(X(\tau_n) - X_n + X_{n-1} - X(\tau_{n-1}))
\end{aligned}$$

где $\varepsilon_T^K(H, X) = H - |X_{N_T(H,X)}^* - X_{N_T(H,X)}|$, а в силу (1.3) выполнено $0 < \varepsilon_T^K(H, X) \leq H$. Для окончательного доказательства достаточно показать, что

$$(X_n - X(\tau_n))(X_n - X_n^*) \leq 0, \quad n = 0, \dots, N-1$$

Для определенности положим, что $X_n - X_n^* = H$, тогда, очевидно, $X(\tau_n) \geq X_n$. Действительно, в противном случае получим, что $X(\tau_n-) = X_n$, при этом $X(\tau_n-) > X(\tau_n)$. Но тогда в силу определения τ_n для некоторого $\varepsilon > 0$ будет выполнено $X(\tau_n-) > X(u)$ для всех $u \in [\tau_n - \varepsilon, \tau_n)$, что (с учетом $X(\tau_n-) > X(\tau_n)$) противоречит условию (2.4). А значит

$$\tilde{Y}_T^K(H, X) \leq (\eta_T(H, X) - 2H - 2\lambda)N_T(H, X) + \varepsilon_T^K(H, X)$$

■

Из утверждения 2.1.1 сразу следует, что если эмпирическая H -волатильность для некоторого актива меньше $2H$ (например, для фьючерсов на индексы SP500, Nasdaq100, см. параграф 3.1), то применение $\tilde{\gamma}^K$ убыточно. Однако, как несложно заметить, в этом случае целесообразней использовать обратную стратегию, то есть стратегию $(-\tilde{\gamma}^K)$, которую будем называть *kagi $^-$ H -стратегией* для процесса X на $[0, T]$. Действительно, если обозначить через

$$\check{Y}_t^K(H, X) = - \int_0^t \tilde{\gamma}_u^K dX(u) - \lambda \int_0^t |d\tilde{\gamma}_u^K|$$

то для величины $\check{Y}_T^K(H, X)$, определяющей доход от kagi - H -стратегии на $[0, T]$, имеет место

Утверждение 2.1.2 Доход от kagi - H -стратегии на интервале $[0, T]$ для процесса X , обладающего свойством (2.4), удовлетворяет соотношению

$$\check{Y}_T^K(H, X) \geq (2H - \eta_T(H, X) - 2\lambda)N_T(H, X) - \varepsilon_T^K(H, X),$$

где $0 < \varepsilon_T^K(H, X) \leq H$.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству утверждения 2.1.1. ■

Иначе говоря, выбор стратегии напрямую зависит от kagi H -волатильности. Отметим, что если траектории процесса X являются непрерывными функциями, то в указанных выше утверждениях вместо неравенств будут иметь место соответствующие равенства.

Определение 2.1.3 Процесс X обладает свойством kagi , если выполнено

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \mathbf{E} \eta_T(H, X) = K(H)H \quad \blacksquare \quad (2.6)$$

Заметим, что с учетом соотношения (2.1) данное свойство выглядит вполне естественным для финансового рынка. Определим процесс $\gamma^K = (\gamma_t^K)_{0 \leq t \leq T}$ следующим образом

$$\gamma_t^K = \gamma_t^K(H, X) = \tilde{\gamma}_t^K (\chi_{\{K(H) \geq 2\}} - \chi_{\{K(H) < 2\}}) \quad (2.7)$$

где $\tilde{\gamma}_t^K$ имеет вид (2.3). Процесс γ^K будет определять количество актива X в портфеле инвестора.

Определение 2.1.4 Процесс γ^K будем называть kagi H -стратегией процесса X на $[0, T]$. ■

Стратегию (2.7) можно интерпретировать следующим образом:

- если $K(H) \geq 2$, то инвестор должен действовать сонаправленно с рынком, то есть в момент времени τ_n покупать, когда цена актива X растет, и продавать, когда цена падает.
- если $K(H) < 2$, то инвестор должен действовать против рынка, то есть в момент времени τ_n покупать при падении цены и продавать в случае роста.

Кроме того важно заметить, что *kagi H*-стратегия определяется динамически, то есть моменты совершения сделок, а именно моменты $(\tau_n)_{n=0,\dots,N}$, являются марковскими. Капитал в момент времени $t \in [0, T]$, соответствующий данной стратегии, с учетом издержек будем обозначать через

$$Y_t^K(H, X) = \int_0^t \gamma_u^K dX(u) - \lambda \int_0^t |d\gamma_u^K|$$

Рассмотрим также величину, определяющую средний доход одной транзакции на интервале $[0, T]$ для стратегии γ^K :

$$y_T^K(H, X) = \frac{Y_T^K(H, X)}{N_T(H, X)}$$

Теорема 2.1.5 (Kagi) Пусть процесс X обладает *kagi* свойством, а его траектории являются непрерывными функциями, тогда для *kagi H*-стратегии выполнено

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \mathbf{E} y_T^K(H, X) = |K(H) - 2|H - 2\lambda$$

Доказательство. Если $K(H) \geq 2$, то из утверждения 2.1.1 с учетом того, что траектории процесса X являются непрерывными функциями, следует

$$Y_T^K(H, X) = (\eta_T(H, X) - 2H - 2\lambda)N_T(H, X) + \varepsilon_T^K(H, X),$$

где $0 < \varepsilon_T^K(H, X) \leq H$. Отсюда очевидным образом получаем

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow +\infty} E y_T^K(H, X) &= \lim_{T \rightarrow +\infty} E \eta_T(H, X) - 2H - 2\lambda + \lim_{T \rightarrow +\infty} E \frac{\varepsilon_T^K(H, X)}{N_T(H, X)} \\ &= (K(H) - 2)H - 2\lambda \end{aligned}$$

Если $K(H) < 2$, то из утверждения 2.1.2 с учетом того, что траектории процесса X являются непрерывными функциями, следует

$$Y_T^K(H, X) = (2H - \eta_T(H, X) - 2\lambda)N_T(H, X) - \varepsilon_T^K(H, X),$$

а значит $\lim_{T \rightarrow +\infty} E y_T^K(H, X) = (2 - K(H))H - 2\lambda$. ■

Заметим, что в случае $K(H) = 2$ (в частности для винеровского процесса) *kagi* H -стратегия не приносит прибыли, что вполне соответствует классическому пониманию безарбитражности рынка. Если же величина $|K(H) - 2|H - 2\lambda$ является положительной, то *kagi* H -стратегия становится арбитражной, то есть для достаточно большого T доход нашей стратегии будет положительной в среднем величиной при нулевом начальном капитале. И, как показывает статистический анализ (см. параграф 3.1), для некоторых финансовых активов использование *kagi* H -стратегии приносит арбитражную прибыль.

Кроме того отметим, что в силу (2.1) величину $K(H)$ можно считать константой для достаточно широкого интервала значений H . А это в свою очередь позволяет говорить, что *kagi* H -стратегия не зависит от H , а является характеристическим свойством рассматриваемого финансового инструмента. Более того стратегия определяется не точным значением $K(H)$, а тем, насколько данная величина отличается от двойки. Поэтому изменение $K(H)$, для которого значение величины $\chi_{\{K(H) \geq 2\}}$ не меняется, не изменяет вид *kagi* H -стратегии. Данное обстоятельство говорит о сильной устойчивости этой стратегии с течением времени, то есть оценка соответствующего параметра может оставаться неизменной в течение длительного периода (см. параграф 3.3).

3. Renko случай.

Аналогичные утверждения выполнены и для renko случая. Пусть процесс X , траектории которого непрерывны справа и имеют пределы слева, обладает свойством (2.4). На интервале $[0, T]$ рассмотрим renko H -построение, то есть последовательность $(\rho_m^*, \rho_m, X_m^*, X_m)_{m=0, \dots, M_T(H, X)}$. Определим процесс $\tilde{\gamma}^R = (\tilde{\gamma}_t^R)_{0 \leq t \leq T}$, который будет задавать количество актива X в портфеле инвестора, следующим образом

$$\tilde{\gamma}_t^R = \tilde{\gamma}_t^R(H, X) = \sum_{m=1}^{M_T(H, X)} \text{sign}(X_{m-1} - X_{m-1}^*) \chi_{[\rho_{m-1}, \rho_m)}(t) \quad (2.8)$$

Процесс $\tilde{\gamma}^R$ будем называть *renko⁺ H -стратегией* для процесса X на $[0, T]$. Указанная стратегия широко используется на финансовом рынке (см. [30], гл.7), что обусловлено естественной попыткой выявить существенные тенденции роста или падения цен. Однако, как будет показано ниже (см. утверждение 2.1.6), для некоторого рода финансовых активов ее применение заведомо приведет к убыткам, а определяющим фактором при этом является renko H -волатильность. Капитал в момент времени $t \in [0, T]$, соответствующий renko⁺ H -стратегии будем обозначать через

$$\tilde{Y}_t^R(H, X) = \int_0^t \tilde{\gamma}_u^R dX(u) - \lambda \int_0^t |d\tilde{\gamma}_u^R|$$

Значение $\tilde{Y}_T^R(H, X)$ определяет *доход* от renko⁺ H -стратегии на $[0, T]$. Под интегралами мы будем понимать соответствующие суммы (аналогично (2.5) из случая kagi).

Утверждение 2.1.6 *Доход от renko⁺ H -стратегии на интервале $[0, T]$ для процесса X , обладающего свойством (2.4), удовлетворяет соотношению*

$$\tilde{Y}_T^R(H, X) \leq (\xi_T(H, X) - 2H - 2\lambda)M_T(H, X) + \varepsilon_T^R(H, X),$$

где $0 < \varepsilon_T^R(H, X) < 2H$.

Доказательство. Аналогично доказательству утверждения 2.1.1 получаем

$$\check{Y}_T^R(H, X) \leq (\xi_T(H, X) - 2H - 2\lambda)M_T(H, X) + \varepsilon_T^R(H, X)$$

где $\varepsilon_T^R(H, X) = H - \tilde{\varepsilon}_T^R(H, X)$, а

$$\tilde{\varepsilon}_T^R(H, X) = \text{sign}(X_{M_T(H, X)}^* - X_{M_T(H, X)-1}^*)(X_{M_T(H, X)}^* - X_{M_T(H, X)})$$

Тогда в силу (1.4) выполнено $-H < \tilde{\varepsilon}_T^R(H, X) < H$, а значит $0 < \varepsilon_T^R(H, X) < 2H$. ■

Для процесса $(-\tilde{\gamma}^R)$, который будем называть *penko⁻H-стратегией* для процесса X на $[0, T]$, обозначим через

$$\check{Y}_t^R(H, X) = -\int_0^t \tilde{\gamma}_u^R dX(u) - \lambda \int_0^t |d\tilde{\gamma}_u^R|$$

тогда имеет место

Утверждение 2.1.7 Доход от *penko⁻H-стратегии* на интервале $[0, T]$ для процесса X , обладающего свойством (2.4), удовлетворяет соотношению

$$\check{Y}_T^R(H, X) \geq (2H - \xi_T(H, X) - 2\lambda)M_T(H, X) - \varepsilon_T^R(H, X),$$

где $0 < \varepsilon_T^R(H, X) < 2H$.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству утверждения 2.1.6. ■

Определение 2.1.8 Процесс X обладает свойством *penko*, если выполнено

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \mathbf{E}\xi_T(H, X) = R(H)H \quad \blacksquare \quad (2.9)$$

Соотношение (2.2) говорит о том, что данное свойство вполне адекватно реальности. Определим процесс $\gamma^R = (\gamma_t^R)_{0 \leq t \leq T}$ следующим образом

$$\gamma_t^R = \gamma_t^R(H, X) = \tilde{\gamma}_t^R (\chi_{\{R(H) \geq 2\}} - \chi_{\{R(H) < 2\}}) \quad (2.10)$$

где $\tilde{\gamma}_t^R$ имеет вид (2.8).

Определение 2.1.9 Процесс γ^R будем называть *renko H -стратегией* процесса X на $[0, T]$. ■

Капитал в момент времени $t \in [0, T]$, соответствующий данной стратегии, с учетом издержек будем обозначать через

$$Y_t^R(H, X) = \int_0^t \gamma_u^R dX(u) - \lambda \int_0^t |d\gamma_u^R|$$

Рассмотрим также величину, определяющую средний доход одной транзакции на интервале $[0, T]$ для стратегии γ^R :

$$y_T^R(H, X) = \frac{Y_T^R(H, X)}{M_T(H, X)} \quad (2.11)$$

Теорема 2.1.10 (Renko) Пусть процесс X обладает *renko* свойством, а его траектории являются непрерывными функциями, тогда для *renko H -стратегии* выполнено

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} E y_T^R(H, X) = |R(H) - 2|H| - 2\lambda$$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.1.5. ■

2.2 Многошаговая модель. Понятие H -паттерна. Ка- gi, renko прогнозирование

1. Рассмотрим сначала случай, когда траектории процесса X являются непрерывными функциями. Для текущего момента времени t будем

считать, что последовательность $(\theta_i^*, \theta_i)_{i=0, \dots, I_t(H, X)}$ обозначает одну из последовательностей kagi, genko H -построения процесса X на интервале $[0, t]$, то есть либо $(\tau_n^*, \tau_n)_{n=0, \dots, N_t(H, X)}$, либо $(\rho_m^*, \rho_m)_{m=0, \dots, M_t(H, X)}$.

Прежде чем перейти к описанию модели, отметим, что определенные выше kagi, genko H -стратегии в каком-то смысле являются одношаговыми. Иначе говоря, в момент совершения сделки, а именно в момент (марковский) θ_i , помимо оценки H -волатильности используется только лишь информация о том, что на интервале $[\theta_i^*, \theta_i]$ цена выросла или упала на величину H . Однако на практике зачастую бывает полезно учитывать поведение цены и до момента θ_i^* , так как в определенные ситуации финансовым игрокам становится вполне понятно, что сделка в момент θ_i соответствующей направленности нецелесообразна. Например, инвестору известно, что цена актива X несколько раз достигала некоторого уровня S^* , но не поднималась выше и, более того, каждый раз после этого был существенный откат, то есть падение на величину не меньшую H . Иначе говоря, цена S^* определяет уровень мощного сопротивления росту, что может быть обусловлено массой причин. Поэтому если kagi, genko H -стратегия говорит, что нужно покупать в момент θ_i , но при этом текущая ситуация такова, что $X(\theta_i) = S^*$, то вполне понятно желание инвестора игнорировать сигнал. Для того чтобы придать такому интуитивному анализу строгий математический вид, нужно четко определить, что понимается под „шаблонным поведением цены“ или „паттерном“ и почему для „паттернов“ определенного вида возможен нетривиальный прогноз относительно дальнейшего поведения цены. Для этих целей представляется естественным выделять в поведении актива существенные (с точностью до некоторого H) периоды роста и падения цены, а затем находить в прошлом такие участки, где цена вела себя подобным образом, и, исходя из ее дальнейшего поведения, строить прогноз для на-

стоящего момента. А поскольку моменты θ_i^* как раз и задают указанные периоды роста или падения, то kagi, genko H -построения представляются именно тем аппаратом, который позволит строго описать понятие „схожести“ в поведении цены. Как было отмечено выше (см. параграф 1.2), kagi, genko H -построения являются оптимальными в определенном смысле кусочно-монотонными приближениями X , поэтому для описания „схожести“ мы будем использовать вводимое ниже понятие подобия кусочно-монотонных функций при данной величине погрешности H .

Пусть заданы две кусочно-монотонные функции одинакового порядка n : f^1 на интервале $[0, T^1]$ и f^2 на интервале $[0, T^2]$ с интервалами монотонности соответственно $[t_{i-1}^1, t_i^1]$ и $[t_{i-1}^2, t_i^2]$ для $i = 1, \dots, n$, где $0 = t_0^1 < \dots < t_n^1 = T^1$ и $0 = t_0^2 < \dots < t_n^2 = T^2$. Обозначим для $i = 1, \dots, n$, $j = 1, 2$ через

$$\alpha_i^j = f^j(t_i^j) - f^j(t_{i-1}^j)$$

Отметим, что по определению кусочно-монотонной функции $|\alpha_i^j|$ является амплитудой колебания функции f^j на интервале $[t_{i-1}^j, t_i^j]$. Будем говорить, что функции f^1 и f^2 принадлежат одному классу подобия для заданных H и n , если для некоторого набора целых чисел $K_H(i)$, $i = 1, \dots, n$ выполнены неравенства для всех $i = 1, \dots, n$, $j = 1, 2$

$$\text{sign}(\alpha_i^j) K_H(i) H \leq |\alpha_i^j| < \text{sign}(\alpha_i^j) (K_H(i) + \text{sign}(\alpha_i^j)) H \quad (2.11)$$

Класс подобия кусочно-монотонных функций, соответствующий заданным H , n и набору целых чисел $K_H(i)$, $i = 1, \dots, n$ будем обозначать в виде $\{K_H(1), \dots, K_H(n)\}$. Заметим, что $K_H(i-1)K_H(i) \leq 0$ для всех $i = 2, \dots, n$ (если $n > 1$). Скажем, что данный класс является невырожденным, если $K_H(i) \neq 0$ для всех $i = 1, \dots, n$.

Определение 2.2.1 *Невырожденный класс подобия $\{K_H(1), \dots, K_H(n)\}$ будем называть H -паттерном длины n*

С практической точки зрения введенное понятие H -паттерна весьма наглядно, так как показывает (с погрешностью H) на сколько целых кратных числа H произошло изменение у цены финансового актива на каждом из интервалов монотонности.

Перейдем теперь к описанию модели. Рассмотрим произвольные положительные числа A^+ , A^- и текущий момент времени t . Нас будет интересовать случайная величина

$$\mu(t, A^+, A^-) = \inf\{u \geq t : X(u) \notin (X(t) - A^-, X(t) + A^+)\} \quad (2.12)$$

Цель прогнозирования состоит в том, чтобы оценить вероятности P^+ , P^- соответствующих событий

$$\begin{aligned} \Omega^+ &= \{X(\mu(t, A^+, A^-)) \geq X(t) + A^+\}, \\ \Omega^- &= \{X(\mu(t, A^+, A^-)) \leq X(t) - A^-\} \end{aligned}$$

Для этого на интервале $[0, t]$ динамически строим *kagi, genko* H -построение, то есть последовательность $(\theta_i^*, \theta_i)_{i=0, \dots, I}$, $I = I_t(H, X)$. Следует уточнить, что из практических соображений, не ограничивающих общности задачи, мы будем рассматривать только те моменты времени t , для которых выполнено $t = \theta_I^*$, где

$$\theta_I^* = \inf\{u \geq \theta_{I-1}^* : |X(u) - X(\theta_{I-1}^*)| \geq \varepsilon H\} \quad (2.13)$$

для некоторого заранее заданного $\varepsilon \geq 1$. Отметим, что если $\varepsilon = 1$, то, очевидно, $t = \theta_{I-1}$, а значит множество моментов времени, в которые осуществляется прогноз, содержит все моменты совершения сделок *kagi, genko* H -стратегии. Далее по заданному натуральному $Q < I$ мы определяем H -паттерн $\{K_H(1), \dots, K_H(Q)\}$, к которому относится кусочно-монотонная функция порядка Q , построенная соответствующим образом (см. (1.7), (1.10)) по реализации процесса X на $[\theta_{I-Q}^*, t]$ с интервалами

монотонности $[\theta_{I-q}^*, \theta_{I-q+1}^*]$, $q = 1, \dots, Q$. Иначе говоря, мы ищем такие целые $K_H(q)$, $q = 1, \dots, Q$, для которых выполнены неравенства (2.11), где $\alpha_q^j = X(\theta_{I-Q+q}^*) - X(\theta_{I-Q+q-1}^*)$, $q = 1, \dots, Q$ (заметим, что в genko случае в соотношении (2.11) выполняется только равенство, поскольку $\frac{\alpha_q^j}{H}$ — целое). Например, на рис. 3.17 (см. параграф 3.4), на котором представлен график внутридневных цен фьючерса на индекс Nasdaq100 за 20.09.2002, для текущего момента t выделен реализовавшийся H -паттерн $\{+1, -2, +2, -1\}$ для $H = 3$, $Q = 4$, построенный по kagi H -построению. Отметим, что данный H -паттерн описывает фигуру технического анализа, которую на практике называют „перевернутые голова и плечи“ (см. [1]). Этот пример наглядно демонстрирует, что введенное понятие H -паттерна позволяет формализовать многие фигуры технического анализа, широко используемые в реальной торговле на интуитивном уровне.

Анализируя исторические данные о ценах, находим все такие ситуации, где цена вела себя подобным образом. То есть ищем все такие моменты времени u в прошлом, что соответствующая кусочно-монотонная функция из kagi, genko H -построения на $[0, u]$ принадлежит классу подобия $\{K_H(1), \dots, K_H(Q)\}$. Иначе говоря, выполнены неравенства (2.11), где $\alpha_q^j = X(\theta_{L-Q+q}^*) - X(\theta_{L-Q+q-1}^*)$, $q = 1, \dots, Q$, а моменты $(\theta_{L-q}^*)_{q=1, \dots, Q}$ для некоторого L являются элементами kagi, genko H -построения на $[0, u]$ (подчеркнем, что $u = \theta_L^*$, где θ_L^* имеет вид (2.13)). Если данный класс не пуст, то, исходя из статистики дальнейшего поведения цены, эмпирически вычисляем требуемые вероятности P^+ , P^- . В случае пустого класса полагаем

$$P^+ = \frac{A^-}{A^+ + A^-}, \quad P^- = \frac{A^+}{A^+ + A^-}$$

Иными словами, мы предполагаем, что условное распределение случайной величины $X(\mu(t, A^+, A^-)) - X(t)$ при условии реализации H -паттерна

$\{K_H(1), \dots, K_H(Q)\}$ имеет вид:

$$X(\mu(t, A^+, A^-)) - X(t) |_{\{K_H(1), \dots, K_H(Q)\}} = \begin{cases} A^+, & P^+ \\ -A^-, & P^- \end{cases}$$

Тогда, если в момент времени t мы покупаем финансовый актив и продаем в момент $\mu(t, A^+, A^-)$, то наша средняя прибыль (убыток) есть

$$E(X(\mu(t, A^+, A^-)) - X(t)) = A^+P^+ - A^-P^-$$

При совершении обратной сделки наша прибыль (убыток) есть $-(A^+P^+ - A^-P^-)$. Иначе говоря, достаточно большое значение $|A^+P^+ - A^-P^-|$ может служить сигналом покупки или продажи финансового актива в момент времени t . В связи с этим наша цель состоит в том, чтобы найти такие H -паттерны длины Q для некоторых Q , A^+ , A^- , ε , что значение $|A^+P^+ - A^-P^-|$ достаточно велико, то есть больше некоторого порогового значения, оцененного исходя из размера комиссии и других характеристик рынка.

Оказывается, и в этом состоит основная практическая ценность предлагаемой модели, что во многих случаях эффективный прогноз возможен, в частности, при построении внутридневных прогнозов (подробнее см. параграф 3.4). Объяснение этому, видимо, следует искать в психологии поведения участников рынка. Стоит отметить, что в рамках классической финансовой математики в силу гипотезы безарбитражности рынка процесс X являлся бы мартингалом (в случае нулевой процентной ставки). А это означало бы невозможность построения эффективного прогноза, так как тогда было бы выполнено

$$E(X(\mu(t, A^+, A^-)) - X(t)) = 0$$

Обратимся еще раз к определению 2.2.1. Следует отметить, что если бы классы подобия мы определяли не соотношением (2.11), а вполне

естественным с теоретической точки зрения равенством

$$K_H(i)H = \alpha_i^j$$

для действительных чисел $K_H(i)$, $i = 1, \dots, n$, то при подсчете статистики по kagi H -построению для текущего H -паттерна $\{K_H(1), \dots, K_H(Q)\}$ в большинстве случаев мы бы просто не находили такой ситуации, где реализовался бы подобный H -паттерн. Иначе говоря статистическая выборка была бы нерепрезентативной, что делало бы результаты анализа неадекватными. В связи с этим использование соотношения (2.11) для определения H -паттерна вполне обосновано, так как естественным образом расширяет классы подобия, делая статистическую выборку репрезентативной.

Также отметим, что при выявлении H -паттерна для заданного kagi , genko H' -построения пороги H , H' могут вообще говоря отличаться. В частности, при достаточно большом H' значение H имеет смысл брать поменьше, например, чтобы соотношение H'/H было натуральным числом. В настоящей работе мы будем всегда подразумевать $H = H'$, что весьма наглядно с практической точки зрения.

Если рассматривать H -паттерны единичной длины при этом параметр $\varepsilon = 1$, то моменты времени, в которые строится прогноз, очевидно, есть в точности те моменты, в которые совершается сделка kagi , genko H -стратегии, то есть моменты $(\theta_i)_{i \geq 0}$. Правда, при этом прогноз строится для величины $(X(\mu(t, A^+, A^-)) - X(t))$, в то время как в H -стратегии фактически прогнозируется величина $(X(\theta_{I+1}) - X(t))$ (отметим, что $\theta_I = t$). Однако, как несложно понять, оценка величины $E(X(\theta_{I+1}) - X(t))$ может быть также получена в результате соответствующего анализа данного H -паттерна. Действительно, в этом случае искомая оценка напрямую зависит от H -волатильности на $[0, t]$, но расчет H -волатильности как раз и заключается в анализе исторического

поведения цен на интервалах $[\theta_i, \theta_{i+1}]$ для всех моментов θ_i , которые однозначно определяют данный H -паттерн. Резюмируя сказанное, можно сделать вывод, что метод построения прогноза посредством H -паттернов можно рассматривать как обобщение kagi, genko H -стратегий.

Следует также отметить, что при определении H -паттерна использовались абсолютные приращения цен. Однако несложно адаптировать данную методологию и для относительных приращений. То есть для построения паттерна можно использовать, например, сравнения приращений цен на соответствующих интервалах монотонности и т.д. В настоящей работе при статистическом анализе мы ограничимся рассмотрением „абсолютных“ H -паттернов, введенных в определении 2.2.1.

2. В общем случае, когда траектории процесса X являются функциями, непрерывными справа и имеющими пределы слева (при ограничении (2.4)), понятие H -паттерна можно определить аналогичным образом, вообще говоря не прибегая к понятию кусочно-монотонных функций. Действительно, для указанного выше набора $(\theta_i^*)_{i=I-Q, \dots, I}$ класс подобия $\{K_H(1), \dots, K_H(Q)\}$ определяется естественным образом из соотношения (2.11), где $\alpha_q^j = X_{I-Q+q}^* - X_{I-Q+q-1}^*$, $q = 1, \dots, Q$, а значения X_{I-q}^* берутся из соответствующего kagi, genko H -построения. При этом расчет статистики проводится аналогичным образом по описанному выше алгоритму. Правда, может возникнуть проблема в практической реализации полученных стратегий, поскольку тогда нельзя утверждать, что либо $X(\mu(t, A^+, A^-)) = X(t) + A^+$, либо $X(\mu(t, A^+, A^-)) = X(t) - A^-$ (ввиду возможности разрыва функции в точке $\mu(t, A^+, A^-)$). Поэтому использование соответствующей статистики в реальной торговле для неликвидных активов может привести к некоторому расхождению реального дохода и теоретической прибыли.

Глава 3

Статистический анализ

Переходя к статистическому анализу, следует уточнить понятие цены финансового актива. В настоящей работе мы будем оперировать с тридневными ценами. Иными словами мы предполагаем, что время t изменяется дискретно с интервалом в 1 секунду. На реальном рынке для ликвидного финансового актива в течение одной секунды могут происходить несколько сделок, а котировки могут изменяться несколько раз. Для определенности, в качестве цены $X(t)$ будем брать значение последней сделки в момент времени t (если в момент t сделок не было, то будем брать последнюю сделку на интервале $[0, t]$). Различия, возникающие в результатах статистического анализа при другом определении цены $X(t)$, не носят принципиального характера, хотя и могут влиять на возможность практической реализации предлагаемых стратегий. В качестве анализируемого актива будем рассматривать

- фьючерс на индекс SP500 (EminiSP500)
- фьючерс на индекс Nasdaq-100 (EminiNasdaq100)
- обыкновенные акции PAO ЕЭС (EESR)

Данные фьючерсы торгуются на бирже CME (Chicago Mercantile Exchange) посредством электронной платформы GLOBEX. Для каждого

торгового дня выбираем наиболее ликвидный фьючерсный контракт, то есть либо фьючерс с ближайшей к рассматриваемому дню датой погашения, либо следующий за ним. Акции РАО ЕЭС торгуются на российской бирже ММВБ (Московская Межбанковская Валютная Биржа).

Значение H при построении соответствующих характеристик для указанных фьючерсов измеряется в пунктах соответствующего фьючерса. Изменение на 1 пункт соответствует изменению денежной позиции: на \$50 для EminiSP500, на \$20 для EminiNasdaq100. При этом минимальный шаг изменения цены равен 0.25 пункта для EminiSP500 и 0.5 пункта для EminiNasdaq100. В случае акций РАО ЕЭС значение H измеряется в копейках, а дискретность составляет одну десятую копейки.

3.1 Анализ H -волатильности

1. Будем проводить анализ $kagi$, $renko$ H -волатильности порядка p для внутридневных цен фьючерса на индекс SP500 и фьючерса на индекс Nasdaq-100 за 2002-2003 гг. Данный период содержит 471 дней, торговый интервал одного дня равен [9:30,16:00] (Eastern Time Zone). Так как практически каждую секунду по указанным активам происходит сделка, то статистическая выборка вполне репрезентативна. Здесь мы будем рассматривать только случаи $p = 1, 2$, наиболее важные с практической точки зрения: случай $p = 1$ играет ключевую роль при построении $kagi$, $renko$ H -стратегий; случай $p = 2$ имеет значение для построения меры изменчивости рынка (см. параграф 1.5).

Для каждого i -ого дня из указанного периода при заданном H вычисляем соответствующим образом величины $N_{kagi}^H(i)$, $N_{renko}^H(i)$, которые есть $kagi$, $renko$ H -инверсия соответственно, а также величины $V_H^{(1)}(i)$, $V_H^{(2)}(i)$, $U_H^{(1)}(i)$, $U_H^{(2)}(i)$ по формулам (1.29), (1.30) соответственно. В окон-

чательных расчетах мы не учитываем скачки цен между днями, то есть разницу между ценой открытия текущего торгового дня и ценой закрытия предыдущего торгового дня. И это вполне естественно, поскольку данные скачки обусловлены внешней макроэкономической информацией, а наша цель состоит в выявлении определенных закономерностей внутри одного дня. Кроме того, из этих же соображений мы не будем учитывать в расчетах последний период монотонности i -ого торгового дня, то есть при вычислении величин $V_H^{(p)}(i)$, $U_H^{(p)}(i)$, $p = 1, 2$ в формулах (1.29), (1.30) соответственно полагаем $N = N_{kagi}^H(i) - 1$, $M = N_{renko}^H(i) - 1$ (заметим, что данная коррекция не носит принципиального характера). Иными словами, для заданного H нас будет интересовать $kagi$, $renko$ H -волатильность порядка p , $p = 1, 2$ за 2002-2003гг., то есть соответствующие величины

$$\eta^{(p)}(H) = \frac{\sum_i V_H^{(p)}(i)}{\sum_i (N_{kagi}^H(i) - 1)}, \quad \xi^{(p)}(H) = \frac{\sum_i U_H^{(p)}(i)}{\sum_i (N_{renko}^H(i) - 1)}$$

где суммирование ведется по всем i -ым торговым дням. Рассмотрим также величины

$$\psi_{kagi}^p(H) = \frac{\eta^{(p)}(H)}{H^p}, \quad \psi_{renko}^p(H) = \frac{\xi^{(p)}(H)}{H^p}$$

Если бы статистический анализ проводился для реализации винеровского процесса, то данные величины были бы в первом приближении константами в зависимости от H (а именно: $\psi_{kagi}^1(H) \approx 2$, $\psi_{kagi}^2(H) \approx 5$, $\psi_{renko}^1(H) \approx 2$, $\psi_{renko}^2(H) \approx 6$, см. утверждение 1.4.4). Оказывается, что подобным свойством обладает и финансовый рынок. В частности, для исследуемых фьючерсов графики функций $\psi_{kagi}^p(H)$, $\psi_{renko}^p(H)$, $p = 1, 2$ приведены на рис. 3.1-3.4. Отметим, в частности, что соответствующие значения H -волатильности для EminiSP500 и EminiNasdaq100 почти одинаковы. Это можно объяснить тем, что данные фьючерсы торгуются на одной бирже и схожи по своей специфике. То есть естествен-

но предполагать, что инвесторы, торгующие EminiSP500, будут торговать и EminiNasdaq100 и наоборот, а следовательно общие закономерности для данных фьючерсов будут схожими, что и отражается в равенстве H -волатильностей. Иными словами, можно говорить о том, что H -волатильность отражает не столько поведение финансового актива, сколько психологию инвесторов, торгующих данным активом.

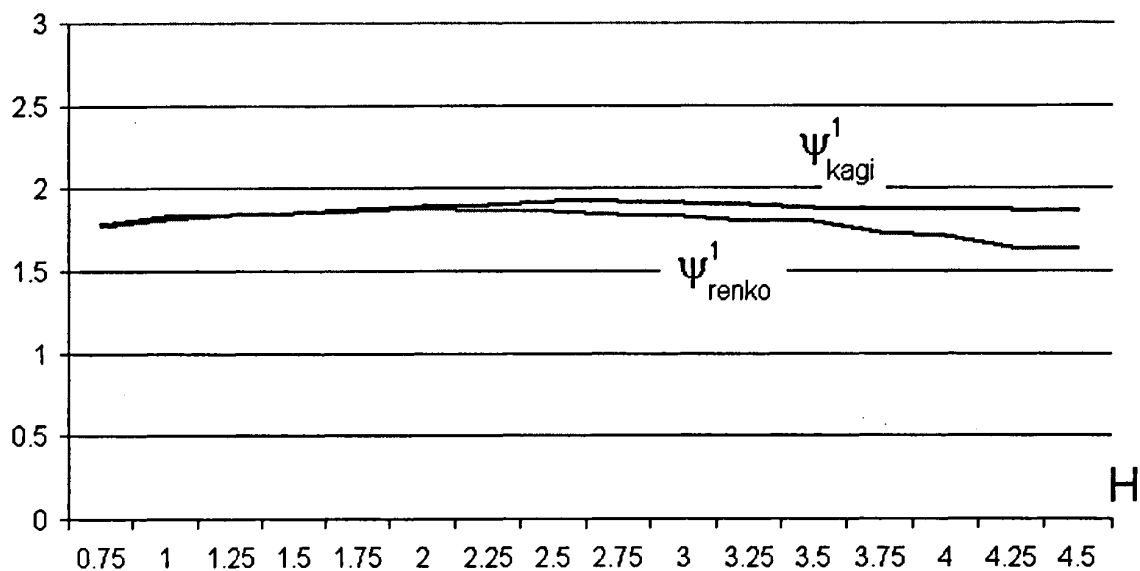


Рис. 3.1: График $\psi_{kagi}^1(H)$, $\psi_{renko}^1(H)$ для EminiSP500 за 2002-2003гг.

Из приведенных графиков явно видно, что величины $\psi_{kagi}^p(H)$, $p = 1, 2$ лучше аппроксимируются константами, чем величины $\psi_{renko}^p(H)$, $p = 1, 2$, то есть дисперсия ряда $\psi_{kagi}^p(H)$ для различных H из указанного диапазона меньше дисперсии соответствующего ряда $\psi_{renko}^p(H)$. Это может быть пояснено тем, что в случае renko H -построения величина X_m^* вообще говоря не является экстремумом на интервале $[\rho_{m-1}, \rho_m]$, в отличие от kagi случая, когда X_n^* — есть в точности либо максимум либо минимум X на $[\tau_{n-1}, \tau_n]$ (строго говоря, X_n^* — есть либо супремум

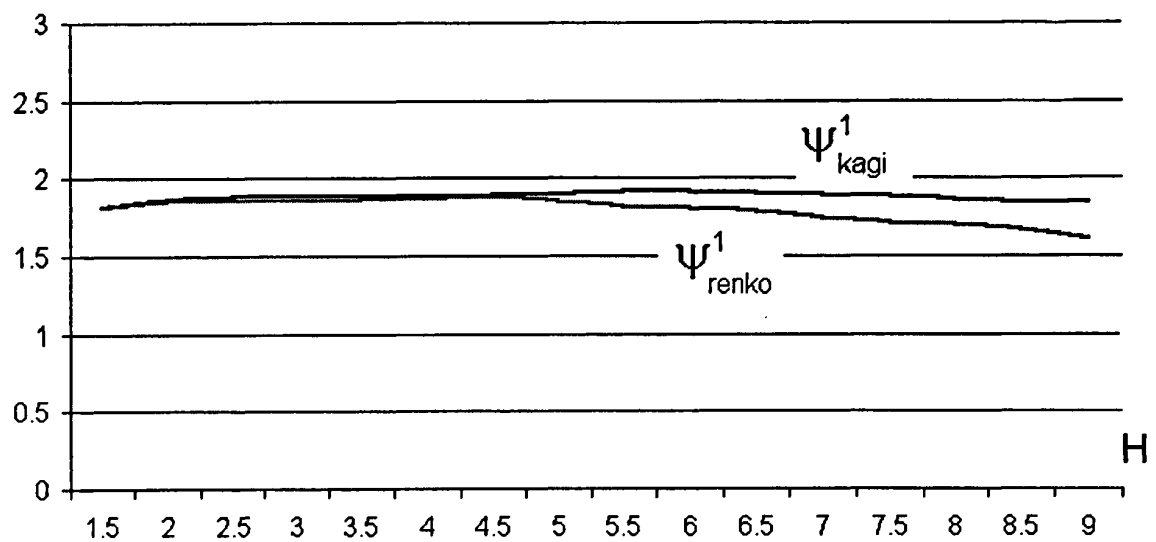


Рис. 3.2: График $\psi_{kagi}^1(H)$, $\psi_{renko}^1(H)$ для EminiNasdaq100 за 2002-2003гг.

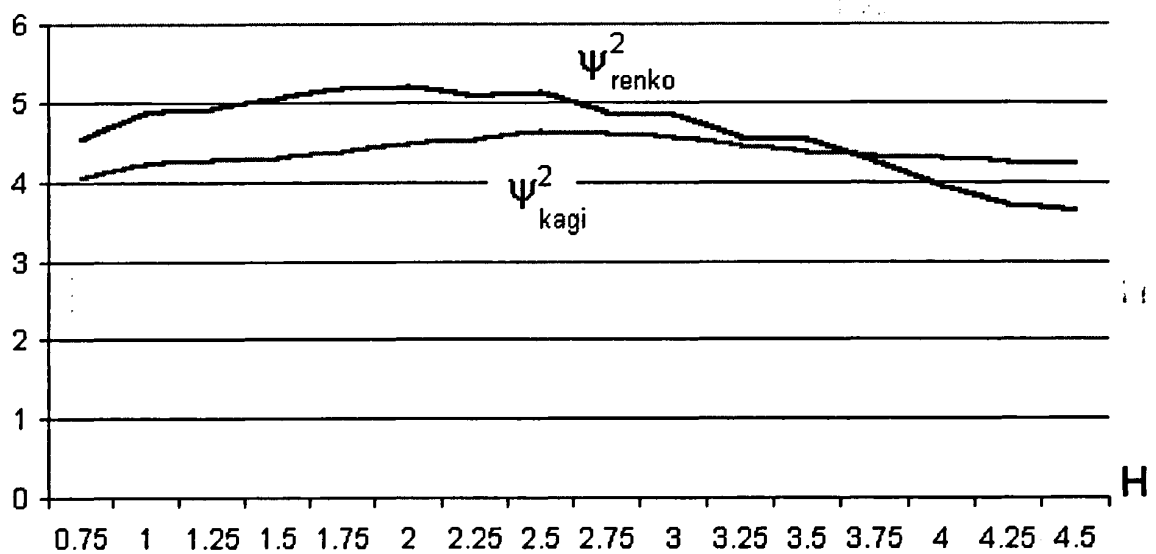


Рис. 3.3: График $\psi_{kagi}^2(H)$, $\psi_{renko}^2(H)$ для EminiSP500 за 2002-2003гг.

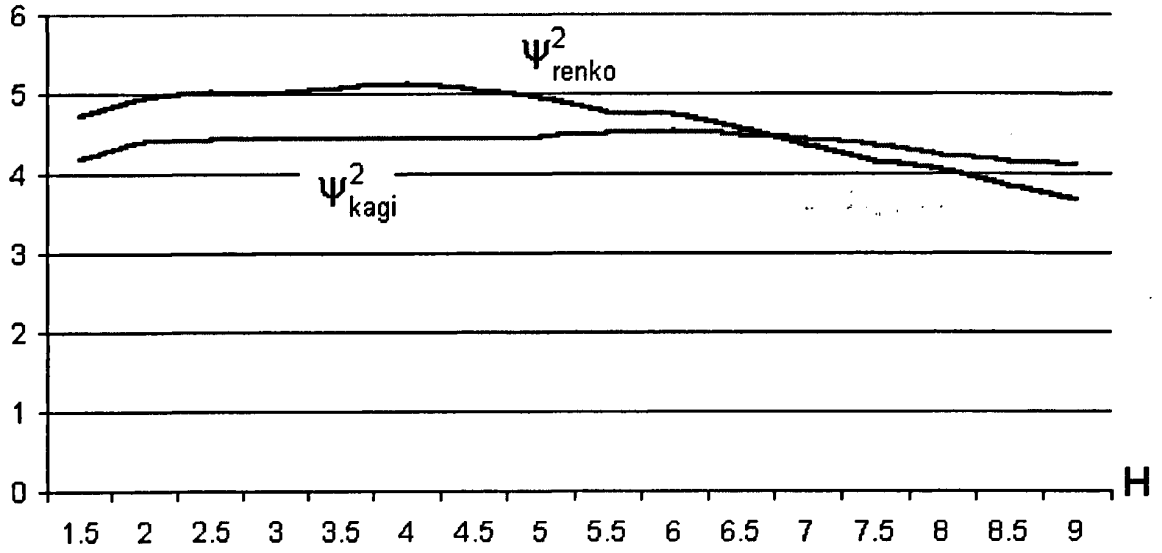


Рис. 3.4: График $\psi_{kagi}^2(H)$, $\psi_{renko}^2(H)$ для EminiNasdaq100 за 2002-2003гг.

либо инфинум, но в силу условия (2.4) экстремум достигается). Поэтому при больших H возможно ощутимое расхождение для случаев kagi, renko, что как раз и видно на графиках. Кроме того при фиксированном H внутридневная kagi H -волатильность в зависимости от торгового дня также ведет себя более устойчиво, чем renko H -волатильность. Иными словами, для некоторого H из заданного диапазона обозначим через $D_{kagi}^p(H)$ — дисперсию ряда $\psi_{kagi}^p(H; i)$, $D_{renko}^p(H)$ — дисперсию ряда $\psi_{renko}^p(H; i)$, $p = 1, 2$, где индекс i указывает на торговый день из определенного выше периода, а

$$\psi_{kagi}^p(H; i) = \frac{V_H^{(p)}(i)}{H^p (N_{kagi}^H(i) - 1)}, \quad \psi_{renko}^p(H; i) = \frac{U_H^{(p)}(i)}{H^p (N_{renko}^H(i) - 1)}$$

Заметим, что величины $\psi_{kagi}^p(H; i)$, $\psi_{renko}^p(H; i)$ являются для i -ого торгового дня соответственно kagi, renko H -волатильностью порядка p , деленной на H^p , $p = 1, 2$. Статистический анализ финансовых данных показывает, что величина $D_{kagi}^p(H)$ значительно меньше соответствующей

величины $D_{renko}^p(H)$. Например, для EminiSP500 при $H = 1.5$

$$D_{kagi}^1(H) \approx 0.02, \quad D_{kagi}^2(H) \approx 0.7, \quad D_{renko}^1(H) \approx 0.07, \quad D_{renko}^2(H) \approx 3$$

В частности, на рис. 3.5 приведен график $\psi_{kagi}^1(H; i)$, $H = 1.5$ для EminiSP500 в зависимости от i -ого дня из указанного выше диапазона. Учитывая вышесказанное, можно сделать вывод, что kagi методика работает лучше renko в определенном смысле, то есть соответствующие величины обладают меньшей дисперсией.

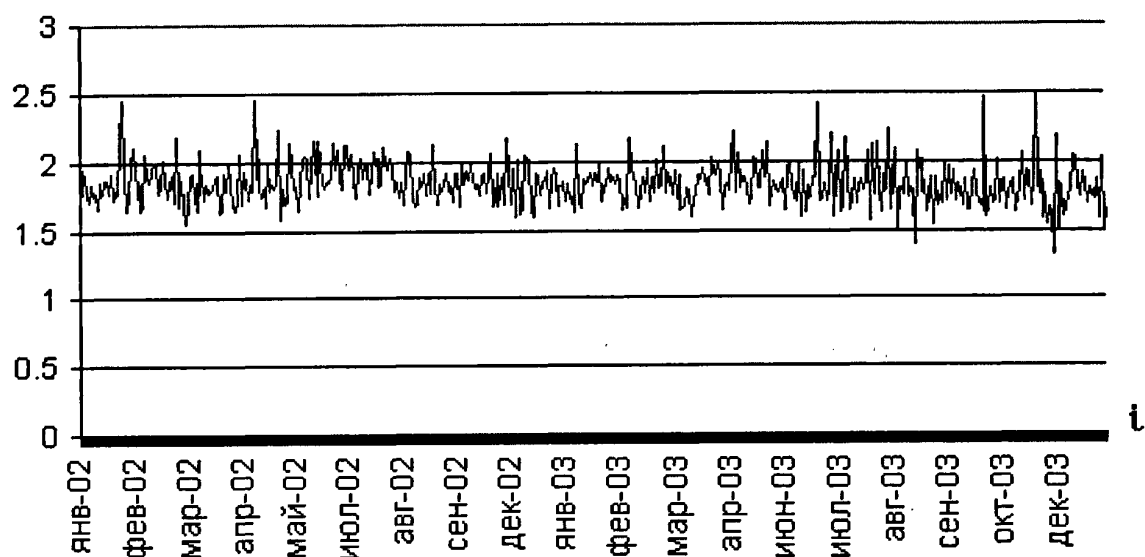


Рис. 3.5: График $\psi_{kagi}^1(H, i)$, $H = 1.5$ для EminiSP500

Статистический анализ показывает также, что kagi, renko H -волатильность является устойчивой характеристикой актива в зависимости от колебаний рынка. То есть для “бурных” и “спокойных” дней значения H -волатильности близки друг к другу (см., например, рис. 3.5 и сравни с графиком H -инверсии на рис. 3.8). Иначе говоря, H -волатильность является некоторой фрактальной характеристикой финансового актива, в

то время как степень активности рынка хорошо отражается H -инверсией (см. параграфы 1.5, 3.2).

2. Здесь же приведем результаты анализа для внутридневных цен акций РАО ЕЭС за 2001-2002 гг. (479 дней), временной интервал одного дня равен торговому периоду ММВБ. Значение H измеряется в копейках, а величины $\psi_{kagi}^p(H)$, $\psi_{renko}^p(H)$, $p = 1, 2$ вычисляются аналогично, как и в случае фьючерсов. Соответствующие графики см. на рис. 3.6, 3.7.

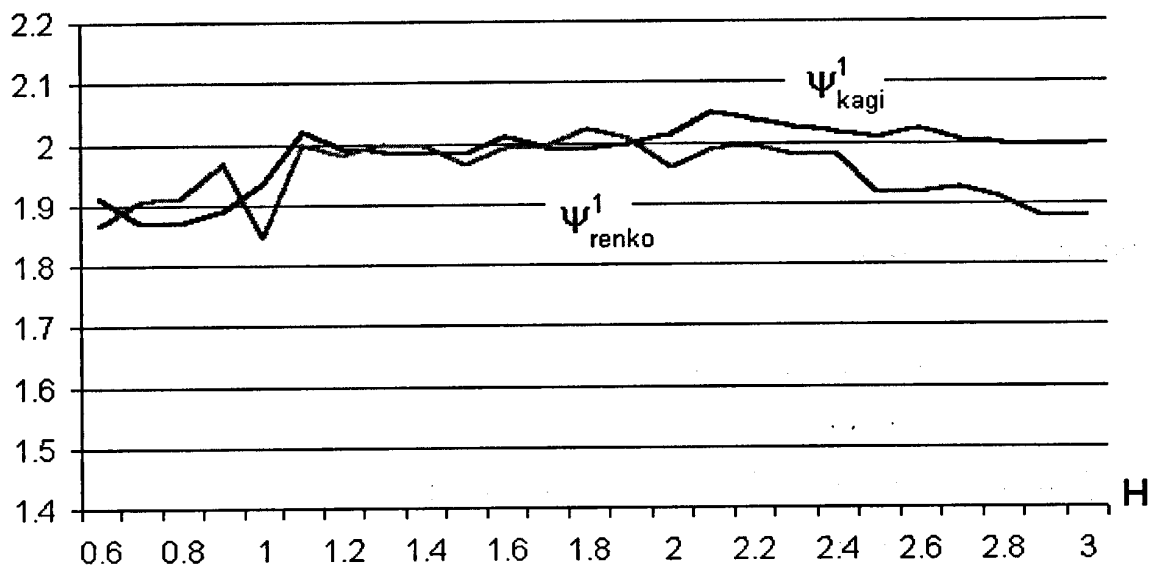


Рис. 3.6: График $\psi_{kagi}^1(H)$, $\psi_{renko}^1(H)$ для РАО ЕЭС за 2001-2002 гг.

3. Резюмируя вышесказанное, выделим основную ценность статистического анализа, приведенного в настоящем параграфе, состоящую в том, что:

- во-первых, $kagi$, $renko$ H -волатильность порядка p ($p = 1, 2$) ведет себя „регулярным образом“, то есть для достаточно большого T выполнены соотношения

$$\eta_T^p(H, X) \approx C_K(p)H^p, \quad \xi_T^p(H, X) \approx C_R(p)H^p$$

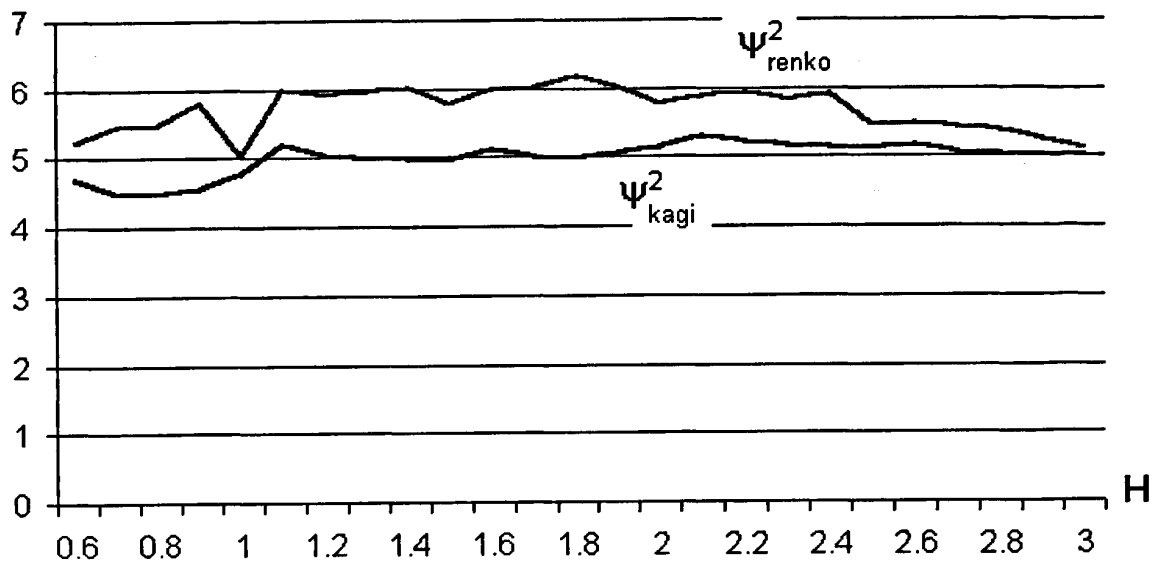


Рис. 3.7: График $\psi^2_{kagi}(H)$, $\psi^2_{renko}(H)$ для РАО ЕЭС за 2001-2002гг.

где константы $C_K(p)$, $C_R(p)$ для достаточно большого T зависят только от вида финансового актива X , но не зависят от H . Отсюда, в частности, следует, что свойства (2.6), (2.9) и свойства (1.73), (1.74) вполне адекватны реальности

- во-вторых, для некоторых финансовых активов соответствующие константы $C_K(1)$ и $C_R(1)$ отличны от двойки, что говорит о возможности получения арбитража посредством применения рассмотренных выше kagi, renko H -стратегий (подтверждение данной гипотезы см. в параграфе 3.3).

3.2 Анализ H -инверсии. Оценивание волатильности

1. В данном параграфе, так же как и в параграфе 3.1, будем анализировать внутридневные цены фьючерсов EminiSP500, EminiNasdaq100

за 2002-2003 гг. Для каждого i -ого торгового дня из указанного диапазона обозначим через $N_{kagi}^H(i)$, $N_{renko}^H(i)$ соответственно kagi, renko H -инверсию. Заметим, что для любого i выполнено очевидным образом

$$N_{kagi}^H(i) \geq N_{renko}^H(i)$$

Действительно, kagi H -построение фиксирует все изменения цены на величину, не меньшую H , в то время как в renko H -построении соответствующий скачок может и не появиться даже в случае, когда цена изменится на величину равную почти $2H$ (см. параграф 1.1). Графики $N_{kagi}^H(i)$, $N_{renko}^H(i)$ для соответствующих фьючерсов приведены на рис. 3.8, 3.9. Сравнивая графики 3.5 и 3.8, отметим еще раз, что H -волатильность является устойчивой характеристикой финансового актива, поскольку не зависит от активности рынка, которая отражена в значениях H -инверсии.

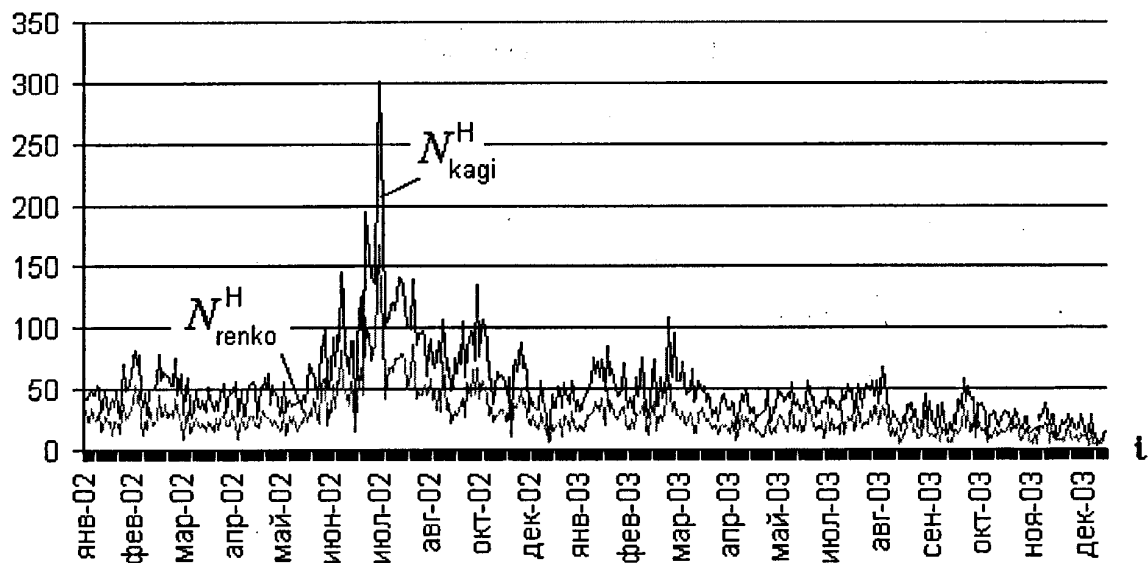


Рис. 3.8: График $N_{kagi}^H(i)$, $N_{renko}^H(i)$, $H = 1.5$ для EminiSP500

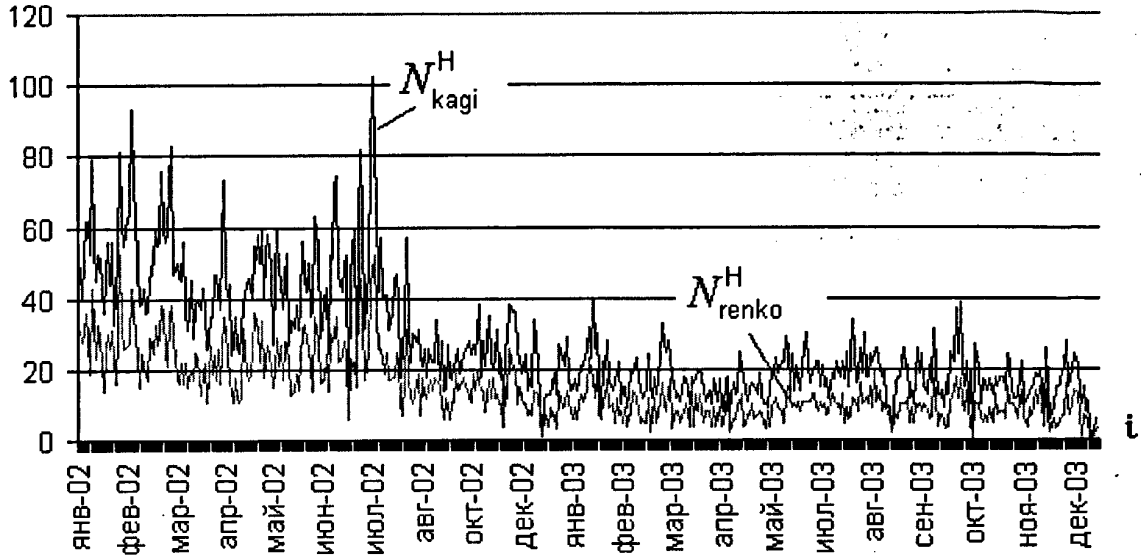


Рис. 3.9: График $N_{kagi}^H(i)$, $N_{renko}^H(i)$, $H = 4$ для EminiNasdaq100

2. Перейдем теперь к анализу волатильности финансового актива, то есть величин (1.64), (1.65), (1.71), (1.72). Для каждого i -ого дня из указанного периода находим последовательности $(\tau_n^*(i))_{n=0,\dots,N(i)}$, $(\rho_m^*(i))_{m=0,\dots,M(i)}$ из соответствующих kagi, renko H -построений. Вычисляем величины $V_H^{(2)}(i)$, $U_H^{(2)}(i)$ по формулам (1.29), (1.30) соответственно, где полагаем $N = N(i) - 1$, $M = M(i) - 1$, то есть не учитывается последний интервал монотонности (см. комментарии в параграфе 3.1). Рассмотрим также величины

$$\begin{aligned}
 T_{kagi}(H) &= \sum_i (\tau_{N(i)-1}^*(i) - \tau_0^*(i)), & T_{renko}(H) &= \sum_i (\rho_{M(i)-1}^*(i) - \rho_0^*(i)) \\
 N_{kagi}(H) &= \sum_i (N(i) - 1), & N_{renko}(H) &= \sum_i (M(i) - 1) \\
 V_{kagi}(H) &= \sum_i V_H^{(2)}(i), & V_{renko}(H) &= \sum_i U_H^{(2)}(i)
 \end{aligned}$$

где суммирование ведется по всем i -ым торговым дням (за единицу времени принят один день, то есть 24 часа). Иными словами торговый пери-

од i -ого дня ограничивается началом первого интервала монотонности и концом предпоследнего в соответствующем kagi, renko H -построении. В итоге для заданного H получим величины

$$\begin{aligned}\sigma_{kagi}(H) &= H \sqrt{\frac{N_{kagi}(H)}{T_{kagi}(H)}}, & \sigma_{renko}(H) &= H \sqrt{\frac{2N_{renko}(H)}{T_{renko}(H)}} \\ \sigma_{kagi}^{(2)}(H) &= \sqrt{\frac{V_{kagi}(H)}{K_2 T_{kagi}(H)}}, & \sigma_{renko}^{(2)}(H) &= H \sqrt{\frac{2V_{renko}(H)}{R_2 T_{renko}(H)}}\end{aligned}$$

где константы K_2 , R_2 определяются как среднее арифметическое соответствующих величин $\psi_{kagi}^2(H)$, $\psi_{renko}^2(H)$, определенных в параграфе 3.1. А именно: в случае фьючерса EminiSP500 для H из интервала $[0.75, 4]$ с шагом 0.25

$$K_2 \approx 4.4, \quad R_2 \approx 4.8,$$

в случае фьючерса EminiNasdaq100 для H из интервала $[1.5, 8]$ с шагом 0.5

$$K_2 \approx 4.4, \quad R_2 \approx 4.7$$

Графики величин $\sigma_{kagi}(H)$, $\sigma_{renko}(H)$, $\sigma_{kagi}^{(2)}(H)$, $\sigma_{renko}^{(2)}(H)$ для соответствующих фьючерсов приведены на рис. 3.10, 3.11. Из данных графиков можно увидеть, что величины $\sigma_{kagi}^{(2)}(H)$, $\sigma_{renko}^{(2)}(H)$ лучше, чем $\sigma_{kagi}(H)$, $\sigma_{renko}(H)$, аппроксимируются константой, то есть соответствующее среднеквадратическое отклонение меньше. Однако, как уже отмечалось в параграфе 1.5, волатильность, определенная на основе H -инверсии, более наглядна с практической точки зрения и не требует выполнения соотношений (1.73), (1.74).

Рассмотрим также величину

$$\tilde{N}_{renko}(H) = \sum_i \tilde{M}(i)$$

где суммирование ведется по всем i -ым торговым дням, а $\tilde{M}(i)$ есть величина $\tilde{M}_T(H, X)$ из renko H -построения (см. параграф 1.1), где интервал

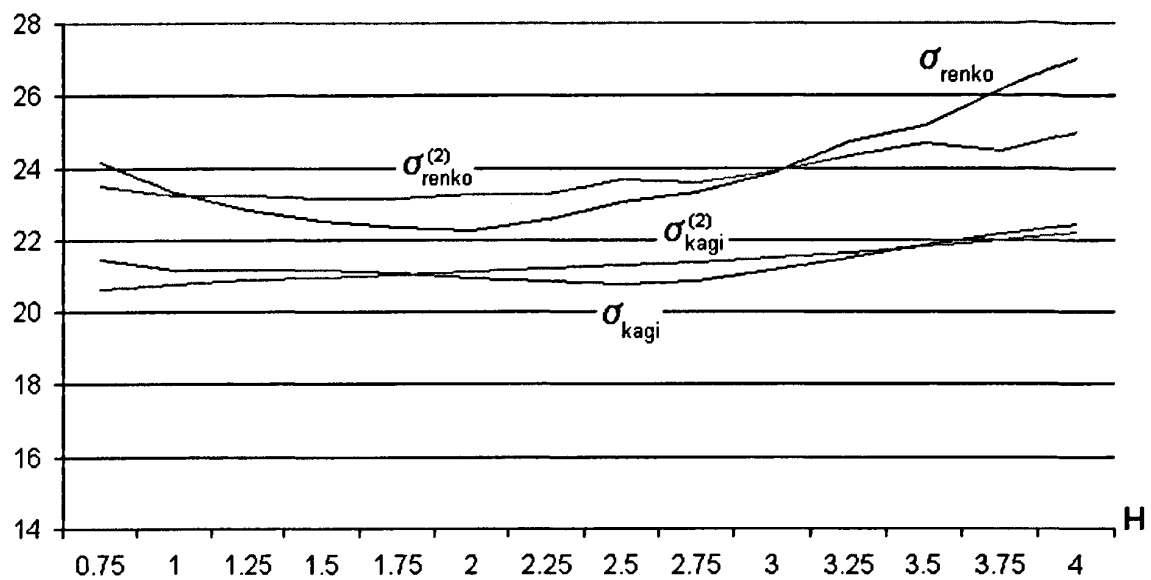


Рис. 3.10: График $\sigma_{kagi}(H)$, $\sigma_{renko}(H)$, $\sigma_{kagi}^{(2)}(H)$, $\sigma_{renko}^{(2)}(H)$ для EminiSP500

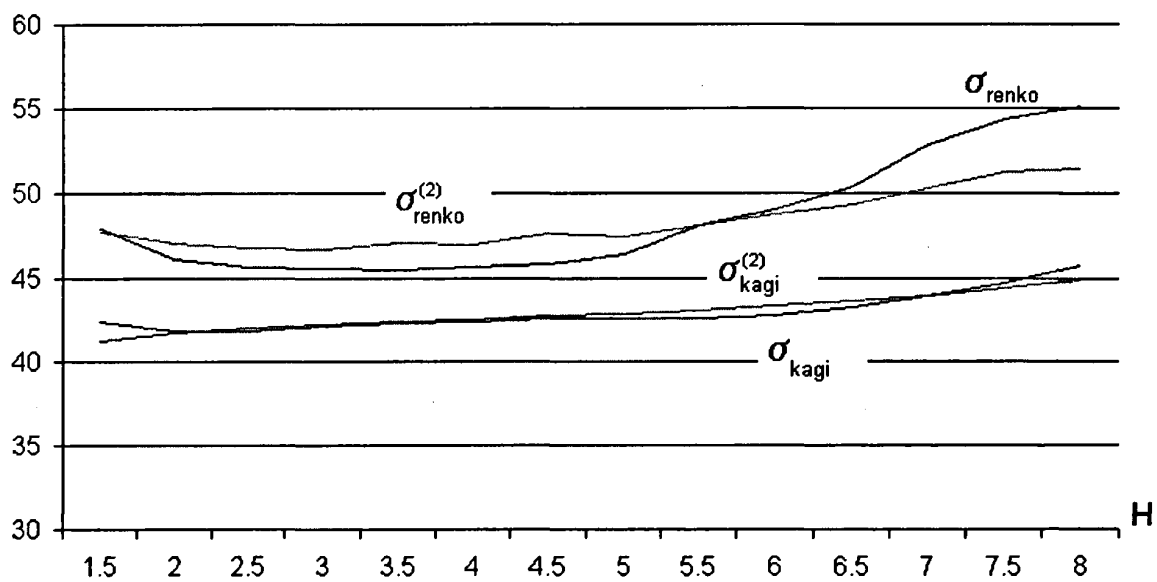


Рис. 3.11: График $\sigma_{kagi}(H)$, $\sigma_{renko}(H)$, $\sigma_{kagi}^{(2)}(H)$, $\sigma_{renko}^{(2)}(H)$ для EminiNasdaq100

$[0, T]$ для i -ого дня равен $[\rho_0^*(i), \rho_{M(i)-1}^*(i)]$. Величина $\widetilde{M}_T(H, X)$ весьма наглядна с практической точки зрения, так как говорит о том, сколько скачков у цены X происходит на интервале $[0, T]$, если под скачком понимать попадание цены на новый по отношению к предыдущему уровень вида $X(0) + kH$, где k — целое число. Рассмотрим также величину

$$\nu_R(H) = \sqrt{\frac{\widetilde{N}_{renko}(H)}{2N_{renko}(H)}}$$

Если в качестве X брать броуновское движение, то $\nu_R(H) \approx 1$ (см. (1.60)). Статистический анализ показывает, что для финансовых активов величина $\nu_R(H)$ также является константой (см. график на рис. 3.12, график для EminiNasdaq100 почти идентичен). А значит, величины (1.65) и (1.66) задают одно и то же значение волатильности с точностью до коэффициента $\nu_R(H) \approx 1$.

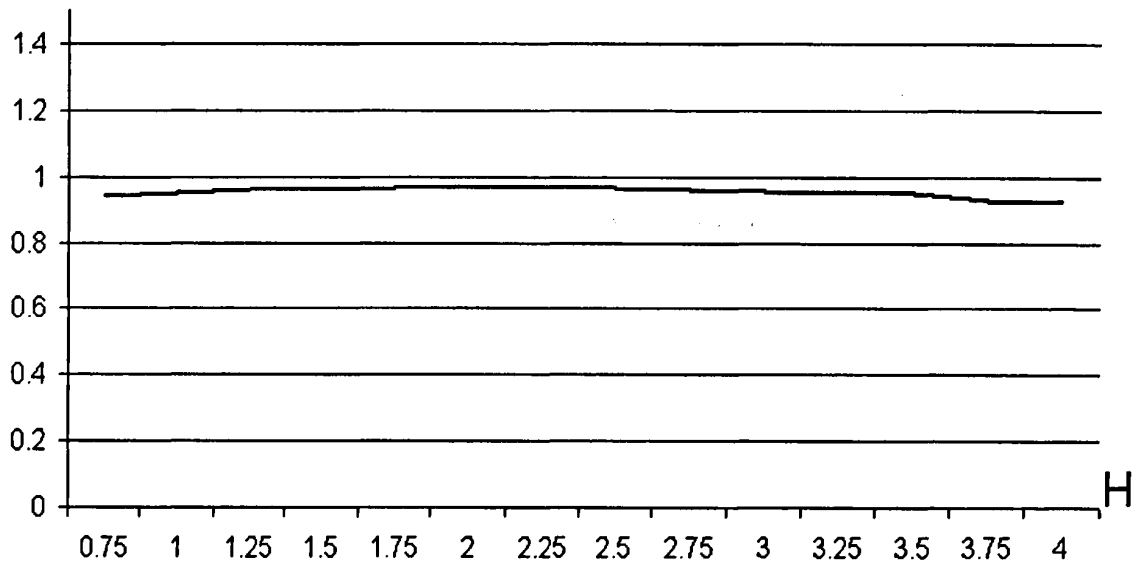


Рис. 3.12: График $\nu_R(H)$ для EminiSP500

3. Найдем также оценку величин (1.68), (1.69), построенных для од-

ного торгового дня. Для этого вычисляем для каждого i -ого дня величины $\omega_{kagi}^H(i)$, $\omega_{renko}^H(i)$ по формулам (1.68), (1.69) соответственно, где $N_T(H, X) = N(i) - 1$, $M_T(H, X) = M(i) - 1$, а величина $R_T(X)$ — есть амплитуда колебания X на соответствующем интервале $[\tau_0^*(i), \tau_{N(i)-1}^*(i)]$, $[\rho_0^*(i), \rho_{M(i)-1}^*(i)]$. Рассмотрим величины

$$\omega_{kagi}(H) = \frac{\sum_i \omega_{kagi}^H(i)}{\sum_i 1}, \quad \omega_{renko}(H) = \frac{\sum_i \omega_{renko}^H(i)}{\sum_i 1}$$

где суммирование ведется по всем i -ым торговым дням. Иными словами величина $\omega_{kagi}(H)$, $\omega_{renko}(H)$ оценивает внутрисуточное колебание актива X . Если бы статистический анализ проводился для реализации винеровского процесса, то данные величины были бы в первом приближении константой в зависимости от H , причем $\omega_{kagi}(H) \approx \omega_{renko}(H) \approx 1.596$ (см. (1.67)). Оказывается, что подобным свойством обладает и финансовый рынок. В частности, для исследуемых фьючерсов графики $\omega_{kagi}(H)$, $\omega_{renko}(H)$ приведены на рис. 3.13, 3.14.

Резюмируя вышесказанное, отметим, что основной вывод настоящего параграфа состоит в следующем:

- величины (1.64), (1.65), (1.71), (1.72) являются адекватной мерой изменчивости финансового актива, то есть волатильностью
- H -инверсия позволяет достаточно хорошо оценивать амплитуду колебания цен

3.3 Моделирование kagi, renko H -стратегий

1. Как показывает статистический анализ (см. параграф 3.1), для некоторых финансовых активов H -волатильность отличается от $2H$, а следовательно возникает надежда на то, что применение kagi, renko H -стратегии для этих активов позволит извлечь арбитражные возможно-

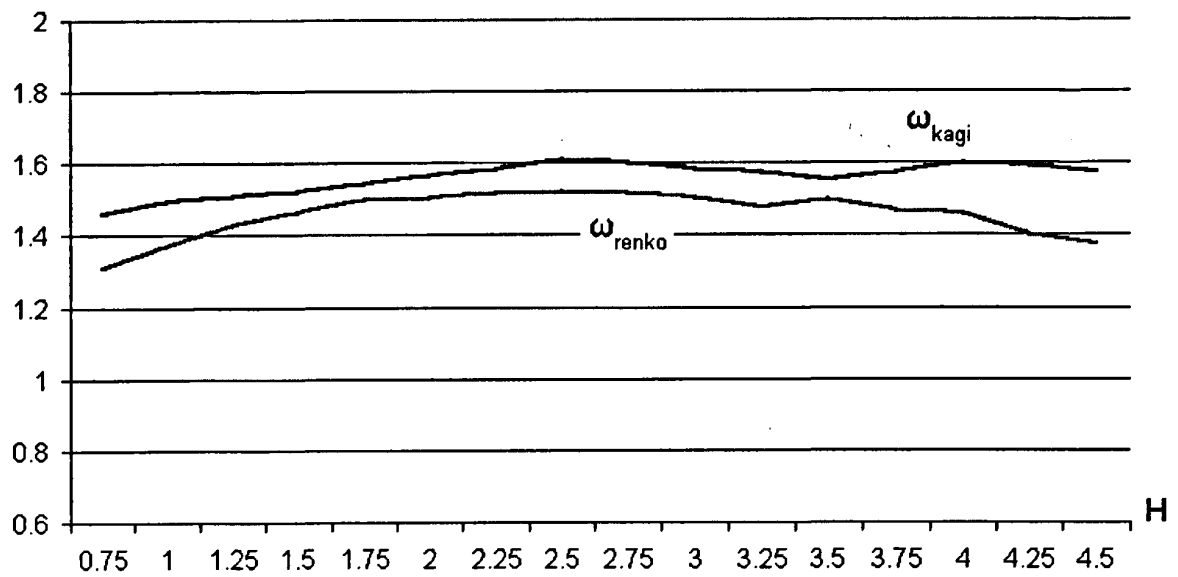


Рис. 3.13: График $\omega_{kagi}(H)$, $\omega_{renko}(H)$ для EminiSP500

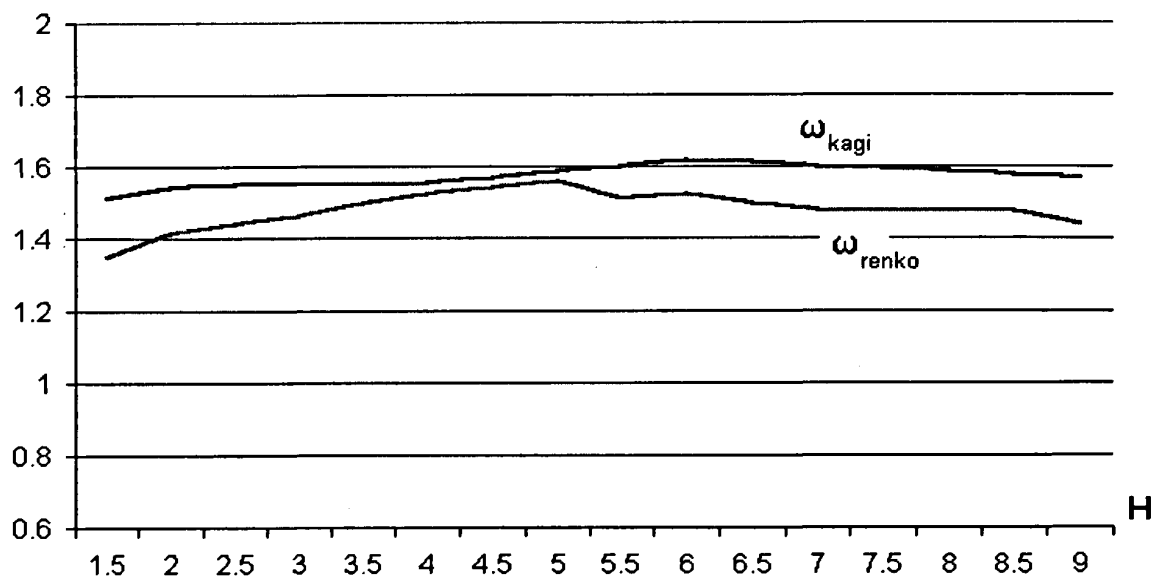


Рис. 3.14: График $\omega_{kagi}(H)$, $\omega_{renko}(H)$ для EminiNasdaq100

сти. Для фьючерсов на индексы SP500, Nasdaq100, для которых соответствующий параметр (а именно $K(H)$, $R(H)$ из соотношений (2.6), (2.9)) меньше двойки, эта надежда оправдывается. Как уже отмечалось выше, данные фьючерсы торгуются электронным образом, что делает результаты моделирования адекватными реальности. Считаем, что параметр $\lambda = 2.5$, то есть за сделку с одним контрактом взимается комиссия в размере \$2.5, что вполне соответствует рыночной ситуации. Предполагаем, что H -волатильность (то есть $K(H)$, $R(H)$) была оценена по 2002 году, а моделирование осуществлялось в 2003 году. Обозначим через $Y^K(H, i)$, $Y^R(H, i)$ — доход от kagi, renko H -стратегии соответственно для i -ого торгового дня за 2003 год (измеряется в долларах). Поскольку наши стратегии являются внутридневными, то полагаем, что на конец дня ненулевая позиция по фьючерсам закрывается по цене последней сделки данного дня, то есть на начало и на конец дня в нашем портфеле фьючерсы отсутствуют. Обозначим также

$$\pi_{kagi}^H(i) = \sum_{j \leq i} Y^K(H, j), \quad \pi_{renko}^H(i) = \sum_{j \leq i} Y^R(H, j),$$

где суммирование ведется по всем j -ым торговым дням за 2003 год до i -ого дня включительно. Иначе говоря, $\pi_{kagi}^H(i)$, $\pi_{renko}^H(i)$ — есть накопленный результат моделирования соответственно kagi, renko H -стратегии с начала 2003 года вплоть до i -ого дня. Еще раз подчеркнем, что в течение всего периода торговли оценка параметров $K(H)$, $R(H)$ не менялась, что говорит о сильной устойчивости данных стратегий во времени. Кроме того, опираясь на результаты теорем 2.1.5, 2.1.10, отметим, что требование непрерывности траекторий никоим образом не ограничивает общности данных стратегий для случая $K(H) < 2$, $R(H) < 2$, так как реальный доход окажется еще больше в силу утверждений 2.1.2, 2.1.7.

Параметр H выбирался из следующих соображений. Маленькое зна-

чение H (то есть сравнимое с минимальной дискретностью цены) брать нехорошо, поскольку при этом практически вся прибыль от сделки идет на уплату комиссии. Кроме того сами интервалы монотонности в этом случае бывают настолько короткими по времени, что делает исполнение заявки, даже при электронном доступе, иногда проблематичным. Слишком большое значение H брать также нецелесообразно, так как тогда количество транзакций для одного дня будет незначительным, а поэтому закрытие позиции в конце дня по цене последней сделки существенным образом может искажать результаты. Графики $\pi_{kagi}^H(i)$, $\pi_{renko}^H(i)$ для EminiSP500 ($H = 1.5$) и EminiNasdaq100 ($H = 4$) приведены на рис. 3.15, 3.16 соответственно. Отметим, что рис. 3.8, 3.9 дают информацию о количестве трейдов для каждого дня в соответствующих стратегиях.

Основной вывод приведенных выше результатов статистического анализа заключается в следующем:

- kagi, renko H -стратегии целесообразно применять на финансовом рынке для использования имеющихся арбитражных возможностей;

Кроме того можно отметить, что kagi H -стратегия приносит больший доход, чем renko H -стратегия, поэтому в совокупности с анализом из параграфов 3.1, 3.2 можно заключить в целом, что с практической точки зрения использование kagi H -построений более эффективно в соответствующих смыслах, чем renko H -построений.

3.4 Анализ H -паттернов

1. В настоящем параграфе приведены некоторые H -паттерны, для которых возможен нетривиальный прогноз. Для подсчета статистики берем данные о внутридневных ценах фьючерсов EminiSP500, EminiNasdaq100

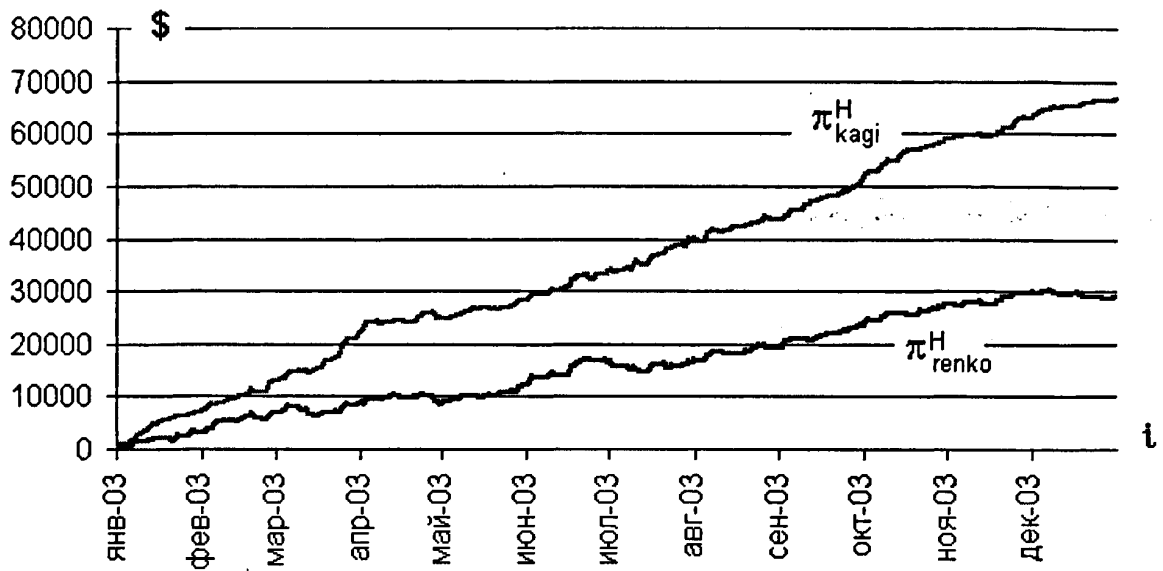


Рис. 3.15: График $\pi_{kagi}^H(i)$, $\pi_{renko}^H(i)$, $H = 1.5$ для EminiSP500

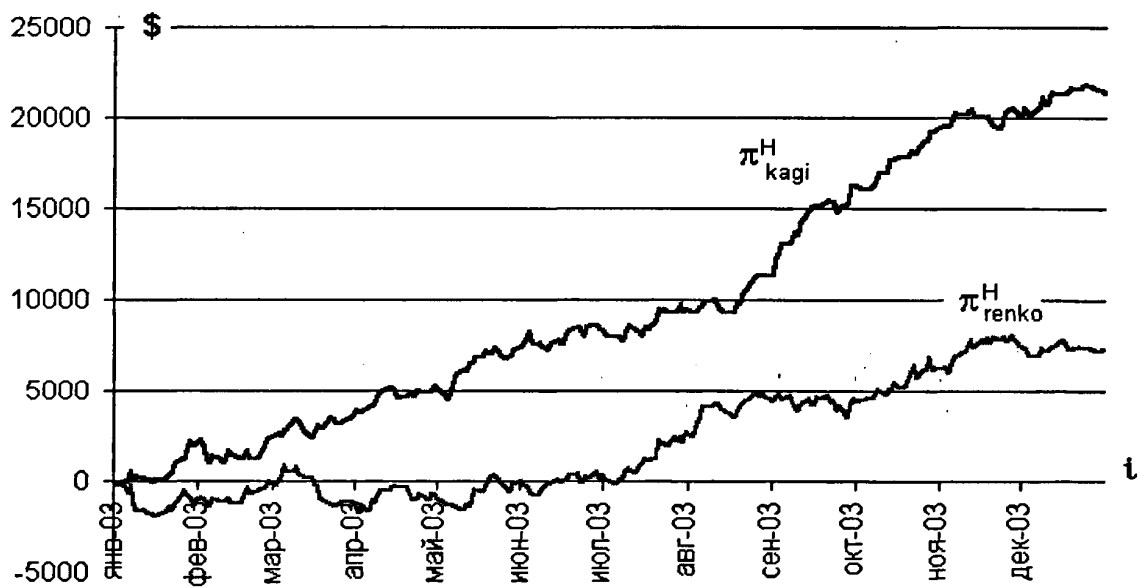


Рис. 3.16: График $\pi_{kagi}^H(i)$, $\pi_{renko}^H(i)$, $H = 4$ для EminiNasdaq100

за год, а именно, с 01 октября 2001 года по 09 сентября 2002 года (данный период содержит 234 торговых дня). Во всех случаях полагаем $\varepsilon = 1$, $A^+ = A^- = H$, $Q = 4$. Для лучшего представления о мощности статистической выборки вместо эмпирических вероятностей P^+ и P^- будем приводить N^+ и N^- — число элементов множества Ω^+ и Ω^- соответственно. Ясно, что тогда $P^+ = \frac{N^+}{N^++N^-}$, $P^- = \frac{N^-}{N^++N^-}$. Значение H , как было отмечено выше, измеряется в пунктах соответствующего фьючерса (изменение на 1 пункт цены фьючерса соответствует изменению денежной позиции на \$50 для EminiSP500 и на \$20 для EminiNasdaq100). Таблица 3.1 дает информацию о числах N^+ и N^- для некоторых H -паттернов, найденных для указанных фьючерсов по kagi H -построению. Указанные в таблицах „перекосы“ носят устойчивый характер и проявляются при рассмотрении и других временных интервалов. Объяснение этому по-видимому нужно искать в психологии поведения участников рынка. Подчеркнем еще раз, что приведенные результаты статистического анализа выявляют внутридневные закономерности. Поэтому, если для какого-то момента времени t , в который реализовался исследуемый H -паттерн, до конца текущего торгового дня момент (2.12) не наступил, то при подсчете статистики данная ситуация не учитывается.

Рассмотрим использование данных результатов в реальной торговле на примере H -паттерна $\{+1, -2, +2, -1\}$, $H = 3$ для EminiNasdaq100. Можно сказать, что этот H -паттерн формализует так называемые „перевернутые голова и плечи“, фигуру технического анализа, широко используемую инвесторами на рынке (см. [1]). На рис. 3.17 приведен график внутридневных цен указанного фьючерса за 20.09.2002г. На нем выделен момент времени t , где реализовался данный H -паттерн. Действительно, отмеченные экстремумы из kagi H -построения принимают значения: 869.5, 874, 867, 874, 871. Тогда соответствующая кусочно-монотонная

| EminiNasdaq100 | | | | EminiSP500 | | | |
|----------------|-------------------------|-------|-------|------------|-------------------------|-------|-------|
| H | $K_H(1), \dots, K_H(4)$ | N^+ | N^- | H | $K_H(1), \dots, K_H(4)$ | N^+ | N^- |
| 2 | +4,-2,+3,-1 | 6 | 20 | 1 | +5,-1,+1,-1 | 22 | 40 |
| | +2,-4,+3,-1 | 13 | 2 | | +2,-3,+2,-1 | 56 | 27 |
| | +1,-1,+4,-1 | 177 | 121 | | +1,-2,+3,-1 | 137 | 86 |
| | +1,-2,+5,-1 | 36 | 13 | | -1,+2,-3,+1 | 95 | 138 |
| | -2,+4,-2,+1 | 31 | 16 | | -1,+1,-4,+1 | 71 | 141 |
| | -5,+1,-1,+1 | 36 | 57 | | -2,+1,-3,+1 | 85 | 140 |
| 3 | +3,-3,+2,-1 | 13 | 1 | 1.5 | +3,-1,+3,-1 | 25 | 6 |
| | +1,-2,+3,-1 | 92 | 63 | | +1,-1,+4,-1 | 50 | 30 |
| | +1,-2,+2,-1 | 212 | 141 | | +1,-2,+3,-1 | 56 | 29 |
| | -1,+2,-2,+1 | 131 | 214 | | -1,+2,-3,+1 | 33 | 49 |
| | -1,+2,-3,+1 | 51 | 84 | | -1,+1,-4,+1 | 36 | 69 |
| | -3,+2,-1,+1 | 70 | 46 | | -3,+1,-3,+1 | 11 | 22 |

Таблица 3.1: Статистика kagi H -паттернов

функция имеет приращения $(+4.5, -7, +7, -3)$, а значит принадлежит H -паттерну $\{+1, -2, +2, -1\}$ для $H = 3$. Статистика, указанная в таблице 3.1 говорит о том, что в момент t надо покупать фьючерс по цене 871. В этом случае, как видно из графика, мы бы заработали 3 пункта на один контракт, что соответствует прибыли в размере \$60.

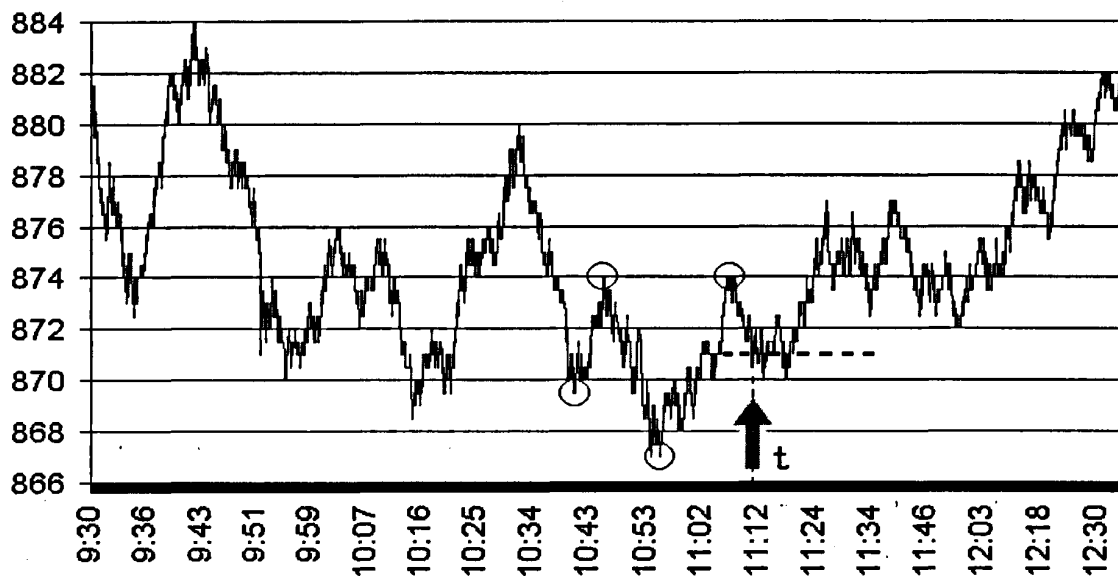


Рис. 3.17: Пример kagi H -паттерна $\{+1, -2, +2, -1\}$, $H = 3$

Приведенные в данном параграфе результаты статистического анализа позволяют сделать вывод, что

- в некоторых рыночных ситуациях возможен нетривиальный прогноз, а значит целесообразно учитывать статистику поведения цены для определенных H -паттернов в торговле на реальном рынке.

Литература

- [1] *Борисов А.Б.* Большой экономический словарь — М.: Книжный мир. 2004.
- [2] *Буллинский А.В., Ширяев А.Н.* Теория случайных процессов — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
- [3] *Дуади Р., Йор М., Ширяев А.Н.* О вероятностных характеристиках величин “падения” в стандартном броуновском движении // Теория вероят. и ее применения, 1999, том 44, вып. 1, с.3-13.
- [4] *Жакод Ж., Ширяев А.Н.* Предельные теоремы для случайных процессов. Т. 1,2. — М.: Физматлит, 1994.
- [5] *Кашин Б.С., Пастухов С.В.* О краткосрочном прогнозировании на рынке ценных бумаг // Доклады РАН, 2002, том 387-6, с.754-756.
- [6] *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов — М.: Наука, 1974.
- [7] *Мэрфи Дж.Дж.* Технический анализ фьючерсных рынков. Теория и практика — М.: Диаграмма. 1998.
- [8] *Пастухов С.В.* Об H -волатильности в финансовой математике // Успехи мат. наук, 2003, том 58, вып.1, с.191-192.

- [9] *Пастухов С.В.* О некоторых вероятностно-статистических методах в техническом анализе // Теория вероят. и ее применения, 2004, том 49, вып.2, с.297-316.
- [10] *Севастьянов Е.А.* Кусочно монотонная аппроксимация и Ф-вариации // Analysis Mathematica, 1975, V.1, P.141-164.
- [11] *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики: в 2-х т. — М.: Фазис, 1998.
- [12] *Ширяев А.Н.* Вероятность: в 2-х т. — М.: МЦНО, 2004.
- [13] *Bachelier L.* Théorie de la spéculation // Annales de l'Ecole Normale Supérieure. 1900, V.17, P.21-86.
- [14] *Black F., Scholes M.* The pricing of options and corporate liabilities // Journal of Political Economy. 1973, V. 81, №3, P.637-659.
- [15] *Bollerslev T.* Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity // Journal of Econometrics. 1986, V. 31, P.307-327.
- [16] *Celent Communications Trends in Electronic Trading* // Boston, MA, USA, march, 2003 (http://www.atdesk.com/pdfs/trnd_in_elec_trad.pdf)
- [17] *Cox J.C., Ross R.A., Rubinstein M.* Option pricing: a simplified approach // Journal of Financial Economics. 1979, V.7, №3, P.229-263.
- [18] *Dalang R.S., Morton A., Willinger W.* Equivalent martingale measures and no-arbitrage in stochastic securities market models // Stochastics and Stochastics Reports. 1990, V.29, №2, P.185-201.
- [19] *Delbaen F., Schachermayer W.* A general version of the fundamental theorem of asset pricing // Mathematische Annalen. 1994, V.300, №3, P.463-520.

- [20] *Delbaen F., Schachermayer W.* The Fundamental Theorem of Asset Pricing for Unbounded Stochastic Processes — Preprint. Zürich: ETH-Zentrum, 1997.
- [21] *Engle R. F.* Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation // *Econometrica*. 1982, V. 50, №4, P.987-1008.
- [22] *Guillaume D.M., Dacorogna M.M., Davé R.D, Müller U.A., Olsen R.B., Picet O.V.* From the bird's eye to the microscope: A survey of new stylized facts of the intra-daily foreign exchange markets // *Finance and Stochastics*. 1997, V.1. №2, P.95-129.
- [23] *Harrison J.M., Pliska S.R.* Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading // *Stochastic Processes and their Applications*. 1981, V. 11, №3, P.215-260.
- [24] *Hurst H.* Long-term storage capacity of reservoirs // *Transactions of American Society of Civil Engineers*. 1951, V. 116, P.770-808.
- [25] *Karatzas I., Shreve S.E.* Brownian Motion and Stochastic Calculus — Berlin: Springer-Verlag, 1998.
- [26] *Mandelbrot B.B.* The variation of some other speculative prices // *Journal of Business*. 1967, V.40, P.393-413.
- [27] *Mandelbrot B.B.* When can price be arbitrated efficiently? A limit of the validity of the random walk and martingale models // *Review of Economics and Statistics*. 1971, V.53, P.225-236.
- [28] *Mandelbrot B.B.* Statistical methodology for non-periodic cycles: from the covariance to R/S analysis // *Annals of Economic and Social Measurement*. 1972, V.1, №3, P.259-290.

- [29] *Merton R.S.* Theory of rational option pricing // Bell Journal of Economics and Management Science. 1973, №4, P.141-183.
- [30] *Nison S.* Beyond candlesticks: New Japanese charting techniques revealed — USA: John Wiley & Sons, 1994.
- [31] *Peters E.E.* Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics — New York: Wiley, 1994.
- [32] *Samuelson P.A.* Rational theory of warrant pricing // Industrial Management Review. 1965, V.6, P.13-31.
- [33] *Wiener N.* The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients // Massachusetts's Journal of Math., 1924, V.3, P.72-94.