

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Мультифрактальный анализ сложных сигналов

А.Н. Павлов, В.С. Анищенко

Представлены основы теории мультифрактального анализа, базирующегося на непрерывном вейвлет-преобразовании, и сведения, необходимые для его применения на практике. Рассмотрено расширение концепции мультифракталов на случай нерегулярных функций — метод максимумов модулей вейвлет-преобразования. Исследуются возможности и ограничения данного подхода при анализе сложных сигналов. Обсуждается эффективность техники мультифрактального формализма при исследовании нестационарных процессов и сигналов малой длительности. Рассмотрены эффекты потери мультифрактальности в динамике систем различной природы.

PACS numbers: 05.45. – a, 05.45.Pq, 05.45.Tr

Содержание

1. Введение (859).
 2. Мультифрактальный формализм: от сингулярных мер к сингулярным функциям (861).
 - 2.1. Фрактальная размерность. 2.2. Фрактальные меры. 2.3. Фрактальные функции.
 3. Мультифрактальный анализ на основе вейвлет-преобразования (865).
 - 3.1. Вейвлет-анализ сингулярных функций. 3.2. Метод максимумов модулей вейвлет-преобразования.
 4. Примеры применения мультифрактального анализа: эффекты потери мультифрактальности (869).
 - 4.1. Хаотическая динамика взаимодействующих систем. 4.2. Стохастическая синхронизация. 4.3. Мультифрактальный анализ динамики артериального давления крови.
 5. Возможности и ограничения мультифрактального анализа (873).
 6. Заключение (875).
- Список литературы (876).

1. Введение

Теория фракталов и мультифракталов [1–6] сейчас широко используется для описания свойств самоподобия и сложного скейлинга, наблюдаемых в самых разных физических ситуациях [7–15]. К числу фракталов относят геометрические объекты — линии, поверхности, тела, которые имеют сильно изрезанную форму и демонстрируют некоторую повторяемость в широком диапазоне масштабов. Повторяемость может быть полной (в этом

случае говорят о регулярных фракталах), либо может наблюдаться некоторый элемент случайности (такие фракталы называют случайными). Структура случайных фракталов на малых масштабах не является идентичной структуре всего объекта, но их статистические характеристики совпадают, и свойства самоподобия сохраняются после усреднения по статистически независимым реализациям объекта.

Для количественного описания фракталов достаточно одной величины — размерности Хаусдорфа или показателя скейлинга, описывающего сохраняемость геометрии или статистических характеристик при изменении масштаба. Однако в физике, химии, биологии и других науках встречается много явлений, которые требуют распространения понятия фрактала на сложные структуры с более чем одним показателем скейлинга. Такие структуры часто характеризуются целым спектром показателей, и размерность Хаусдорфа является лишь одним из них [2, 3]. Сложные фракталы, называемые *мультифракталами*, важны прежде всего потому, что именно они, как правило, и встречаются в природе, тогда как простые самоподобные объекты представляют собой идеализацию реальных явлений. Фактически мультифрактальный подход означает, что изучаемый объект каким-то образом можно разделить на части, каждая из которых обладает своими свойствами самоподобия [2]. Данный подход, изначально предложенный для статистического анализа особенностей скейлинга сингулярных мер [16–20], с успехом применялся в разных областях: при изучении агрегационных свойств клеточных элементов крови в биологии и диффузионного роста кластеров, для описания разрушения материалов, в теории развитой гидродинамической турбулентности, при исследовании несоразмерных структур и квазикристаллов в физике твердого тела, для анализа структуры молекул ДНК, в задачах об одномерных случайных блужданиях и о броуновском движении, для описания инвариантной вероятностной меры странных аттракторов и т.д. [21–26]. Самые разные объекты природы могут быть отнесены к специальному

А.Н. Павлов, В.С. Анищенко. Международный институт нелинейной динамики, Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
410026 Саратов, ул. Астраханская 83, Российская Федерация
Тел. (8452) 51-45-49, (8452) 51-57-38
E-mail: pavlov@chaos.ssu.runnet.ru, wadim@chaos.ssu.runnet.ru

Статья поступила 3 мая 2006 г.,
после доработки 25 марта 2007 г.

классу "мультифракталов", и, пожалуй, довольно сложно найти область науки, в которой мы не встретились бы с представителями этого класса.

Важными представителями мультифракталов являются многие сигналы, регистрируемые в натурных экспериментах, и для целого ряда практических задач несомненную ценность представляет наличие строгого математического подхода к анализу сложной структуры процессов различной природы. Простые, или *монофрактальные*, сигналы (например: $1/f$ -шум, винеровский случайный процесс и т.д.) являются однородными в том смысле, что их скейлинговые характеристики остаются неизменными в любом диапазоне масштабов. Спектр таких сигналов, имеющий вид $S(f) \sim f^{-\beta}$, не изменяется в широком частотном диапазоне, т.е. β представляет собой постоянную величину. Мультифрактальные процессы допускают разложение на участки с различными локальными свойствами скейлинга [27]. Соответственно для количественного описания таких процессов требуется большое число характеристик. В частности, спектр мультифрактальных процессов не может быть описан степенным законом с единственным показателем β .

Известно несколько попыток распространить концепцию мультифракталов на случай функциональных зависимостей (сигналов) [27, 28]. Одна из этих попыток предпринималась на основе метода структурных функций, который достаточно часто использовался разными исследователями. Возможно, наиболее широкое распространение данный подход получил в задачах изучения сильно развитой турбулентности [27, 29]. В начале 1990-х годов Мьюзи, Бакри и Арнеодо [30, 31] был предложен более совершенный метод "максимумов модулей вейвлет-преобразования" (ММВП), имеющий ряд существенных преимуществ: возможность проведения анализа широкого класса сингулярностей — не только самих сигналов, но и их производных, меньшая погрешность вычисления скейлинговых характеристик и т.д. Техника ММВП, которая может успешно применяться в исследованиях структуры неоднородных процессов различной природы, основывается на вейвлет-анализе [32–40], называемом математическим "микроскопом" ввиду его способности сохранять хорошее разрешение на разных масштабах.

Отметим, что сегодня вейвлет-анализ представляет собой обширное научное направление. Во многих работах, посвященных практическому использованию теории вейвлетов, применяется дискретное преобразование. Это связано с тем, что базисы на основе непрерывных вейвлетов не являются строго ортонормированными. Дискретное преобразование приводит к более точному представлению сигнала, особенно в задачах, связанных с его сжатием и последующим восстановлением. Оно обеспечивает возможность осуществления процедуры быстрого преобразования, что является актуальным не только при передаче информации, но и при анализе случайных процессов. Применение дискретного преобразования наиболее естественно в случае дискретных оцифрованных данных (временных рядов), и оно используется на практике, когда требуется быстро вычислить те или иные характеристики.

Непрерывное преобразование более "медленное", поскольку содержит избыточную информацию. Тем не менее при анализе структуры сложных сигналов возникают ситуации, когда данная избыточность может ока-

заться полезным свойством, позволяющим получать более наглядные и ясные результаты, в частности, интуитивно более понятные специалистам с базовым радиофизическим образованием. Кроме того, таким специалистам информацию об изменении во времени характерных частот ритмических процессов и о их взаимодействии, предоставляемую непрерывным вейвлет-преобразованием, легче анализировать — в этом случае можно визуально отслеживать поведение во времени мгновенных частот и амплитуд на разных масштабах [41, 42].

Метод ММВП, предложенный в работах Мьюзи, Бакри и Арнеодо [30, 31], основан на непрерывном вейвлет-преобразовании, которое и будет рассматриваться нами далее. Привлекательность данного метода состоит в том, что с его помощью можно анализировать как сингулярные меры, так и сингулярные функции; он является более универсальным аппаратом для исследования мультискейлинговых свойств объектов по сравнению с ранее разработанными подходами [27, 28]. Вейвлеты часто интерпретируют как обобщение классических алгоритмов покрытия множества сферами, кубиками и т.п. Поскольку базисные функции вейвлет-преобразования являются хорошо локализованными (солитоноподобными), они представляют собой эффективный математический аппарат для анализа нестационарных процессов.

Метод максимумов модулей вейвлет-преобразования сегодня становится одним из популярных инструментов анализа нестационарных данных. После опубликования в 1999 г. в журнале *Nature* работы по мультифрактальному описанию сердечного ритма [43] и серии статей [44–48] мультифрактальный анализ стал широко использоваться в качестве инструмента прикладных исследований, в частности, для обработки результатов медико-биологических измерений в случаях, когда нестационарность ограничивает применение классических методов анализа экспериментальных данных. Этот инструмент расширяет возможности решения задач диагностики на основе теории вейвлетов, ранее продемонстрированные в работе [49], авторы которой предложили клинически значимую меру нарушения работы сердца. За последние несколько лет наличие мультифрактальной структуры было обнаружено и численно охарактеризовано в динамике очень многих систем различной природы. Существует мнение, что метод ММВП является одним из наиболее эффективных инструментов статистического описания неоднородных процессов.

Поскольку многие процессы в природе относятся к классу "мультифракталов", то мультифрактальность можно рассматривать как достаточно общее явление, причем исследование этого явления и возможность его количественного описания представляет интерес уже само по себе. Кроме того, такое исследование имеет и практическую ценность с точки зрения изучения возможностей разработки на основе ММВП нового метода анализа экспериментальных данных, применимого при решении широкого круга задач. Отметим, что методов обработки нестационарных данных существует совсем немного. Если свойства процесса даже на коротких временных интервалах успевают существенно измениться, то использование классических алгоритмов анализа случайных процессов может приводить к ошибкам в интерпретации полученных результатов. Арсенал уни-

версальных инструментов, применимых независимо от свойства стационарности, включает в себя интерпретацию на основе концепции аналитического сигнала [50, 51], метод анализа флуктуаций относительно тренда [52, 53], вейвлет-анализ [32–40]. Обсуждаемый в данной статье мультифрактальный подход может с полным основанием рассматриваться как еще один инструмент, дополняющий этот список. Несмотря на то что в ММВП на промежуточных этапах вычислений используется вейвлет-преобразование, было бы неправильно воспринимать этот метод как составную часть вейвлет-анализа: он представляет собой сочетание двух различных теорий — теории вейвлетов и теории мультифракталов, имеющей глубокую аналогию со статистической термодинамикой. Такое сочетание двух различных теорий открывает новые возможности решения прикладных задач. Однако метод ММВП еще недостаточно широко известен исследователям, занимающимся обработкой экспериментальных данных.

В настоящей статье сделана попытка изложить основы теории мультифрактального анализа сложных сигналов, базирующегося на непрерывном вейвлет-преобразовании, и сведения, необходимые для его использования на практике. Рассматриваемый подход довольно сложен для применения без подробной методики, описывающей, как пользоваться данным инструментом. В этой статье мы постарались сделать такое описание как можно более простым и доступным для широкой аудитории. Представленные примеры применения метода ММВП, как правило, основываются на результатах исследований авторов данной статьи. Особое внимание уделяется описанию новых возможностей анализа структуры сигналов, которые предоставляет данный метод, и существующих ограничений техники мультифрактального формализма.

Показано, что мультифрактальный анализ является эффективным методом исследования корреляционных свойств нестационарных случайных процессов. Иллюстрируются преимущества данного подхода по сравнению с классическим корреляционным анализом при рассмотрении сигналов малой длительности.

2. Мультифрактальный формализм: от сингулярных мер к сингулярным функциям

2.1. Фрактальная размерность

Фрактальные объекты обладают самоподобными свойствами и демонстрируют наличие разнообразных сингулярностей (сильной изрезанности формы). Для того чтобы количественно охарактеризовать сложность их геометрии, традиционно используется концепция фрактальной размерности. Данная величина может быть определена следующим образом. Пусть d — размерность евклидова пространства, в котором находится фрактальный объект. Целиком покроем этот объект d -мерными "шарами" диаметром ε , при этом каждая точка объекта обязательно должна попасть в тот или иной шар. Предположим, что для этого требуется не менее чем $N(\varepsilon)$ шаров. Тогда, если при достаточно малых ε величина $N(\varepsilon)$ изменяется по степенному закону

$$N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-D_0}, \quad (1)$$

то D_0 называется фрактальной размерностью исследуемого объекта или емкостью. В теории фракталов часто используется также понятие размерности Хаусдорфа d_H , которое вводится следующим образом [54–56]. Пусть S — некоторое множество в пространстве R^n . Предположим, что мы покрываем это множество шарами, диаметр которых не превышает значения ε . Мера Хаусдорфа l_δ определяется как

$$l_\delta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_K \sum_i r_i^\delta. \quad (2)$$

Здесь оператор \inf определяет минимальное значение по всем возможным покрытиям K множества S шарами диаметром r_i ($r_i \leq \varepsilon$). Указанный предел зависит от параметра δ . Размерность Хаусдорфа d_H представляет собой такое значение δ , при котором l_δ является конечной:

$$\begin{cases} \delta < d_H \implies l_\delta = \infty, \\ \delta > d_H \implies l_\delta = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Согласно данному определению d_H может принимать нецелые значения.

Несмотря на то что размерность Хаусдорфа хорошо определена с точки зрения математики, ее чрезвычайно сложно вычислить на практике. Именно поэтому исследователи предпочитают иметь дело с более "практичными" характеристиками, к числу которых относится емкость. Для многих фракталов D_0 и d_H имеют близкие значения или совпадают; в общем случае справедливо неравенство $d_H \leq D_0$ [57].

Величина D_0 принимает целые значения для простых геометрических объектов: точки, прямой линии, гладкой двумерной поверхности (соответственно $D_0 = 0, 1, 2$) и нецелые значения для самоподобных фрактальных объектов с сильно изрезанной формой. Классическим примером служит канторово множество, процедура построения которого состоит в следующем (рис. 1). Отрезок прямой линии с единичной длиной делится на три равные части, средняя из которых удаляется. Затем делению на три части и последующему удалению середины подвергается каждый из двух оставшихся отрезков и т.д. до бесконечности. Канторово множество представляет собой бесконечное число точек, которые не удаляются в ходе этой процедуры.

Чтобы вычислить размерность канторова множества, представим степенную зависимость (1) в виде

$$D_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}. \quad (4)$$

На n -м шаге построения мы имеем 2^n отрезков длиной $1/3^n$. В качестве $N(\varepsilon)$ на этом шаге можно взять величину

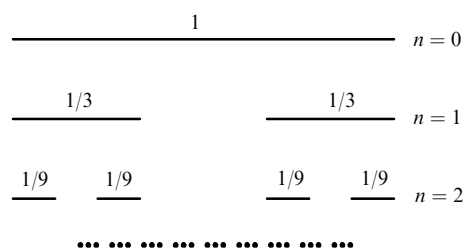


Рис. 1. Процедура построения канторова множества.

2^n , а в качестве ε — величину $1/3^n$. В пределе $\varepsilon \rightarrow 0$, который соответствует пределу $n \rightarrow \infty$, получим

$$D_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,63. \quad (5)$$

Канторово множество, как и другие регулярные фракталы, сохраняет свою геометрию при изменении масштаба в диапазоне значений ε , в котором справедливо соотношение (1). Перемасштабирование будет приводить к появлению степенной зависимости вида $N(\lambda\varepsilon) = \lambda^{-D_0}N(\varepsilon)$.

2.2. Фрактальные меры

Фракталы в природе могут встречаться не только в виде сложных геометрических объектов. Различные процессы на фракталах (физические, химические и т.д.) могут генерировать стационарные распределения, называемые *фрактальными мерами*. Примерами таких мер служат инвариантная вероятностная мера на странном аттракторе, распределение вероятностей роста для процессов ограниченной диффузией агрегации или распределение массы на некотором фрактальном множестве. Если в качестве количественной характеристики сложной геометрии фракталов используется размерность D_0 , то математическое описание фрактальных мер осуществляется в терминах *спектра сингулярностей* $f(\alpha)$ [2]. Смысл этой функции состоит в следующем. Предположим, что задано распределение меры μ на некотором множестве, например распределение заряда или массы. Если это множество покрывать шарами диаметром ε , то мера шара с центром в точке x_i зависит от ε по степенному закону вида:

$$\mu_{x_i}(\varepsilon) \sim \varepsilon^{\alpha(x_i)}, \quad (6)$$

где $\alpha(x_i)$ называется *экспонентой сингулярности*. Зависимость (6) удобнее переписать в виде

$$\alpha(x_i) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \mu_{x_i}(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}. \quad (7)$$

Чем меньше $\alpha(x_i)$, тем более сингулярным является распределение меры в этой точке. При равномерном распределении $\alpha(x_i) = 1$. Предел $\alpha(x_i) = 0$ соответствует распределению меры, подобному функции Дирака, и означает, что заряд или масса сосредоточены в одной точке [58]. Спектр сингулярностей $f(\alpha)$ характеризует зависимость от ε числа элементов покрытия N_ε , соответствующих точкам с экспонентой сингулярности, равной некоторому значению α :

$$N_\alpha(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-f(\alpha)}. \quad (8)$$

По смыслу величина f соответствует размерности Хаусдорфа [2]. В случае равномерного распределения меры на множестве $\alpha = \text{const}$ и спектр сингулярностей представляет собой единственную точку на плоскости (α, f) . При неравномерном распределении меры функция $f(\alpha)$ имеет более сложный (колоколообразный) вид.

Вышесказанное можно проиллюстрировать на примере канторова множества. Предположим, что на этом множестве задано равномерное распределение меры μ , например массы, и для покрытия множества берется 2^n элементов (окружностей) диаметром $\varepsilon = 3^{-n}$. Мера каж-

дого элемента покрытия будет равна $\mu_{x_i}(\varepsilon) = 2^{-n}$, где x_i — центр окружности. Согласно формуле (7) экспонента сингулярности $\alpha(x_i)$, определяемая наклоном зависимости $\ln \mu_{x_i}(\varepsilon) / \ln \varepsilon$, принимает значение $\alpha(x_i) = \ln 2 / \ln 3$. В пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ это значение экспоненты соответствует каждой точке канторова множества. В рассматриваемом примере экспонента α совпадает с размерностью Хаусдорфа d_H , а спектр сингулярностей $f(\alpha)$ состоит из одной точки $f(\alpha) = \alpha \approx 0,63$ [2]. Таким образом, мы наблюдаем только один тип сингулярностей, и соответствующая мера μ называется *однородной* [1, 3].

Если мера распределена на множестве неравномерно, то спектр сингулярностей усложняется. Для иллюстрации проанализируем случай биномиального распределения [2]: предположим, что отрезок $[0, 1]$ вновь делится на три равные части; средняя часть отбрасывается, но теперь двум оставшимся интервалам, $[0, 1/3]$ и $[2/3, 1]$, мы приписываем разные весовые коэффициенты: p_1 и $p_2 = 1 - p_1 \neq p_1$. Если вначале (при $n = 0$) мы примем для всего интервала $[0, 1]$ $\mu_0 = 1$, то на первом шаге процедуры построения канторова множества двум отрезкам соответствуют меры $\mu_1 = p_1\mu_0$ и $\mu_2 = (1 - p_1)\mu_0$. На последующих шагах при делении на части каждого из отрезков будем использовать те же самые весовые коэффициенты p_1 и p_2 (рис. 2).

Покрыв полученное фрактальное множество окружностями радиусом $\varepsilon = 3^{-n}$, рассмотрим крайние левый и правый элементы покрытия. Для первого из них, содержащего точку $x_0 = 0$, мера $\mu_1 = p_1^n\mu_0 = p_1^n$. Поэтому согласно (7) $\alpha(0) = \ln p_1 / \ln(1/3)$. Аналогично, для крайнего правого элемента покрытия, содержащего точку $x_0 = 1$, можно записать $\alpha(1) = \ln p_2 / \ln(1/3)$. Поскольку изначально $p_1 \neq p_2$, то и $\alpha(0) \neq \alpha(1)$. Соответственно спектр сингулярностей $f(\alpha)$ уже не будет состоять из одной точки. Типичный вид функции $f(\alpha)$ для случая неоднородной меры представлен на рис. 3. Наличие неравномерного распределения меры на множестве является свойством мультифрактальных объектов: чем более неоднородной является мера, тем шире спектр сингулярностей. Отметим, что максимум $f(\alpha)$ совпадает со спектром сингулярностей в случае равномерного распределения меры на канторовом множестве, характеризуя тем самым наиболее часто встречающуюся сингулярность.

На практике вычислить функцию $f(\alpha)$ на основе формулы (8) весьма проблематично из-за очень медленной сходимости при $\varepsilon \rightarrow 0$. Кроме того, значения оцениваемых характеристик могут заметно различаться для разных выбранных точек. Поэтому в теории мультифракталов предпочитают использовать специальный подход, основанный на расчете обобщенных фракталь-

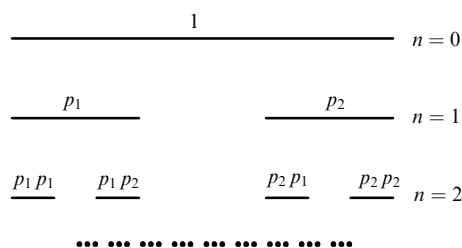


Рис. 2. Канторово множество с неравномерным распределением меры.

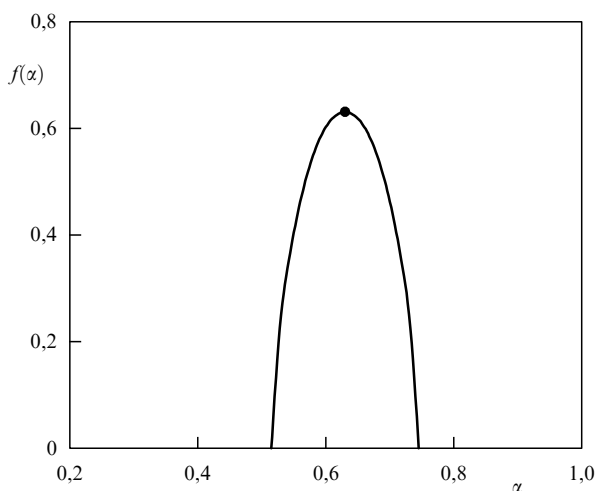


Рис. 3. Спектры сингулярностей для монофрактального объекта (канторово множество с равномерным распределением меры) — точка и мультифрактального объекта (канторово множество с неравномерным распределением меры) — сплошная кривая.

ных размерностей как глобальных характеристик, по которым можно вычислить спектр сингулярностей $f(\alpha)$.

В рамках данного подхода вводятся в рассмотрение так называемые *частичные функции* (или *обобщенные статистические суммы*) [58, 59]

$$Z(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \mu_i^q(\varepsilon), \quad (9)$$

где $N(\varepsilon)$ — число элементов покрытия размером ε , μ_i — мера i -го элемента покрытия, $q \in \mathbb{R}$. Зависимость функций Z от ε , как правило, носит степенной характер вида

$$Z(q, \varepsilon) \sim \varepsilon^{(q-1)D_q}, \quad (10)$$

где величины D_q представляют собой характеристики, называемые *обобщенными фрактальными размерностями* [60–63]. Коэффициент $q-1$ включен в показатель степени для автоматического выполнения равенства $Z(1, \varepsilon) = 1$, означающего условие нормировки для меры μ . Обычно используется следующее обозначение:

$$\tau(q) = (q-1)D_q, \quad (11)$$

величины $\tau(q)$ называются скейлинговыми экспонентами. Как видно из формул (9) и (10), при $q=0$ мы приходим к ранее введенному определению фрактальной размерности, или емкости (1).

Для простых фракталов, называемых также *монофракталами*, $D_q = \text{const}$. В общем случае мультифрактальных объектов значения D_q монотонно уменьшаются с возрастанием q (рис. 4а). Это уменьшение можно рассматривать в качестве диагностического критерия, подтверждающего, что анализируемый объект является неоднородным фракталом. Как следствие, зависимость $\tau(q)$ представляет собой прямую линию для однородных фрактальных мер и нелинейную функцию для неоднородных (рис. 4б).

Метод расчета спектра сингулярностей на основе скейлинговых экспонент $\tau(q)$ или обобщенных фрактальных размерностей является более устойчивым и надежным, чем вычисление непосредственно по определению (8). В рамках этого метода функции $f(\alpha)$ находятся

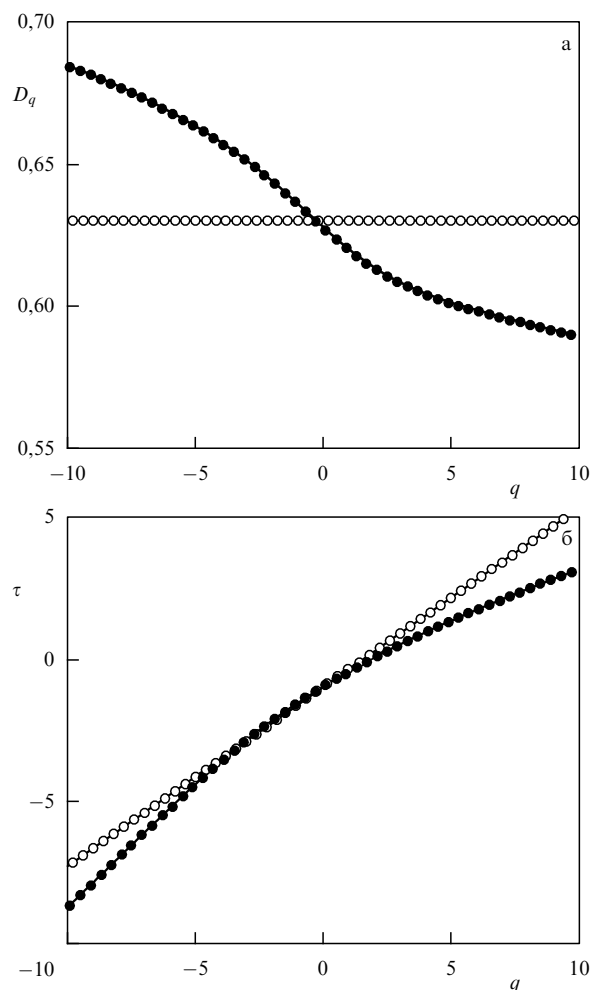


Рис. 4. Спектры обобщенных фрактальных размерностей (а) и скейлинговых экспонент (б) для монофрактала (светлые кружки) и мультифрактала (темные кружки).

с помощью преобразования Лежандра

$$\begin{cases} \alpha = \frac{d\tau}{dq}, \\ f(\alpha) = q\alpha - \tau(q). \end{cases} \quad (12)$$

Таким образом, по известному спектру скейлинговых экспонент $\tau(q)$ можно сразу же определить искомую функцию $f(\alpha)$. Мультифрактальный анализ часто называют *мультифрактальным формализмом*, подразумевая под этим термином подход, в рамках которого спектр сингулярностей $f(\alpha)$ рассматривается как преобразование Лежандра спектра $\tau(q)$. Как отмечено в [64], существует глубокая аналогия между мультифрактальным формализмом и статистической термодинамикой. Переменные q и $\tau(q)$ играют ту же роль, что и величина, обратная температуре, и свободная энергия в термодинамике, а энергии и энтропии соответствуют α и $f(\alpha)$ [17, 18, 65]. Ряд строгих математических результатов, относящихся к мультифрактальному формализму, был получен в рамках теории динамических систем. В последние годы данный подход приобретает все большую популярность в различных экспериментальных исследованиях. Следует, однако, отметить, что применение термина "мультифрактальный анализ" (хотя он активно используется) может быть не всегда вполне корректным, поскольку получить колоколообразную структуру зави-

симости $f(\alpha)$, изображенную на рис. 3, можно и для объектов, не являющихся мультифракталами. Поэтому в общем случае должны существовать дополнительно какие-то физические причины для того, чтобы можно было с полным основанием использовать терминологию мультифракталов. На ограничениях мультифрактального анализа мы еще остановимся в разделе 5.

2.3. Фрактальные функции

Если бы теория мультифракталов ограничивалась только сингулярными мерами, то ее практическая ценность была бы не столь велика. Однако фрактальные объекты встречаются в природе также в виде сингулярных функций, что позволяет рассматривать аппарат мультифрактального анализа в качестве инструмента исследования сигналов сложной структуры, — необходимо только адаптировать этот инструмент для случая нерегулярных процессов.

Возможно, наиболее интенсивные исследования случайных фрактальных функций были связаны с изучением процессов диффузии или броуновского движения. В одномерном случае смещение броуновской частицы $x(t)$ вдоль прямой представляет собой случайный процесс с нулевым средним и дисперсией

$$\langle x^2(t) \rangle \sim t, \quad (13)$$

где угловые скобки обозначают процедуру усреднения по ансамблю реализаций. Линейная зависимость дисперсии от времени (13) характеризует случай нормальной диффузии. Функция $x(t)$ может интерпретироваться как фрактальная [3] в том смысле, что ее график на плоскости время — координата представляет собой фрактальное множество точек с размерностью $D_0 = 1,5$ (рис. 5).

Более общим случаем броуновского движения является фрактальное броуновское движение, при котором смещение частицы $x(t)$ в одномерном пространстве представляет собой случайный процесс с дисперсией

$$\langle x^2(t) \rangle \sim t^{2H}, \quad (14)$$

где $0 < H < 1$. При $H \neq 0,5$ такая дисперсия соответствует аномальной диффузии с коррелированными при-

ращениями. Корреляции приращений оказывают влияние на график зависимости $x(t)$, делая его или более изрезанным ($H < 0,5$), или более гладким ($H > 0,5$). Соответственно изменяется и величина размерности, которая связана с показателем степени H следующим образом [3]:

$$D_0 = 2 - H. \quad (15)$$

Несмотря на то что при изучении фрактальных функций может проводиться расчет размерности графика, этот классический подход дает мало информации по сравнению с мультифрактальным анализом, позволяющим получать непрерывный спектр фрактальных размерностей и статистические данные о наличии различных сингулярностей. Вычисление одной-единственной величины D_0 позволяет охарактеризовать функцию при условии, что она демонстрирует только один тип сингулярного поведения, которое является неизменным во времени (случай однородной фрактальной функции). Такая ситуация, разумеется, представляет собой идеализацию реальных процессов, наблюдаемых в природе.

Броуновское движение относится к числу случайных фракталов: увеличенный фрагмент функции $x(t)$ не идентичен всему графику. В теории фракталов часто используется понятие самоафинности для характеристики множеств, инвариантных при аффинных преобразованиях. В частности, на плоскости это означает, что перемасштабирование отдельного фрагмента графика функции с различными коэффициентами увеличения по абсциссе и ординате будет приводить к графику, похожему на первоначальный. Самоподобие, о котором упоминалось применительно к фрактальным объектам, строго говоря, является частным случаем самоафинности и означает наличие сходства между объектом и его отдельным фрагментом при перемасштабировании с одинаковыми коэффициентами увеличения по обеим осям. Для самоафинной функции можно записать следующее выражение:

$$g(x_0 + lx) - g(x_0) \simeq l^H (g(x_0 + x) - g(x_0)). \quad (16)$$

При рассмотрении случайных процессов, таких как броуновское движение, строгое равенство в (16) может выполняться только при некоторых значениях l и x_0 . Показатель степени H в (16), называемый *экспонентой Хёрста* [1, 4], характеризует, насколько нерегулярна функция g в точке x_0 . При $H < 1$ эта функция является недифференцируемой и, по аналогии с ранее введенной экспонентой сингулярности α , чем меньше H , тем более сингулярна $g(x)$. Изучение локального нерегулярного поведения самоафинных функций в рамках мультифрактального анализа является более информативным подходом по сравнению с исследованием сложной геометрии их графика на плоскости время — координата. Поскольку сингулярности функции в разных точках могут различаться, в общем случае они не могут быть описаны с помощью только одного параметра H . В связи с этим путем некоторого изменения определения H вводится в рассмотрение понятие локальных экспонент Хёрста, или *экспонент Гельдера* $h(x_0)$, а именно:

$$|g(x_0 + l) - g(x_0)| \sim l^{h(x_0)}, \quad (17)$$

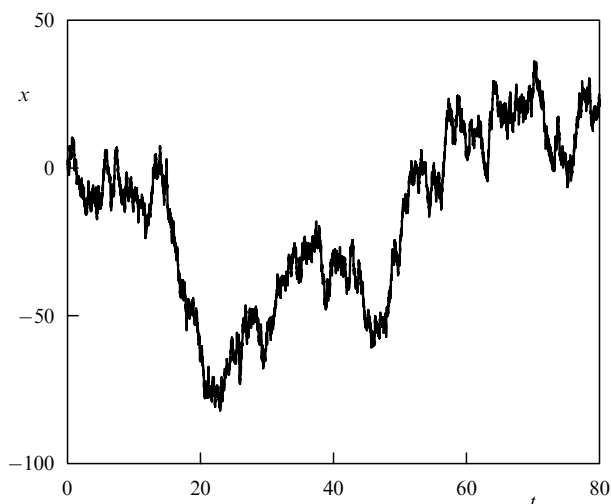


Рис. 5. Броуновское движение (случай нормальной диффузии).

которые характеризуют локальное сингулярное поведение функции g в точке x_0 . Как отмечается в [58], мультифрактальный подход к описанию сигналов дает возможность охарактеризовать широкий класс процессов, являющихся более сложными по сравнению с процессами, для описания которых достаточно одного числа (единственного значения фрактальной размерности либо одной скейлинговой характеристики, соответствующей, например, частотной зависимости спектральной плотности мощности).

Анализ нерегулярных функций, так же как и анализ фрактальных мер, проводится в терминах спектра сингулярностей. Однако при рассмотрении функциональных зависимостей (нерегулярных сигналов) осуществляется замена используемых обозначений. Вместо спектра $f(\alpha)$ рассматривается аналогичная функция $D(h)$: экспонента Гёльдера по смыслу соответствует α , а $D(h_0)$ представляет собой размерность подмножества анализируемых данных, которое характеризуется локальной экспонентой h_0 .

Существует несколько способов вычисления спектра сингулярностей. Как и в случае фрактальных мер, проведение вычислений непосредственно по определению осложняется медленной сходимостью и тем обстоятельством, что даже в малую окрестность произвольной точки с нерегулярным поведением x_0 могут попадать другие сингулярности. Эффект наложения нескольких сингулярностей приводит к значительным погрешностям расчета скейлинговых характеристик и неустойчивости результатов к параметрам численного алгоритма. Для повышения надежности расчетов $D(h)$ проводится статистический анализ на основе структурных [27] или частичных [30, 31] функций. Последний метод является предпочтительным, так как он позволяет исследовать более широкий класс сингулярностей. В разделе 3 изложены основы теории мультифрактального анализа, в котором вычисление частичных функций базируется на вейвлет-преобразовании.

3. Мультифрактальный анализ на основе вейвлет-преобразования

3.1. Вейвлет-анализ сингулярных функций

В начале 1990-х годов Мьюзи, Бакри и Арнеодо разработали новый подход к исследованию мультифрактальных свойств сигналов сложной структуры — метод *максимумов модулей вейвлет-преобразования* [30, 31, 58]. Этот метод, как следует из его названия, базируется на вейвлет-преобразовании, состоящем в разложении сигнала по базису, сконструированному из обладающей определенными свойствами солитоноподобной функции (вейвлета) посредством масштабных изменений и переносов. Каждая из функций этого базиса характеризует как определенную пространственную или временную частоту, так и ее локализацию в физическом пространстве или во времени [32–39].

Непрерывное вейвлет-преобразование функции $g(x)$ определяется следующей формулой:

$$W(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) dx, \quad (18)$$

где a — параметр масштаба, b — пространственная координата или момент времени, ψ — солитоноподоб-

ная функция (вейвлет), сконструированная, например, на основе производных функции Гаусса:

$$\psi^{(m)} = (-1)^m \frac{\partial^m}{\partial x^m} \left[\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \right]. \quad (19)$$

Подробное описание теории вейвлетов можно найти, например, в обзоре [38]. При изучении локальных сингулярностей функции $g(x)$ обычно рассматривают $m = 1$ (wave-вейвлет) или $m = 2$ (mhat-вейвлет). Более высокие производные применяются редко. Выбор базисной функции ψ является очень важным моментом при проведении исследований — нужно выбрать такой вейвлет, который позволяет разглядеть необходимую нам информацию. Сделать это можно с помощью разных функций, и, продолжая аналогию вейвлет-анализа с математическим микроскопом, выбор базисных функций можно интерпретировать как задание разрешения для объектива микроскопа, — если выбранное разрешение позволяет увидеть нужные детали, то вейвлет подходит для решаемых задач. Более того, последующий выбор объектива с лучшим разрешением уже не дает ничего нового.

Как отмечалось в разделе 2.3, степень сингулярности функции g может быть описана с помощью экспоненты Гёльдера, более строгое математическое определение которой можно ввести следующим образом. Рассмотрим случай, когда функция g в точке x_0 является n раз дифференцируемой, а $(n+1)$ -я производная не существует. Тогда $g(x)$ можно разложить в ряд Тейлора до степени n включительно. Обозначим полученный ряд — полином степени n — как $P_n(x)$. Экспонентой Гёльдера в точке x_0 называется наибольшее значение h , при котором выполняется неравенство

$$|g(x) - P_n(x - x_0)| \leq C |x - x_0|^h. \quad (20)$$

Чем больше h , тем более регулярной (более "гладкой") является функция g . Интегрирование этой функции увеличивает значение h на 1, а дифференцирование — уменьшает. Предположим, что анализируемую сингулярную функцию в окрестности точки $x = x_0$ можно представить как

$$g(x) = P_n(x) + C |x - x_0|^{h(x_0)}, \quad (21)$$

т.е. в виде суммы регулярной компоненты (полинома P_n) и слагаемого, которое определяет нерегулярное поведение и характеризуется нецелым значением $h(x_0)$ [58]. Одной из особенностей вейвлет-преобразования, широко используемой для устранения полиномиальных составляющих сигнала, является то, что вейвлеты, имеющие первые m нулевых моментов,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^m \psi(x) dx = 0, \quad (22)$$

ортогональны полиномам до степени m включительно и при $m \geq n$

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_n(x) \psi(x) dx = 0. \quad (23)$$

Поэтому вейвлет-преобразование функции $g(x)$ примет вид

$$W(a, x_0) = Ca^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) |ax|^{h(x_0)} dx. \quad (24)$$

В целях упрощения анализа в [58] предлагается немного изменить определение вейвлет-преобразования, умножив правую часть (18) на величину $1/\sqrt{a}$:

$$W(a, x_0) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \psi\left(\frac{x - x_0}{a}\right) g(x) dx. \quad (25)$$

В этом случае при $a \rightarrow 0$ наблюдается простая степенная зависимость:

$$W(a, x_0) \sim a^{h(x_0)}. \quad (26)$$

Таким образом, если функция $g(x)$ имеет особенность в точке $x = x_0$, то ее локальное сингулярное поведение характеризуется степенным законом вида (26). Однако если эта функция является m раз непрерывно дифференцируемой в точке x_0 , то при $a \rightarrow 0$

$$W(a, x_0) \leq a^m. \quad (27)$$

В задачах исследования структуры сигналов обычно анализируют особенности самой функции $g(x)$, а ее производные рассматривают редко. Сигнал локально характеризуется зависимостью значения гёльдеровской экспоненты от точки сигнала, при этом значение гёльдеровской экспоненты легко вычисляется по скорости уменьшения вейвлет-коэффициентов с масштабом a . Чем быстрее коэффициенты уменьшаются при $a \rightarrow 0$, тем более регулярна функция в этой точке. Таким образом, значения $W(a, x)$ в окрестности точки с локальной особенностью могут расходиться или аномально медленно уменьшаться. Такое поведение вейвлет-коэффициентов позволяет проводить детальный анализ структуры сингулярностей.

3.2. Метод максимумов модулей вейвлет-преобразования

Алгоритм ММВП предполагает проведение исследования нерегулярного поведения функции $g(x)$ в два этапа. На первом этапе осуществляется вейвлет-преобразование по формуле (25). Результат вейвлет-преобразования можно интерпретировать как поверхность в трехмерном пространстве (рис. 6а). Наиболее важная информация о ней содержится в *скелетоне*, или линиях локальных экстремумов поверхности коэффициентов $W(a, x)$, поиск которых проводится на каждом масштабе a (рис. 6б).

Выбор базисной функции определяется тем, какую информацию необходимо извлечь из $g(x)$. Необходимым условием является то, чтобы выбранный вейвлет был не менее гладким, чем анализируемый сигнал. Относительно выбора параметра m в (19) следует отметить, что, с одной стороны, увеличение m позволяет проигнорировать крупномасштабные полиномиальные составляющие (устранить тренд) и анализировать мелкомасштабные вариации данной функции, с другой стороны, многократное дифференцирование приводит к увеличению числа линий локальных экстремумов вейвлет-коэффициентов и появлению большого числа дополнительных линий, обрывающихся на малых масштабах. Такие линии являются слишком короткими для того, чтобы проводить по ним оценки степенных зависимостей вида (26), и представляют собой помехи при проведении численного анализа сингулярностей. Как отмечается в

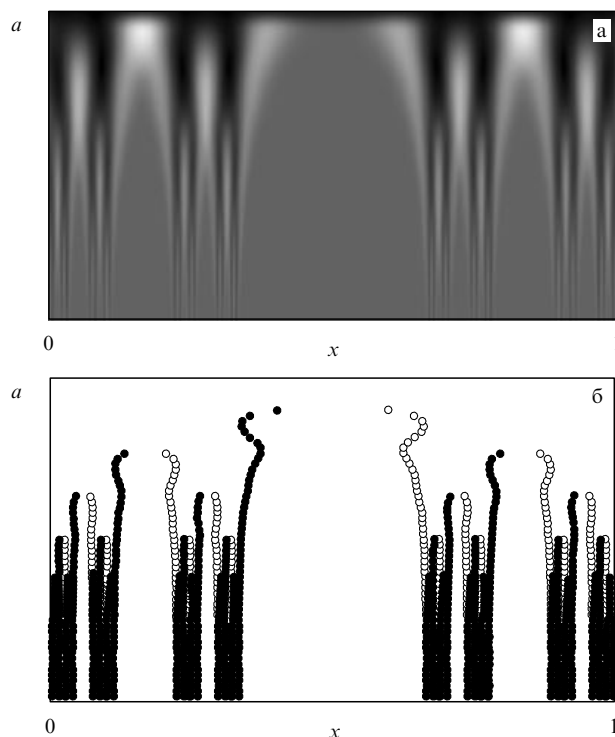


Рис. 6. (а) Результат вейвлет-преобразования в проекции на плоскость ax ; большие значения вейвлет-коэффициентов $W(a, x)$ соответствуют более темным участкам. (б) Линии локальных экстремумов поверхности коэффициентов $W(a, x)$: минимумов (светлые кружки) и максимумов (темные кружки).

[38], вейвлет-преобразование устроено таким образом, что $W(a, x_0)$ является регулярной функцией даже при нерегулярной $g(x)$. Вся информация о возможной особенности $g(x)$, включая ее локализацию x_0 и показатель $h(x_0)$, отражается в асимптотическом поведении коэффициентов $W(a, x_0)$ при малых a . Если коэффициенты на малых масштабах расходятся, то g имеет особенность в x_0 и экспонента Гёльдера может быть определена путем представления зависимости (26) в двойном логарифмическом масштабе и вычисления наклона зависимости $\ln W(a, x_0) / (\ln a)$. Если коэффициенты $W(a, x_0)$ близки к нулю в окрестности x_0 на малых масштабах, то g является регулярной в этой точке. Важное обстоятельство при расчете гёльдеровских экспонент состоит в теоретической независимости искомых характеристик от выбора базисных функций вейвлет-преобразования, что позволяет говорить в некотором смысле об универсальности анализа локальных нерегулярностей [38] (хотя разложение по вейвлетам, разумеется, зависит от выбранного базиса).

Выделением скелетона заканчивается первый шаг алгоритма ММВП. Анализ выделенных линий локальных экстремумов или локальных максимумов модулей вейвлет-преобразования теоретически позволяет вычислять гёльдеровские экспоненты, т.е. анализировать сингулярности функции $g(x)$. Однако такой подход является неточным — при увеличении масштаба сказывается влияние соседних нерегулярностей, что приводит к различным ошибкам. В теории мультифракталов предпочитают проводить расчеты на основе так называемых частичных функций $Z(q, a)$, позволяющих получать более надежные оценки вычисляемых характери-

стик. Поэтому второй шаг метода ММВП состоит в построении частичных функций по формуле

$$Z(q, a) = \sum_{l \in L(a)} |W(a, x_l(a))|^q, \quad (28)$$

где $L(a)$ — множество всех линий (l) локальных максимумов модулей вейвлет-коэффициентов, существующих на масштабе a ; $x_l(a)$ характеризует положение на этом масштабе максимума, относящегося к линии l . В данном случае принципиальным моментом, обеспечивающим устойчивость метода, является то, что рассматриваются модули вейвлет-коэффициентов. Без этого (с учетом информации о фазах) метод не позволил бы получить устойчивое решение. Заметим, что в общем случае рассмотрение максимумов может создавать проблемы, связанные с устойчивостью метода (лучше, когда оперируют средними величинами). Тем не менее сама процедура вейвлет-преобразования подразумевает вычисление коэффициентов в пределах частотно-временного окна, что автоматически обеспечивает усреднение. Определение (28) не подходит для отрицательных значений q , поскольку возможна ситуация, в которой $W(a, x_l(a)) = 0$. В связи с этим на практике используется другая формула:

$$Z(q, a) = \sum_{l \in L(a)} \left(\sup_{a' \leq a} |W(a', x_l(a'))| \right)^q, \quad (29)$$

т.е. выбирается максимальное значение модуля коэффициентов вейвлет-преобразования вдоль каждой линии на масштабах, меньших заданного значения a . Согласно [30, 31] выполняется следующая зависимость:

$$Z(q, a) \sim a^{\tau(q)}, \quad (30)$$

где величину $\tau(q)$, определяемую для некоторого значения q путем вычисления наклона зависимости $\ln Z(q, a) / \ln a$, называют *скейлинговой экспонентой*. Вариация степеней q при построении частичных функций (29) позволяет получить линейную зависимость $\tau(q)$ для монофрактальных объектов ($H = d\tau/dq = \text{const}$) и нелинейную зависимость $\tau(q) = qh - D(h)$ с большим числом гёльдеровских экспонент $h(q) = d\tau/dq \neq \text{const}$ в случае мультифракталов.

При некоторых значениях q скейлинговые экспоненты $\tau(q)$ имеют простую интерпретацию [58]. Так, существует взаимосвязь между $\tau(2)$ и показателем степени β функции спектральной плотности мощности $S(f) \sim 1/f^\beta$:

$$\beta = 2 + \tau(2). \quad (31)$$

В свою очередь, учитывая то обстоятельство, что спектральная плотность мощности связана с корреляционной функцией преобразованием Фурье, по известным β можно определить скорость спада корреляций $\Psi(\tau) \sim \tau^{-\gamma}$, т.е. показатель γ . Взаимосвязь между основными величинами, рассматриваемыми в рамках алгоритма ММВП, определяется преобразованием Лежандра

$$\begin{cases} h = \frac{d\tau}{dq}, \\ D(h) = qh - \tau(q). \end{cases} \quad (32)$$

В отличие от метода структурных функций, основанный на вейвлет-преобразовании мультифрактальный анализ позволяет исследовать сингулярности при отрицательных значениях q . Частичные функции $Z(q, a)$ при $q < 0$ характеризуют особенности скейлинга для слабых сингулярностей (малых флуктуаций), а при $q > 0$ — для сильных сингулярностей (больших флуктуаций).

Проиллюстрируем алгоритм ММВП на том же примере, что и в разделе 2, т.е. канторовом множестве. Для проведения численного анализа канторову множеству может быть поставлена в соответствие бинарная последовательность, состоящая из нулей и единиц (нули обозначают отбрасываемые при построении ряда части отрезка). Таким образом, данная последовательность вначале ($n = 0$) состоит из одного элемента (1), на первом этапе — из трех (101), на втором — из девяти (101000101) и т.д. Рассмотрим в качестве фрактальной функции $g(x)$ функцию распределения однородной меры μ на канторовом множестве. Нормируя меру ($\mu([0, 1]) = 1$), определим $g(x)$ следующим образом:

$$g(x) = \mu([0, x]) = \int_0^x d\mu. \quad (33)$$

Полученная функция изображена на рис. 7. Выбирая в качестве базисного вейвлета $\psi^{(m)}$ mhat-вейвлет и следуя алгоритму, изложенному в разделе 3.1, на первом этапе проведем вейвлет-преобразование функции $g(x)$ и выделение линий локальных максимумов модулей вейвлет-коэффициентов. Как видно из рис. 6, при увеличении масштаба a число локальных максимумов уменьшается. В соответствии с (26) локальное сингулярное поведение $g(x)$ может анализироваться путем построения зависимости $\ln W(a, x_0)$ от $\ln a$ и вычисления наклона аппроксимирующей прямой. Результаты расчетов для различных линий локальных максимумов представлены на рис. 8а. Наряду с ожидаемой величиной $h = \ln 2 / \ln 3$, для коротких линий получены значения гёльдеровских экспонент, варьирующиеся в широких пределах. Картина меняется, если исключить из рассмотрения линии, "обрывающиеся" на малых масштабах, и рассматривать степенные зависимости вейвлет-коэффициентов, например, при $\ln a > 1,5$ (рис. 8б). Для того чтобы избежать проблем, связанных с недостаточно хорошим разре-

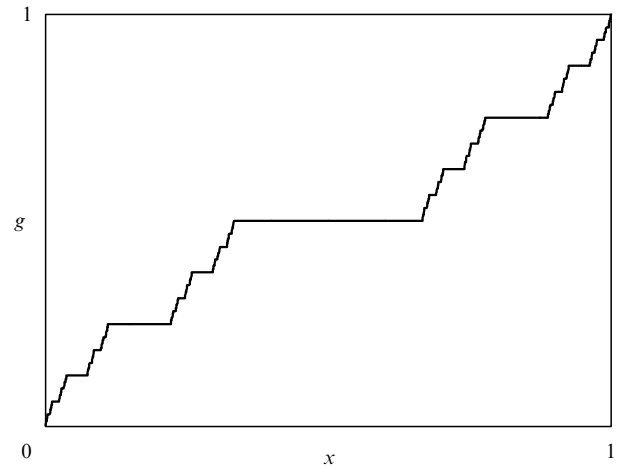


Рис. 7. Функция распределения однородной меры на канторовом множестве.

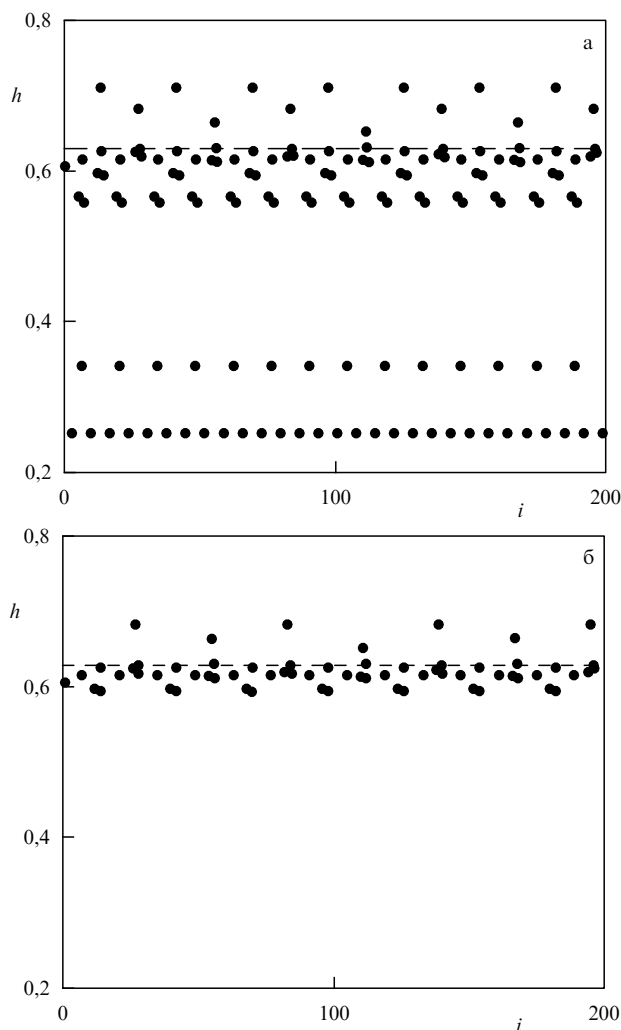


Рис. 8. Значения экспонент Гельдера, вычисленные по наклону степенной зависимости вида (26), для всех линий локальных экстремумов (а) и без учета линий, обрывающихся на малых масштабах ($\ln a < 1,5$) (б).

нием на малых масштабах, изучение скейлинговых особенностей проводится при не слишком малых масштабных коэффициентах a .

Непосредственные оценки гельдеровских экспонент h из степенных зависимостей для вейвлет-коэффициентов менее точны, чем определение спектра $\tau(q)$ частных функций и вычисление локальных наклонов $h = d\tau/dq$ (второй этап метода ММВП). При большом числе шагов n процедуры построения канторова множества численно найденные значения h и спектра сингулярностей $D(h)$ практически не отличаются от теоретических. Например, в расчетах для $n = 10$ отклонение от теоретического значения $\ln 2 / \ln 3$ не превышает 1 %.

Мы уже отмечали одну особенность метода анализа локальной регулярности сигнала на основе коэффициентов вейвлет-преобразования, которая состоит в том, что вычисляемые экспоненты Гельдера теоретически не зависят от выбора базисного вейвлета. На практике, однако, такая зависимость все-таки появляется. В большинстве известных нам работ в качестве базисных выбирались функции wave или mhat (первая и вторая производные функции Гаусса соответственно). Если в качестве анализирующего вейвлета используются производные более

высокого порядка, то число дополнительных коротких линий локальных максимумов $W(a, x_0)$ возрастает, что обуславливается осциллирующими "хвостами" солитоноподобных функций $\psi^{(m)}$. В данной ситуации приходится искать компромисс между игнорированием полиномиальных составляющих (тренда), для чего желательно увеличивать параметр m , и значительным возрастанием при этом числа коротких линий локальных максимумов, которые усложняют вид скелетона и приводят к отклонениям от степенных зависимостей на малых масштабах. При проведении мультифрактального анализа на практике целесообразно ограничиваться малым значением m (обычно $m \leq 2$).

Мы рассмотрели случай равномерного распределения меры μ на фрактальном множестве. В численном анализе можно реализовать более сложный пример — канторово множество со случайным распределением меры. При построении такого множества весовые коэффициенты p_1 и $p_2 = 1 - p_1$ на каждом шаге выбираются равными $0,5 \pm \xi$, где ξ — случайная величина. При малой дисперсии случайной величины структура созданного множества будет близка к монофрактальной. При увеличении дисперсии динамика становится мультифрактальной: точка на плоскости $D(h)$ преобразуется в колоколообразную зависимость, типичную для мультифракталов (рис. 9). Таким образом, при случайном распределении меры на канторовом множестве наиболее вероятная сингулярность соответствует значению $\ln 2 / \ln 3$, а степень мультифрактальности, или ширина спектра $D(h)$, зависит от дисперсии случайной величины ξ , т.е. от неравномерности распределения меры.

Мультифрактальный анализ может применяться к сигналам различной природы. Помимо нерегулярных реализаций непрерывнозначных случайных процессов, на основе техники ММВП могут анализироваться, например, символьные последовательности, такие как цепочки нуклеотидов молекул ДНК. С этой целью их преобразуют в бинарные последовательности $u(i) = 1$ или $u(i) = 0$ в зависимости от того, какой нуклеотид встречается под номером i , после чего аналогично тому, как это делается в задачах об одномерных случайных

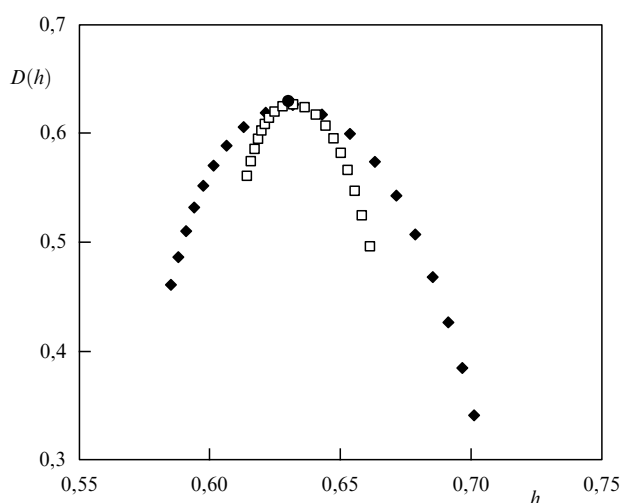


Рис. 9. Спектры сингулярностей для канторова множества со случайным распределением меры. Увеличение ширины спектра $D(h)$ соответствует увеличению неравномерности распределения меры.

блужданиях [52], рассматривается сумма

$$g(k) = \sum_{i=1}^k u(i). \quad (34)$$

Проводя мультифрактальный анализ зависимости $g(k)$ методом ММВП, можно говорить об отсутствии корреляций в последовательности символов, если $h = 0,5$, и о наличии корреляций при $h \neq 0,5$. Иногда говорят также о корреляциях ($h > 0,5$) и антикорреляциях ($h < 0,5$) [52]. Антикоррелированная динамика бинарной последовательности означает, что вероятность чередования нулей и единиц (пар "01" и "10") выше вероятности появления пар "00" или "11". В случае коррелированной динамики за нулями чаще следуют нули, за единицами — единицы, т.е. вероятность обнаружения пар "00" и "11" увеличивается. Для реализаций непрерывнозначных случайных процессов значения гёльдеровских экспонент также позволяют делать вывод о наличии либо антикоррелированной ($h < 0,5$), либо коррелированной динамики ($h > 0,5$). В первом случае наблюдается чередование больших и малых значений случайного процесса (вслед за большим значением с большей вероятностью следует малое и наоборот). Во втором случае за большим значением чаще следует большое, за малым — малое: процесс является более "гладким". Случай $h = 1$ соответствует $1/f$ -шуму, а $h = 1,5$ — винеровскому случайному процессу.

Заметим, что процедура анализа мультискейлинговых явлений для последовательностей вида (34) приводит к тем же результатам, что и рассмотрение в качестве функции g исходной бинарной последовательности $g(i) = u(i)$, если в последнем случае исключить множитель $1/a$ перед знаком интеграла в (25). Это объясняется тем, что интегрирование увеличивает значения h на 1. Если учесть последнее обстоятельство в формуле (26), то можно проводить расчеты без вычисления сумм (34), аналогичного по смыслу взятию интеграла с переменным верхним пределом. Такое свойство метода полезно при применении мультифрактального анализа на практике.

4. Примеры применения мультифрактального анализа: эффекты потери мультифрактальности

Рассмотрим несколько примеров применения техники максимумов модулей вейвлет-преобразования при решении конкретных задач, включая тестирование данного подхода как метода количественного описания известных эффектов в динамике нелинейных систем (хаотической и стохастической синхронизации), а также использование мультифрактального анализа в качестве эффективного инструмента диагностики состояния объектов живой природы по нестационарным сигналам. Выбор примеров был проведен с целью показать, с одной стороны, универсальность метода, а с другой стороны, наличие общих эффектов, позволяющих использовать степень мультифрактальности в качестве количественной характеристики состояния исследуемой системы. Отметим, что основанный на вейвлет-анализе мультифрактальный формализм по сравнению с традиционными методами исследования структуры сигналов (например корреляционным анализом) дает возможность изучать более тонкие характеристики. Метод

ММВП проявляет чувствительность к динамике на разных масштабах — от слабых сингулярностей (малые флуктуации) до сильных сингулярностей (большие флуктуации). Лежащее в его основе вейвлет-преобразование является инструментом, который очень хорошо приспособлен для изучения свойств самоподобия (в терминах вейвлет-коэффициентов это означает степенное поведение их высших моментов при изменении масштаба). Метод хорошо подходит для решения физических задач, поскольку он оперирует характеристиками, которые интуитивно понятны физикам. В частности, спектр сингулярностей содержит информацию, с одной стороны, о корреляционных свойствах анализируемого процесса (которые относятся к числу базовых характеристик в теории случайных процессов), а с другой стороны, о степени однородности сигнала, количественной мерой которой является ширина функции $D(h)$.

4.1. Хаотическая динамика взаимодействующих систем

В качестве первого примера рассмотрим тестирование мультифрактального анализа с точки зрения возможности диагностики известного явления синхронизации хаоса в динамике взаимодействующих автоколебательных систем. Синхронизация хаотических колебаний приводит к изменениям сложной геометрии аттракторов, по сравнению со случаем отсутствия взаимодействия, что находит отражение в структуре временных интервалов, таких как времена возврата в секущую Пуанкаре. Согласно работе [66] распределение времен возврата динамической системы может характеризоваться мультифрактальными свойствами, т.е. демонстрировать различный локальный скейлинг. Попытаемся выяснить, как взаимодействие автоколебательных систем влияет на мультифрактальные свойства хаотической динамики.

В качестве примера выберем модель двух взаимодействующих систем Ресслера:

$$\begin{aligned} \frac{dx_{1,2}}{dt} &= -\omega_{1,2} y_{1,2} - z_{1,2} + \gamma (x_{2,1} - x_{1,2}), \\ \frac{dy_{1,2}}{dt} &= \omega_{1,2} x_{1,2} + A y_{1,2}, \\ \frac{dz_{1,2}}{dt} &= B + z_{1,2}(x_{1,2} - \mu), \end{aligned} \quad (35)$$

где параметры A , B и μ определяют режим динамики каждой системы, γ — параметр связи, $\omega_1 = \omega_0 + \delta$, $\omega_2 = \omega_0 - \delta$ — базовые частоты, δ — расстройка между ними. Расчеты проводились при следующих значениях параметров: $A = 0,15$, $B = 0,2$, $\gamma = 0,02$, $\mu = 6,8$, $\omega_0 = 1,0$ [67].

Система (35) демонстрирует многообразие сосуществующих синхронных режимов хаотических колебаний, а также различные типы несинхронной динамики, которые различаются по мультифрактальным характеристикам [26, 68]. Ограничимся рассмотрением перехода через границу области фазовой синхронизации при увеличении параметра расстройки δ . Проекция фазовых портретов на плоскость (x_1, x_2) для режимов синхронного и несинхронного хаоса визуально различаются (рис. 10). Выберем секущую плоскость (например $x_2 = 0$) и проанализируем форму спектров сингулярностей $D(h)$, вычисленных по последовательностям времен возврата в эту плоскость для режимов колебаний, изображенных на рис. 10.

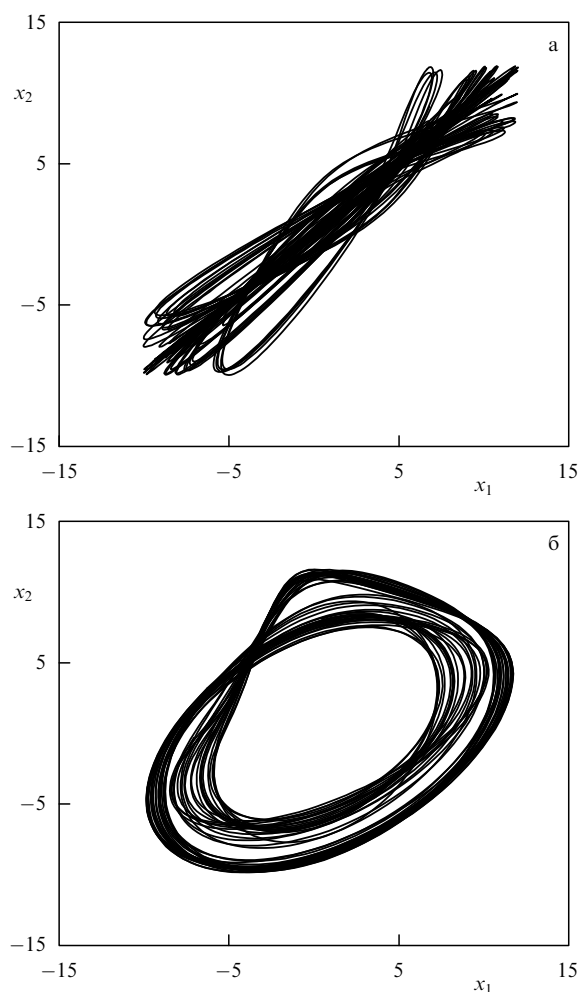


Рис. 10. Синхронный (а) и несинхронный (б) хаосы в модели связанных систем Ресслера.

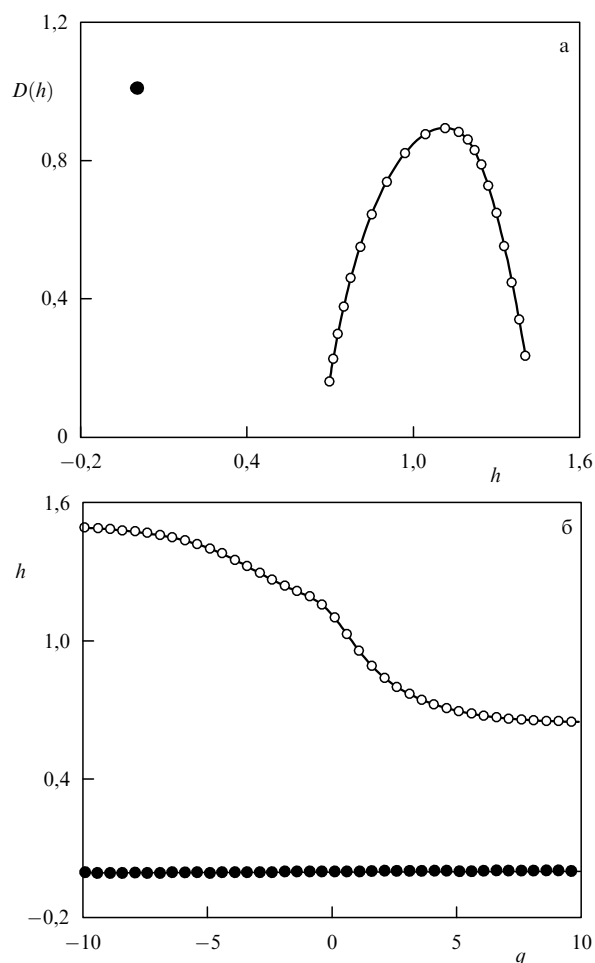


Рис. 11. Спектры сингулярностей (а) и значения $h(q)$ (б) для синхронного (темные кружки) и несинхронного (светлые кружки) хаотического режима.

Как видно из рис. 11а, функция $D(h)$, характеризующая несинхронный режим, значительно шире, чем в синхронном режиме (где спектр сингулярностей "стягивается" в точку). Это означает, что фазовая синхронизация хаотических колебаний в модели (35) сопровождается потерей мультифрактальности в динамике времен возврата. Режим несинхронного хаоса демонстрирует сложную мультифрактальную структуру и описывается широким спектром гёльдеровских экспонентов (рис. 11б). Однако последовательность времен возврата в секущую плоскость для синхронного режима может быть рассмотрена как отображение процесса, характеризующегося постоянным в пределах ошибки вычисления значением $h(q)$.

Ширина спектров сингулярностей для различных синхронных режимов может варьироваться. Наиболее типичная ситуация состоит в том, что последовательность времен возврата не может быть описана постоянным значением $h(q)$. Кроме того, результаты вычисления гёльдеровских экспонентов при больших значениях q демонстрируют заметную чувствительность к выбору параметров счета, например диапазона, в котором проводится аппроксимация $\tau(q)$. В связи с этим целесообразно ввести в рассмотрение характеристику степени мультифрактальности Δ_h (ширину спектра сингулярностей). Анализ различных режимов хаотических колебаний в системе (35) показал, что степень мультифрактальности значительно меньше для любого типа синхронной

динамики по сравнению со степенью мультифрактальности в режимах вне области синхронизации [68]. Другое различие между спектрами сингулярностей, изображенными на рис. 11а, состоит в увеличении $h(q)$ для несинхронных колебаний, что свидетельствует о смене типа корреляций. Характеристики, вычисляемые в рамках метода ММВП, четко диагностируют границу перехода от несинхронного режима к синхронному (рис. 12). Отметим, что диагностика перехода через границу области синхронизации в данном случае может быть осуществлена также с помощью других методов, однако мультифрактальный анализ позволяет по-другому взглянуть на само это явление, а именно: синхронизация хаоса может рассматриваться как эффект перехода от сложной мультифрактальной динамики, характеризующейся широким спектром гёльдеровских экспонентов, к значительно более простой монофрактальной динамике, для количественного описания которой достаточно одного показателя скейлинга. Происходящая потеря мультифрактальности означает "выравнивание" различных нерегулярностей и переход от процесса, содержащего несколько типов сингулярного поведения, к однородной (более простой) динамике, демонстрирующей лишь один тип сингулярностей. Эффекты уменьшения (потери) мультифрактальности при синхронизации хаоса наблюдаются также в динамике более сложных моделей, рассмотренных, например, в работе [26].

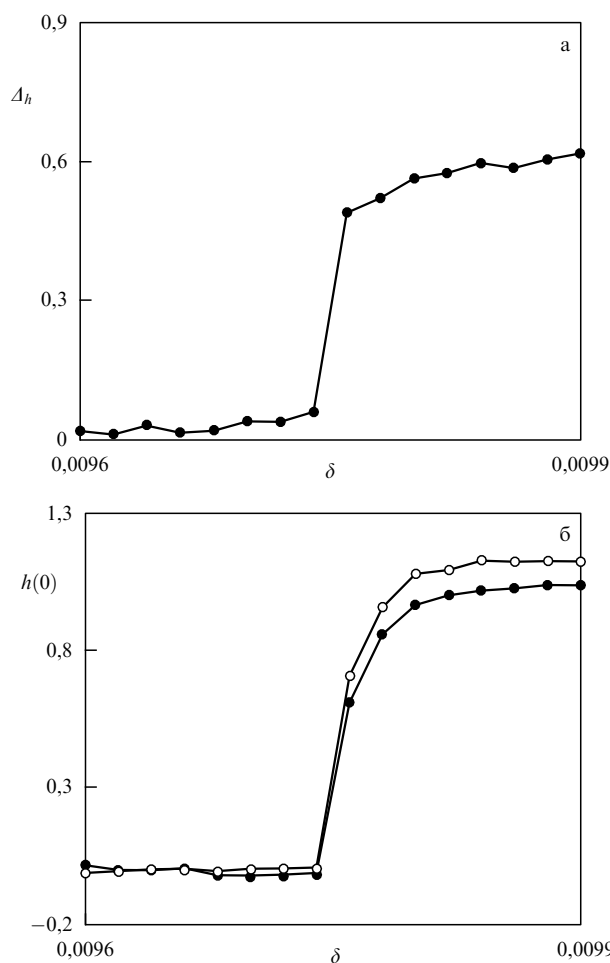


Рис. 12. Переход через границу области синхронизации, диагностируемый по изменению характеристик метода мультифрактального формализма. На рисунке б приведены результаты анализа структуры последовательностей времен возврата отдельно для каждой из двух взаимодействующих систем (секущие плоскости $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$).

4.2. Стохастическая синхронизация

Для иллюстрации общих закономерностей мультифрактального описания эффектов синхронизации хаоса и индуцированной шумом упорядоченности в нелинейных системах рассмотрим хорошо известный эффект стохастического резонанса [69–71].

Недавно в работе [72] была предпринята попытка мультифрактального описания этого эффекта на примере модели передемпфированного бистабильного осциллятора, которая описывается стохастическим дифференциальным уравнением следующего вида:

$$\frac{dx}{dt} = x - x^3 + I\xi(t) + A \sin(\Omega t + \phi). \quad (36)$$

Здесь $\xi(t)$ — нормально распределенный δ -коррелированный процесс (белый шум), I — интенсивность шума, A — амплитуда внешнего периодического воздействия, которая является малой величиной, т.е. в отсутствие шума в системе не происходит переключений между двумя состояниями. При исследовании эффекта стохастического резонанса часто выделяют две ситуации: когда амплитуда A периодического сигнала очень мала по сравнению с потенциальным барьером и когда A сопоставима с барьером. В последнем случае динамика бистабильной системы демонстрирует высокую степень когерентности процесса переключения и входного сигнала, которую можно описать в терминах стохастической синхронизации [73, 74]. Согласно выводам статьи [72], которые были подтверждены нашими расчетами, при достаточно большой амплитуде периодического сигнала эффект стохастического резонанса сопровождается потерей мультифрактальности в динамике модели (36). Изменение параметра I существенно изменяет структуру спектра сингулярностей: при "оптимальном" уровне шума, соответствующем резонансу, последовательность времен возврата в одно из бистабильных состояний имеет четкую монофрактальную структуру (рис. 13), тогда как при удалении от этого значения спектр сингулярностей соответствует мультифрактальному объекту. Таким образом, режим стохастической синхронизации сопровождается потерей мультифрактальности в динамике передемпфированного бистабильного осциллятора с внешним воздействием. Здесь прослеживается сходство с синхронизацией хаоса в мультифрактальном описании, рассмотренном в разделе 4.1.

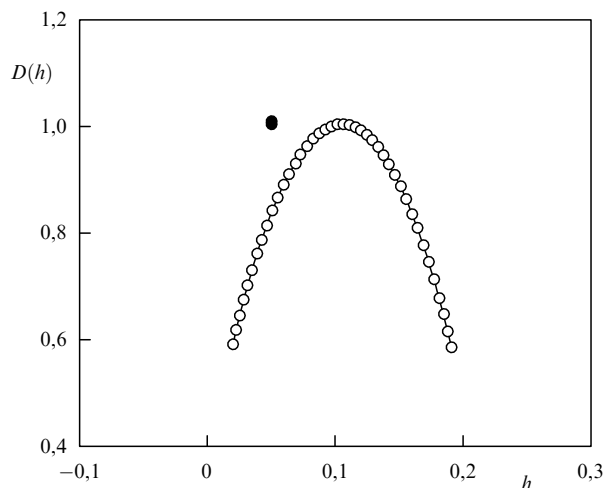


Рис. 13. Спектры сингулярностей, соответствующие режиму стохастической синхронизации переключений в бистабильной системе (темный кружок) и режиму динамики вне области синхронизации (светлые кружки).

бильной системы демонстрирует высокую степень когерентности процесса переключения и входного сигнала, которую можно описать в терминах стохастической синхронизации [73, 74]. Согласно выводам статьи [72], которые были подтверждены нашими расчетами, при достаточно большой амплитуде периодического сигнала эффект стохастического резонанса сопровождается потерей мультифрактальности в динамике модели (36). Изменение параметра I существенно изменяет структуру спектра сингулярностей: при "оптимальном" уровне шума, соответствующем резонансу, последовательность времен возврата в одно из бистабильных состояний имеет четкую монофрактальную структуру (рис. 13), тогда как при удалении от этого значения спектр сингулярностей соответствует мультифрактальному объекту. Таким образом, режим стохастической синхронизации сопровождается потерей мультифрактальности в динамике передемпфированного бистабильного осциллятора с внешним воздействием. Здесь прослеживается сходство с синхронизацией хаоса в мультифрактальном описании, рассмотренном в разделе 4.1.

4.3. Мультифрактальный анализ динамики артериального давления крови

Обратимся теперь к значительно более сложной ситуации — анализу динамики живых систем. Как известно, многие сигналы биологического происхождения являются сильно неоднородными и нестационарными, и для их анализа целесообразно применять наиболее универсальные методы, эффективность которых не зависит от свойства стационарности регистрируемых процессов. Мультифрактальный формализм на основе вейвлет-преобразования является одним из таких универсальных подходов, что, в частности, было проиллюстрировано в работе П. Иванова с соавторами, опубликованной в *Nature* [43]. С помощью метода ММВП в этой работе было показано, что физиологические сигналы относятся к классу мультифрактальных процессов. В частности, мультифрактальные свойства сердечного ритма здоровых организмов и при патологии различны. Поэтому скейлинговые характеристики метода ММВП представ-

ляют интерес как потенциальные средства диагностики состояния биологических систем [46, 47]. Это особенно актуально в тех случаях, когда стандартные методы анализа структуры сигналов не позволяют провести приемлемую диагностику (например при обработке сильно нестационарных процессов с малой длительностью).

Различные внешние воздействия на организм также отражаются в изменении характеристик мультифрактальной структуры сердечного ритма. В качестве иллюстрации в данном разделе приводятся результаты мультифрактального описания процесса адаптации сердечно-сосудистой системы к стрессу [75].

Эксперименты проводились на 23 белых крысах (11 самцов и 12 самок), каждой из которых был вживлен внутриартериальный катетер для прямого измерения давления крови. Артериальное давление крови записывалось в состоянии покоя и при стрессе (в результате обездвиживания животного). В ходе предварительной обработки был осуществлен переход от исходных данных (рис. 14а) к точечным процессам — последовательностям временных интервалов между локальными максимумами сигнала артериального давления (рис. 14б). Далее эти последовательности анализировались для выявления индуцированных стрессом изменений мультифрактальной структуры.

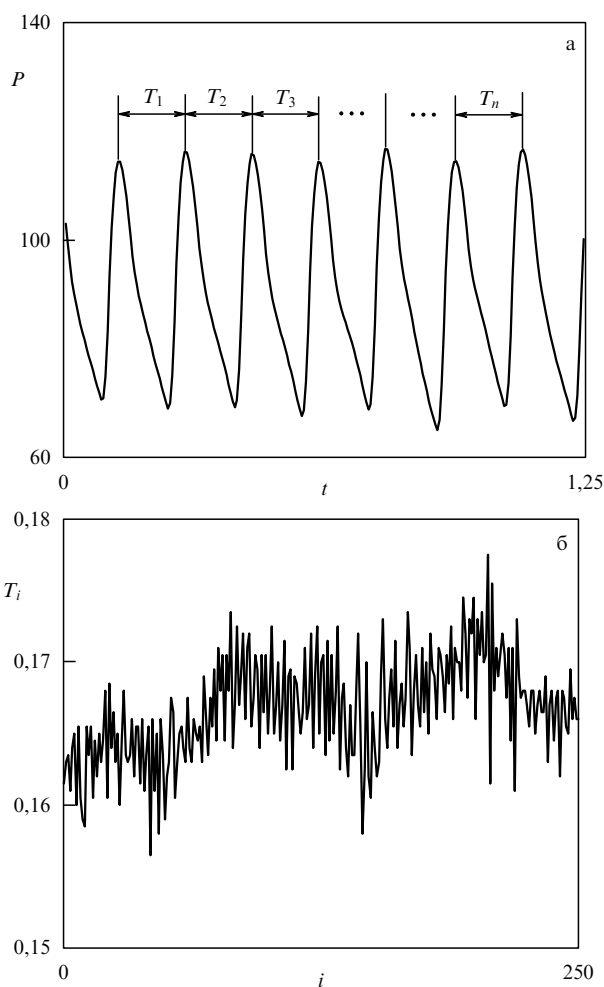


Рис. 14. Сигнал артериального давления крови белой крысы (а) и выделенная последовательность интервалов между локальными максимумами данного сигнала (б).

Было обнаружено два типа реакции: стресс приводил либо к заметному уменьшению гёльдеровских экспонент (изменению локальной регулярности сигналов и корреляционных свойств) (рис. 15а), либо к уменьшению ширины спектра сингулярностей Δh (рис. 15б). Последняя реакция наиболее интересна: в результате стресса мультифрактальный процесс (сигнал артериального давления крови крысы в обычном состоянии) становится монофрактальным. Таким образом, диагностика воздействия стресса на организм в некоторых случаях может основываться на анализе переходов от монофрактальной структуры к мультифрактальной и наоборот. Отметим важное обстоятельство: стандартные методы анализа, такие как вычисление частоты сердечных сокращений и спектральный анализ, в данном примере не позволили различить две реакции, изображенные на рис. 15. В обоих случаях диагностировались однотипные изменения: увеличение частоты сердцебиений и энергетических характеристик. Приведенный пример показывает одну из ситуаций, когда мультифрактальный формализм может представлять интерес в качестве эффективного метода классификации состояния биологических систем по коротким и нестационарным сигналам.

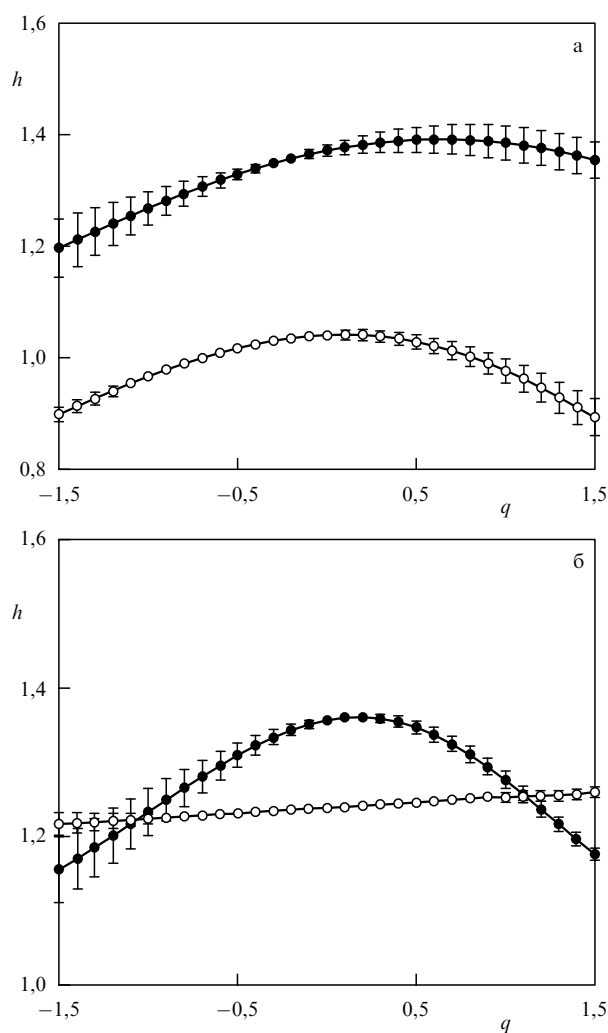


Рис. 15. Реакции на стресс: (а) изменение локальной регулярности сигнала (корреляционных свойств) и (б) потеря мультифрактальности.

В ходе исследования были обнаружены четкие различия в реакциях самцов и самок крыс. Динамика кровяного давления самок демонстрировала слабую реакцию на стресс (рис. 16а), тогда как у самцов наблюдались значительно более сильные изменения спектра сингулярностей $D(h)$ при стрессе по отношению к спектру сингулярностей в состоянии покоя (рис. 16б). Приведенные на рис. 16 результаты являются наиболее показательными и в то же время типичными реакциями. Как видно из рис. 16б, значения экспонент Гельдера $h(q)$ сигнала кровяного давления самца уменьшаются при стрессе, что свидетельствует об изменении корреляций: процесс становится менее "гладким". Помимо изменения корреляционных свойств наблюдается уменьшение величины Δh . В рассматриваемом примере в состоянии покоя $\Delta h \approx 0,5$, а во время стресса $\Delta h \approx 0,3$, т.е. спектр сингулярностей становится более узким. Существенное уменьшение характеристики Δh у самцов было зафиксировано в 7 экспериментах из 11, причем в трех случаях наблюдался переход к почти монофрактальной структуре точечных процессов. Рассматриваемый стресс был достаточно слабым, возможно, при более сильном воздействии эффекты потери мультифрактальности будут наблюдаться чаще. Это позволяет выдвинуть гипотезу о том, что мера мультифрактальности Δh может служить индикатором силы отклика организма на стресс.

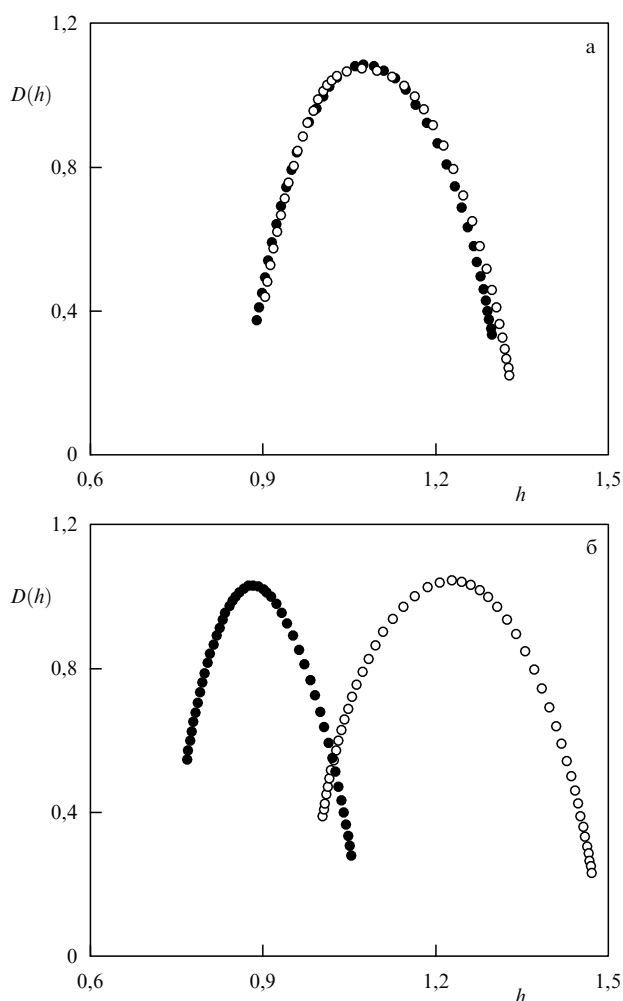


Рис. 16. Характерная реакция на стресс (а) самки и (б) самца.

5. Возможности

и ограничения мультифрактального анализа

Основанный на вейвлет-преобразовании мультифрактальный анализ может рассматриваться в качестве метода исследования спектрально-корреляционных свойств различных процессов, в том числе нестационарных. Как следует, в частности, из формулы (23), "медленная" нестационарность (полиномиальный тренд) не оказывает влияния на результат, если выбирается базисная функция ψ , имеющая несколько первых нулевых моментов. Помимо предоставляемой возможности изучать как стационарные, так и нестационарные процессы, метод ММВП обладает еще одним преимуществом по сравнению с классическим корреляционным анализом: являясь инструментом "локального" исследования структуры функций времени, мультифрактальный анализ позволяет проводить оценку корреляционных свойств случайных процессов по сравнительно коротким сигналам. С целью иллюстрации эффективности использования алгоритма ММВП для анализа корреляционных свойств рассмотрим винеровский случайный процесс, статистические свойства которого хорошо известны ($h = 1,5$).

Результаты применения классического корреляционного анализа показывают, что при рассмотрении сравнительно коротких реализаций одного и того же процесса оценки закона спада корреляций для разных выборок могут существенно различаться. Скорости спада автокорреляционных функций (рис. 17) для разных реализаций, содержащих 3000 точек, различаются почти в 2 раза. Метод ММВП диагностирует наличие винеровского процесса по тем же самым выборкам значительно надежнее. В предположении однородности процесса можно оценить усредненные по q гильдеровские экспоненты, которые принимают ожидаемое значение $h = 1,5$ с погрешностью не более 3 %. Разброс характеристик скорости спада автокорреляционной функции в данном случае значительно больше.

В качестве других примеров можно рассмотреть белый шум ($h = 0,5$) или $1/f$ -шум ($h = 1$), получив для них ожидаемые значения гильдеровских экспонент с погрешностью, имеющей тот же порядок ($\sim 3\%$ при анализе выборки, содержащей 3000 точек). Однако данные примеры относятся к очень простым объектам. Чтобы оценить реальные возможности и ограничения мультифрактального формализма, задачу следует усложнить и проанализировать неоднородные сигналы, содержащие различные типы сингулярного поведения.

Если рассматривается совместное действие нескольких процессов с различными статистическими свойствами и если данные процессы различаются по амплитудам, то можно ожидать, что на малых масштабах (при рассмотрении слабых сингулярностей) проявится один из них, а на больших масштабах (сильные сингулярности) — другой. Для наглядности рассмотрим искусственный сигнал, представляющий собой сумму реализации винеровского случайного процесса и последовательности импульсов, имеющей структуру канторова множества. Ожидается, что в результате такого сложения (рис. 18) при больших флуктуациях проявится структура канторова множества, на меньших масштабах будет доминировать винеровский случайный процесс. Проведенные расчеты это подтверждают (рис. 19). При отри-

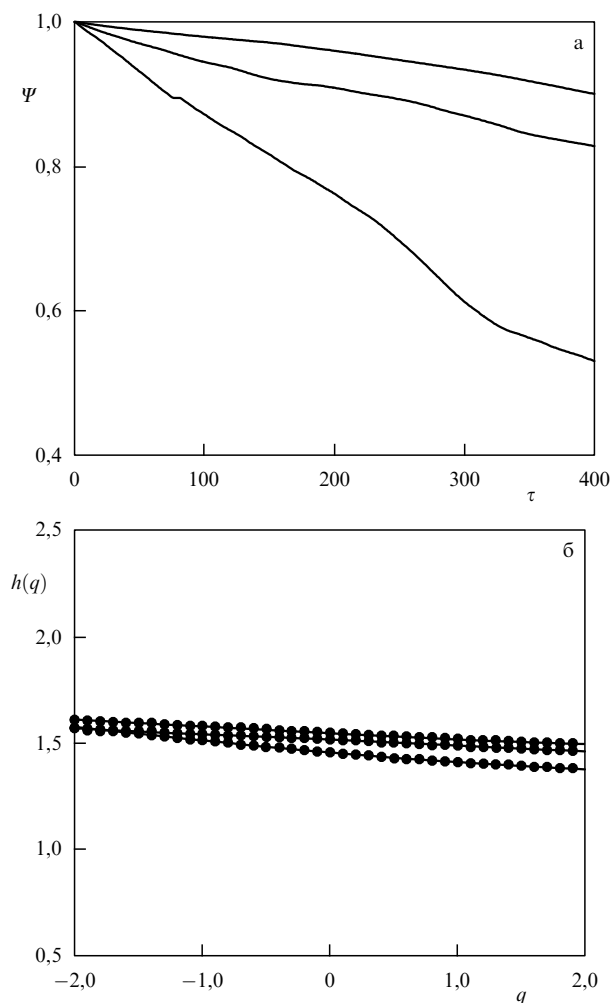


Рис. 17. Результаты вычисления автокорреляционной функции (а) и гёльдеровских экспонент (б) по трем реализациям винеровского случайного процесса, содержащим по 3000 точек.

цательных q (слабые сингулярности) значения гёльдеровских экспонент приближаются к $h \approx 1,5$, тогда как при положительных q (сильные сингулярности) $h \approx 0,63$. Таким образом, метод ММВП четко фиксирует различия в структуре анализируемого сигнала при изменении масштаба наблюдения. При наличии нескольких типов сингулярностей метод ММВП позволяет их четко фиксировать, если данные особенности относятся к разным масштабам. Если различия в масштабах незначительны, то четкого разделения сингулярностей не произойдет. В частности, в рассматриваемом примере суммы импульсов со структурой канторова множества и винеровского процесса увеличение интенсивности последнего приведет к тому, что при $q > 0$ значения гёльдеровских экспонент будут смещаться к $h \approx 1,5$ (см. рис. 19). Второй тип сингулярности ($h \approx 0,63$) может проявиться лишь при очень больших q , но при увеличении q снижается надежность оценок гёльдеровских экспонент. При наличии нескольких типов сингулярностей, относящихся к близким масштабам, метод ММВП приводит к усредненным значениям h .

При использовании метода ММВП могут возникать проблемы в случае наличия специфических частотно-модулированных закономерностей, наблюдаемых для так называемых чирпов [76]. Переменно-осциллирую-

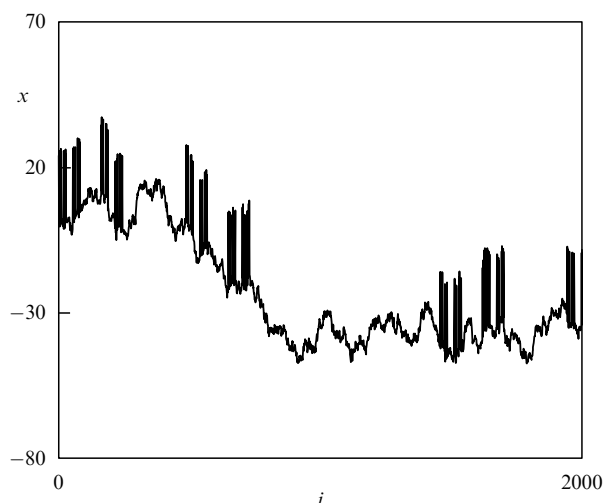


Рис. 18. Искусственный сигнал, представляющий собой сумму реализации винеровского случайного процесса и последовательности импульсов, имеющей структуру канторова множества.

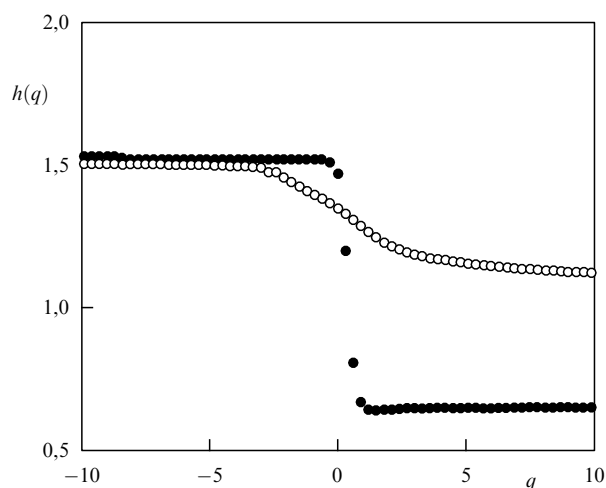


Рис. 19. Зависимость $h(q)$ для сигнала, изображенного на рис. 18 (темные кружки). Светлые кружки соответствуют случаю незначительных различий в масштабах наблюдения сингулярностей.

щие функции целесообразно изучать на основе более общего подхода, основанного на дважды микролокальном анализе, предложенном в работе [76]. Случай чирпов представляет собой одну из ситуаций, в которой проявляются ограничения метода ММВП. Поэтому данный метод неприменим для изучения сингулярностей функции, которые носят осциллирующий характер. Еще одним из ограничений мультифрактального анализа является то, что он позволяет оценить лишь верхнюю огибающую истинного мультифрактального спектра. Это обстоятельство может приводить к ошибочной интерпретации результатов численного анализа. Во-первых, если истинный спектр сингулярностей $D(h)$ является дискретным, т.е. h принимает только дискретное множество значений, то огибающая будет включать в себя "ложные" точки, представляя собой интерполяцию дискретного спектра $D(h)$. Во-вторых, огибающая не позволяет идентифицировать "внутренние" точки (если они существуют), не принадлежащие верхней огибающей спектра $D(h)$ (рис. 20). В работе [77] отмечается, что колоколообразная форма спектра сингулярностей может

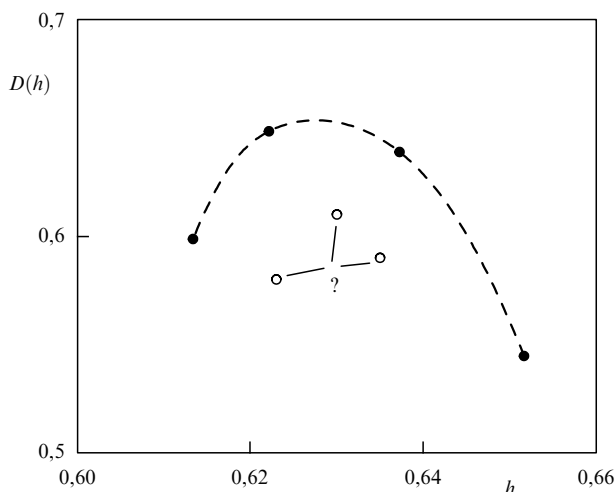


Рис. 20. Иллюстрация ограничений метода мультифрактального формализма. Темные кружки обозначают истинный мультифрактальный спектр, штриховая кривая — результат применения мультифрактального анализа. Внутренние точки (светлые кружки) не идентифицируются на основе метода ММВП.

быть получена даже в том случае, когда метод ММВП применяется для обработки сигналов, не обладающих мультифрактальными свойствами. Если процесс характеризуется не сплошным спектром $D(h)$, а небольшим дискретным набором гёльдеровских экспонентов, то получив огибающую, подобную изображенной на рис. 20, в общем случае нельзя достоверно сказать, существуют ли сингулярности, характеризующиеся, например, значением $h = 0,63 \pm 0,005$. Для того чтобы избежать сложностей в интерпретации результатов, целесообразнее не анализировать, конечным либо бесконечным является число скейлинговых характеристик, а рассматривать метод ММВП как аппарат численного анализа, позволяющий оценивать диапазон изменения гёльдеровских экспонентов (степень мультифрактальности), устанавливать наличие корреляций различного типа в нестационарных случайных процессах и характеризовать их. Тем самым мы получаем возможность осуществлять корреляционный анализ по нестационарным сигналам малой длительности и проводить количественную оценку меры однородности случайного процесса.

6. Заключение

В последние годы наличие мультифрактальности или сложного скейлинга в структуре процессов различной природы широко обсуждается в научной литературе. Появление нового инструмента анализа сложных сигналов, основанного на сочетании теории мультифракталов и вейвлет-анализа, значительно расширило возможности привлечения строгих математических результатов, полученных в рамках концепции мультифрактального формализма, при проведении экспериментальных исследований.

Основывающийся на непрерывном вейвлет-преобразовании мультифрактальный анализ можно интерпретировать как новый взгляд на проблему исследования структуры сигналов. В задачах статистической радиофизики, в частности, традиционно большое внимание уделяется спектрально-корреляционному анализу. Однако классические методы расчета корреляционных функ-

ций или спектра мощности могут применяться лишь в случае стационарных процессов и для получения надежных оценок закона спада корреляций или частотной зависимости функции спектральной плотности требуют большой длительности сигналов. В отличие от классических подходов метод ММВП позволяет проводить корреляционный анализ по сравнительно коротким и нестационарным сигналам, что дает возможность рассматривать данный метод в качестве инструмента исследования структуры реальных процессов, полученных в экспериментах. Кроме того, этот инструмент является достаточно универсальным и может применяться вне зависимости от свойства стационарности или природы сигнала; с его помощью могут с равным успехом анализироваться как процессы, регистрируемые в физических экспериментах, так и медико-биологические или метеорологические временные ряды.

Мультифрактальный анализ представляет несомненный интерес для исследований динамики живых систем. Эти системы часто демонстрируют сложное нерегулярное поведение, характеристики которого непрерывно изменяются во времени. Привлечение для анализа соответствующей динамики классических вероятностных и спектральных методов означает априорное принятие предположения о том, что рассматриваемые процессы можно приближенно считать эргодическими, однако справедливость такого допущения довольно сложно обосновать в случае, когда происходит адаптация живого организма к изменению внешних условий. Часто возникают проблемы при интерпретации результатов анализа биологических данных. Например, наличие двух пиков в спектре мощности с некротными частотами может соответствовать принципиально разным ситуациям: в динамике изучаемой системы могут одновременно присутствовать два независимых ритма или может наблюдаться изменение частоты и в каждый момент времени удается зафиксировать только один ритмический процесс. Такие ситуации, которые нередко возникают при функционировании объектов живой природы, выявляют ограничения классических подходов к анализу случайных процессов и указывают на необходимость применения более эффективных инструментов анализа структуры сигналов. Современные биологические исследования уже невозможны без широкого использования специальных физических методов. Развитие техники сегодня привело к высочайшему уровню экспериментальных исследований, при котором сигналы биологических систем можно измерять на микроскопических масштабах отдельных клеток и внутриклеточной динамики. В то же время анализ таких сигналов часто ограничивается простой статистической обработкой экспериментальных данных. Привлечение более точных инструментов исследования сигналов, позволяющих выявить детали их сложной структуры, представляется в связи с этим очень актуальной задачей: современные высокоточные биологические эксперименты, несомненно, нуждаются в соответствующих методах анализа. Биологические приложения физических подходов и методов обогащают и саму физику. В частности, разработанные специальные методы, для которых нестационарность динамики не является препятствием, не только существенно расширяют возможности экспериментальных исследований, но и в значительной степени определяют дальнейший прогресс в развитии теории

анализа структуры сигналов. Наряду с хорошо известным вейвлет-анализом, метод мультифрактального формализма, основанный на вейвлет-преобразовании, с полным основанием может претендовать на эту роль.

Благодарности. Мы благодарны всем нашим коллегам, с которыми мы сотрудничали в процессе работы над этими проблемами. Особую признательность мы выражаем О.В. Иванову за проявленное им внимание к данной работе и ряд ценных предложений. Мы благодарны Министерству образования и науки РФ за поддержку в рамках программы "Развитие научного потенциала высшей школы (2006–2008 гг.)".

Список литературы

- Mandelbrot B B *The Fractal Geometry of Nature* (San Francisco: W.H. Freeman, 1982)
- Halsey T C et al. *Phys. Rev. A* **33** 1141 (1986)
- Tel T Z. *Naturforsch. A* **43** 1154 (1988)
- Федер Е *Фракталы* (М.: Мир, 1991)
- Шредер М *Фракталы, хаос, степенные законы: Миниатюры из бесконечного рая* (Ижевск: РХД, 2001)
- Пайтген Х-О, Рихтер П-Х *Красота фракталов* (М.: Мир, 1993)
- Family F, Vicsek T *Dynamics of Fractal Surfaces* (Singapore: World Scientific, 1991)
- Зельдович Я Б, Соколов Д Д *УФН* **146** 493 (1985)
- Соколов И М *УФН* **150** 221 (1986)
- Зосимов В В, Лямшев Л М *УФН* **165** 361 (1995)
- Vainshtein S I et al. *Phys. Rev. E* **50** 1823 (1994)
- Eisenberg E et al. *Phys. Rev. E* **47** 2333 (1993)
- Dräger J, Bunde A. *Phys. Rev. E* **54** 4596 (1996)
- Arneodo A, Decoster N, Roux S G *Phys. Rev. Lett.* **83** 1255 (1999)
- Chhabra A B et al. *Phys. Rev. A* **40** 5284 (1989)
- Benzi R et al. *J. Phys. A: Math. Gen.* **17** 3521 (1984)
- Badii R, Broggi G *Phys. Lett. A* **131** 339 (1988)
- Feigenbaum M J *J. Stat. Phys.* **46** 919 (1987)
- Jensen M H, Kadanoff L P, Procaccia I *Phys. Rev. A* **36** 1409 (1987)
- Mandelbrot B B *Fractals and Multifractals: Noise, Turbulence and Galaxies* (New York: Springer-Verlag, 1989)
- Strait B J, Dewey T G *Phys. Rev. E* **52** 6588 (1995)
- Glazier J A et al. *Phys. Rev. E* **51** 2665 (1995)
- Hentschel H G E *Phys. Rev. E* **50** 243 (1994)
- Wiklund K O, Elgin J N *Phys. Rev. E* **54** 1111 (1996)
- Pavlov A N et al. *Physica A* **300** 310 (2001)
- Pavlov A N et al. *Physica A* **316** 233 (2002)
- Frish U, Parisi G, in *Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics* (Proc. of the Intern. School of Physics "Enrico Fermi", Course 88, Eds M Ghil, R Benzi, G Parisi) (Amsterdam: North-Holland, 1985) p. 71
- Barabási A-L, Vicsek T *Phys. Rev. A* **44** 2730 (1991)
- Gagne Y, Hopfinger E, Frisch U, in *New Trends in Nonlinear Dynamics and Pattern-Forming Phenomena: The Geometry of Nonequilibrium* (NATO ASI Series. Ser. B, Vol. 237, Eds P Couillet, P Huerre) (New York: Plenum Press, 1990) p. 315
- Muzy J F, Bacry E, Arneodo A *Phys. Rev. Lett.* **67** 3515 (1991)
- Muzy J F, Bacry E, Arneodo A *Phys. Rev. E* **47** 875 (1993)
- Grossmann A, Morlet J *SIAM J. Math. Anal.* **15** 723 (1984)
- Meyer Y *Wavelets: Algorithms and Applications* (Philadelphia, Pa.: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1993)
- Meyer Y *Wavelets and Operators* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992)
- Daubechies I *Ten Lectures on Wavelets* (Philadelphia, Pa.: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992)
- Chui C K *An Introduction to Wavelets* (Boston: Academic Press, 1992)
- Mallat S A *Wavelet Tour of Signal Processing* (San Diego: Academic Press, 1998)
- Астафьева Н М *УФН* **166** 1145 (1996)
- Дремин И М, Иванов О В, Нечитайло В А *УФН* **171** 465 (2001)
- Короновский А А, Храмов А Е *Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения* (М.: Физматлит, 2003)
- Sosnovtseva O V et al. *Phys. Rev. Lett.* **94** 218103 (2005)
- Pavlov A N et al. *Brief. Bioinform.* **7** 375 (2006)
- Ivanov P Ch et al. *Nature* **399** 461 (1999)
- Arneodo A et al. *Physica A* **249** 439 (1998)
- Stanley H E et al. *Physica A* **270** 309 (1999)
- Nunes Amaral L A et al. *Phys. Rev. Lett.* **86** 6026 (2001)
- Ivanov P Ch et al. *Chaos* **11** 641 (2001)
- Marrone A et al. *Phys. Rev. E* **60** 1088 (1999)
- Thurner S, Feurstein M C, Teich M C *Phys. Rev. Lett.* **80** 1544 (1998)
- Gabor D J. *IEE (London)* **93** 429 (1946)
- Вайнштейн Л А, Вакман Д Е *Разделение частот в теории колебаний и волн* (М.: Наука, 1983)
- Peng C-K et al. *Chaos* **5** 82 (1995)
- Peng C-K et al. *Phys. Rev. E* **49** 1685 (1994)
- Hausdorff F *Math. Ann.* **79** 157 (1918)
- Besicovitch A S *Math. Ann.* **110** 321 (1935)
- Falconer K J *The Geometry of Fractal Sets* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985)
- Farmer J D, Ott E, Yorke J A *Physica D* **7** 153 (1983)
- Muzy J F, Bacry E, Arneodo A *Int. J. Bifurcat. Chaos* **4** 245 (1994)
- Божок С В, Паршин Д А *Фракталы и мультифракталы* (Ижевск: РХД, 2001)
- Grassberger P *Phys. Lett. A* **97** 227 (1983)
- Grassberger P, Procaccia I *Physica D* **9** 189 (1983)
- Hentschel H G E, Procaccia I *Physica D* **8** 435 (1983)
- Grassberger P, Procaccia I *Phys. Rev. Lett.* **50** 346 (1983)
- Bowen R *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms* (Lecture Notes in Mathematics, Vol. 470) (Berlin: Springer-Verlag, 1975)
- Collet P, Lebowitz J L, Porzio A J. *Stat. Phys.* **47** 609 (1987)
- Afraimovich V, Zaslavsky G M *Phys. Rev. E* **55** 5418 (1997)
- Postnov D E et al. *Chaos* **9** 227 (1999)
- Pavlov A N, Sosnovtseva O V, Mosekilde E *Chaos, Solitons Fractals* **16** 801 (2003)
- Benzi R, Sutera A, Vulpiani A *J. Phys. A: Math. Gen.* **14** L453 (1981)
- Nicolis C, Nicolis G *Tellus* **33** 225 (1981)
- Анищенко В С и др. *УФН* **169** 7 (1999)
- Silchenko A, Hu C-K *Phys. Rev. E* **63** 041105 (2001)
- Anishchenko V S et al. *Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems* (Berlin: Springer, 2002)
- Анищенко В С и др. *Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах* (Ижевск: РХД, 2003)
- Pavlov A N, Ziganshin A R, Klimova O A *Chaos, Solitons Fractals* **24** 57 (2005)
- Jaffard S, Meyer Y *Mem. Am. Math. Soc.* **123** 587 (1996)
- Veneziano D, Moglen G E, Bras R L *Phys. Rev. E* **52** 1387 (1995)

Multifractal analysis of complex signals

A.N. Pavlov, V.S. Anishchenko

International Research Institute of Nonlinear Dynamics, N.G. Chernyshevskii Saratov State University,
ul. Astrakhanskaya 83, 410026 Saratov, Russian Federation
Tel. (7-8452) 51-45 49, (7-8452) 51-57 38
E-mail: pavlov@chaos.ssu.runnet.ru, wadim@chaos.ssu.runnet.ru

The fundamentals of and application information on the continuous wavelet transform-based method of multifractal analysis are presented. An extension of the concept of multifractals to irregular functions through the use of wavelet transform modulus maxima is discussed. Potential and limitations of the multifractal formalism in the study of nonstationary processes and short signals are considered. Multifractality loss effects in the dynamics of different types of systems are examined.

PACS numbers: **05.45.-a**, **05.45.Pq**, **05.45.Tp**

Bibliography — 77 references

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **177** (8) 859–876 (2007)

Received 3 May 2006, revised 25 March 2007

Physics – Uspekhi **50** (8) (2007)