Теорема о наличии памяти у случайных последовательностей

Автор Reshetov вкл Thursday, 3 December 2015

Задача

Предположим, что имеется букмекер, который принимает ставки на разницу между результатами подбрасываний игрального кубика.

Обозначим через: t - номер последнего подбрасывания, соответственно: t-1 - номер предпоследнего подбрасывания, а t+1 - номер следующего подбрасывания.

В таком случае:

X_{t-1} - результат предпоследнего подбрасывания, значение которого заведомо известно игроку.

X_t - результат последнего подбрасывания, значение которого заведомо известно игроку.

X_{t+1} - результат следующего подбрасывания, значение которого игроку неизвестно.

Условия игры:

Игрок может делать ставку на очередном ходе, а может от неё отказаться.

Принимаются два вида ставок:

1. На то, что результат следующего подбрасывания будет больше результата последнего подбрасывания. В таком случае игрок получает выигрыш в размере: $X_{t+1} - X_t$ денежных единиц
2. На то, что результат следующего подбрасывания будет меньше результата последнего подбрасывания. В таком случае игрок получает выигрыш в размере: $X_t - X_{t+1}$ денежных единиц

Предположим, что наш игрок делает на вид ставки №1, только при условии, что результат предпоследнего подбрасывания был больше результата последнего подбрасывания и только на то, что результат следующего подбрасывания будет больше результата последнего подбрасывания, игнорируя вид ставки №2.

Каково математическое ожидание выигрыша нашего игрока при таких ставках?

Решение задачи

А теперь посмотрим, что получится:

В нижеуказанной таблице все варианты, когда игрок не делает ставку, т.е. при условии $X_{t-1} \leq X_t$, вычеркнуты, а варианты, когда игрок делает ставку, т.е. при условии $X_{t-1} \leq X_t$, не вычеркнуты и выделены жирным:

Номер варианта трёх последовательных подбрасываний игральной кости	Результат предпоследнего подбрасывания X_{t-1}	Результат последнего подбрасывания X_t	Результат следующего подбрасывания X_{t+1}	Разница: $X_{t+1} - X_t$
~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~0~~
~~2~~	~~1~~	~~1~~	~~2~~	~~1~~
~~3~~	~~1~~	~~1~~	~~3~~	~~2~~

Номер варианта трёх последовательных подбрасываний игральной кости	Результат предпоследнего подбрасывания X_{t-1}	Результат последнего подбрасывания X_t	Результат следующего подбрасывания X_{t+1}	Разница: $X_{t+1} - X_t$
~~4~~	~~1~~	~~1~~	~~4~~	~~3~~
~~5~~	~~1~~	~~1~~	~~5~~	~~4~~
~~6~~	~~1~~	~~1~~	~~6~~	~~5~~
~~7~~	~~1~~	~~2~~	~~1~~	~~-1~~
~~8~~	~~1~~	~~2~~	~~2~~	~~0~~
~~9~~	~~1~~	~~2~~	~~3~~	~~1~~
~~10~~	~~1~~	~~2~~	~~4~~	~~2~~
~~11~~	~~1~~	~~2~~	~~5~~	~~3~~
~~12~~	~~1~~	~~2~~	~~6~~	~~4~~
~~13~~	~~1~~	~~3~~	~~1~~	~~-2~~
~~14~~	~~1~~	~~3~~	~~2~~	~~-1~~
~~15~~	~~1~~	~~3~~	~~3~~	~~0~~
~~16~~	~~1~~	~~3~~	~~4~~	~~1~~
~~17~~	~~1~~	~~3~~	~~5~~	~~2~~
~~18~~	~~1~~	~~3~~	~~6~~	~~3~~
~~19~~	~~1~~	~~4~~	~~1~~	~~-3~~
~~20~~	~~1~~	~~4~~	~~2~~	~~-2~~
~~21~~	~~1~~	~~4~~	~~3~~	~~-1~~
~~22~~	~~1~~	~~4~~	~~4~~	~~0~~
~~23~~	~~1~~	~~4~~	~~5~~	~~1~~
~~24~~	~~1~~	~~4~~	~~6~~	~~2~~
~~25~~	~~1~~	~~5~~	~~1~~	~~-4~~
~~26~~	~~1~~	~~5~~	~~2~~	~~-3~~
~~27~~	~~1~~	~~5~~	~~3~~	~~-2~~
~~28~~	~~1~~	~~5~~	~~4~~	~~-1~~
~~29~~	~~1~~	~~5~~	~~5~~	~~0~~
~~30~~	~~1~~	~~5~~	~~6~~	~~1~~
~~31~~	~~1~~	~~6~~	~~1~~	~~-5~~
~~32~~	~~1~~	~~6~~	~~2~~	~~-4~~
~~33~~	~~1~~	~~6~~	~~3~~	~~-3~~
~~34~~	~~1~~	~~6~~	~~4~~	~~-2~~
~~35~~	~~1~~	~~6~~	~~5~~	~~-1~~
~~36~~	~~1~~	~~6~~	~~6~~	~~0~~
37	**2**	**1**	**1**	**0**
38	**2**	**1**	**2**	**1**
39	**2**	**1**	**3**	**2**
40	**2**	**1**	**4**	**3**
41	**2**	**1**	**5**	**4**
42	**2**	**1**	**6**	**5**
~~43~~	~~2~~	~~2~~	~~1~~	~~-1~~
~~44~~	~~2~~	~~2~~	~~2~~	~~0~~
~~45~~	~~2~~	~~2~~	~~3~~	~~1~~
~~46~~	~~2~~	~~2~~	~~4~~	~~2~~
~~47~~	~~2~~	~~2~~	~~5~~	~~3~~
~~48~~	~~2~~	~~2~~	~~6~~	~~4~~
~~49~~	~~2~~	~~3~~	~~1~~	~~-2~~
~~50~~	~~2~~	~~3~~	~~2~~	~~-1~~
~~51~~	~~2~~	~~3~~	~~3~~	~~0~~
~~52~~	~~2~~	~~3~~	~~4~~	~~1~~
~~53~~	~~2~~	~~3~~	~~5~~	~~2~~
~~54~~	~~2~~	~~3~~	~~6~~	~~3~~
~~55~~	~~2~~	~~4~~	~~1~~	~~-3~~
~~56~~	~~2~~	~~4~~	~~2~~	~~-2~~
~~57~~	~~2~~	~~4~~	~~3~~	~~-1~~

Номер варианта трёх последовательных подбрасываний игральной кости	Результат предпоследнего подбрасывания X_{t-1}	Результат последнего подбрасывания X_t	Результат следующего подбрасывания X_{t+1}	Разница: $X_{t+1} - X_t$
~~58~~	~~2~~	~~4~~	~~4~~	~~0~~
~~59~~	~~2~~	~~4~~	~~5~~	~~1~~
~~60~~	~~2~~	~~4~~	~~6~~	~~2~~
~~61~~	~~2~~	~~5~~	~~1~~	~~-4~~
~~62~~	~~2~~	~~5~~	~~2~~	~~-3~~
~~63~~	~~2~~	~~5~~	~~3~~	~~-2~~
~~64~~	~~2~~	~~5~~	~~4~~	~~-1~~
~~65~~	~~2~~	~~5~~	~~5~~	~~0~~
~~66~~	~~2~~	~~5~~	~~6~~	~~1~~
~~67~~	~~2~~	~~6~~	~~1~~	~~-5~~
~~68~~	~~2~~	~~6~~	~~2~~	~~-4~~
~~69~~	~~2~~	~~6~~	~~3~~	~~-3~~
~~70~~	~~2~~	~~6~~	~~4~~	~~-2~~
~~71~~	~~2~~	~~6~~	~~5~~	~~-1~~
~~72~~	~~2~~	~~6~~	~~6~~	~~0~~
73	**3**	**1**	**1**	**0**
74	**3**	**1**	**2**	**1**
75	**3**	**1**	**3**	**2**
76	**3**	**1**	**4**	**3**
77	**3**	**1**	**5**	**4**
78	**3**	**1**	**6**	**5**
79	**3**	**2**	**1**	**-1**
80	**3**	**2**	**2**	**0**
81	**3**	**2**	**3**	**1**
82	**3**	**2**	**4**	**2**
83	**3**	**2**	**5**	**3**
84	**3**	**2**	**6**	**4**
~~85~~	~~3~~	~~3~~	~~1~~	~~-2~~
~~86~~	~~3~~	~~3~~	~~2~~	~~-1~~
~~87~~	~~3~~	~~3~~	~~3~~	~~0~~
~~88~~	~~3~~	~~3~~	~~4~~	~~1~~
~~89~~	~~3~~	~~3~~	~~5~~	~~2~~
~~90~~	~~3~~	~~3~~	~~6~~	~~3~~
~~91~~	~~3~~	~~4~~	~~1~~	~~-3~~
~~92~~	~~3~~	~~4~~	~~2~~	~~-2~~
~~93~~	~~3~~	~~4~~	~~3~~	~~-1~~
~~94~~	~~3~~	~~4~~	~~4~~	~~0~~
~~95~~	~~3~~	~~4~~	~~5~~	~~1~~
~~96~~	~~3~~	~~4~~	~~6~~	~~2~~
~~97~~	~~3~~	~~5~~	~~1~~	~~-4~~
~~98~~	~~3~~	~~5~~	~~2~~	~~-3~~
~~99~~	~~3~~	~~5~~	~~3~~	~~-2~~
~~100~~	~~3~~	~~5~~	~~4~~	~~-1~~
~~101~~	~~3~~	~~5~~	~~5~~	~~0~~
~~102~~	~~3~~	~~5~~	~~6~~	~~1~~
~~103~~	~~3~~	~~6~~	~~1~~	~~-5~~
~~104~~	~~3~~	~~6~~	~~2~~	~~-4~~
~~105~~	~~3~~	~~6~~	~~3~~	~~-3~~
~~106~~	~~3~~	~~6~~	~~4~~	~~-2~~
~~107~~	~~3~~	~~6~~	~~5~~	~~-1~~
~~108~~	~~3~~	~~6~~	~~6~~	~~0~~
109	**4**	**1**	**1**	**0**
110	**4**	**1**	**2**	**1**
111	**4**	**1**	**3**	**2**

Номер варианта трёх последовательных подбрасываний игральной кости	Результат предпоследнего подбрасывания X_{t-1}	Результат последнего подбрасывания X_t	Результат следующего подбрасывания X_{t+1}	Разница: $X_{t+1} - X_t$
112	**4**	**1**	**4**	**3**
113	**4**	**1**	**5**	**4**
114	**4**	**1**	**6**	**5**
115	**4**	**2**	**1**	**-1**
116	**4**	**2**	**2**	**0**
117	**4**	**2**	**3**	**1**
118	**4**	**2**	**4**	**2**
119	**4**	**2**	**5**	**3**
120	**4**	**2**	**6**	**4**
121	**4**	**3**	**1**	**-2**
122	**4**	**3**	**2**	**-1**
123	**4**	**3**	**3**	**0**
124	**4**	**3**	**4**	**1**
125	**4**	**3**	**5**	**2**
126	**4**	**3**	**6**	**3**
~~127~~	~~4~~	~~4~~	~~1~~	~~-3~~
~~128~~	~~4~~	~~4~~	~~2~~	~~-2~~
~~129~~	~~4~~	~~4~~	~~3~~	~~-1~~
~~130~~	~~4~~	~~4~~	~~4~~	~~0~~
~~131~~	~~4~~	~~4~~	~~5~~	~~1~~
~~132~~	~~4~~	~~4~~	~~6~~	~~2~~
~~133~~	~~4~~	~~5~~	~~1~~	~~-4~~
~~134~~	~~4~~	~~5~~	~~2~~	~~-3~~
~~135~~	~~4~~	~~5~~	~~3~~	~~-2~~
~~136~~	~~4~~	~~5~~	~~4~~	~~-1~~
~~137~~	~~4~~	~~5~~	~~5~~	~~0~~
~~138~~	~~4~~	~~5~~	~~6~~	~~1~~
~~139~~	~~4~~	~~6~~	~~1~~	~~-5~~
~~140~~	~~4~~	~~6~~	~~2~~	~~-4~~
~~141~~	~~4~~	~~6~~	~~3~~	~~-3~~
~~142~~	~~4~~	~~6~~	~~4~~	~~-2~~
~~143~~	~~4~~	~~6~~	~~5~~	~~-1~~
~~144~~	~~4~~	~~6~~	~~6~~	~~0~~
145	**5**	**1**	**1**	**0**
146	**5**	**1**	**2**	**1**
147	**5**	**1**	**3**	**2**
148	**5**	**1**	**4**	**3**
149	**5**	**1**	**5**	**4**
150	**5**	**1**	**6**	**5**
151	**5**	**2**	**1**	**-1**
152	**5**	**2**	**2**	**0**
153	**5**	**2**	**3**	**1**
154	**5**	**2**	**4**	**2**
155	**5**	**2**	**5**	**3**
156	**5**	**2**	**6**	**4**
157	**5**	**3**	**1**	**-2**
158	**5**	**3**	**2**	**-1**
159	**5**	**3**	**3**	**0**
160	**5**	**3**	**4**	**1**
161	**5**	**3**	**5**	**2**
162	**5**	**3**	**6**	**3**
163	**5**	**4**	**1**	**-3**
164	**5**	**4**	**2**	**-2**
165	**5**	**4**	**3**	**-1**

Номер варианта трёх последовательных подбрасываний игральной кости	Результат предпоследнего подбрасывания X_{t-1}	Результат последнего подбрасывания X_t	Результат следующего подбрасывания X_{t+1}	Разница: $X_{t+1} - X_t$
166	**5**	**4**	**4**	**0**
167	**5**	**4**	**5**	**1**
168	**5**	**4**	**6**	**2**
~~169~~	~~5~~	~~5~~	~~1~~	~~-4~~
~~170~~	~~5~~	~~5~~	~~2~~	~~-3~~
~~171~~	~~5~~	~~5~~	~~3~~	~~-2~~
~~172~~	~~5~~	~~5~~	~~4~~	~~-1~~
~~173~~	~~5~~	~~5~~	~~5~~	~~0~~
~~174~~	~~5~~	~~5~~	~~6~~	~~1~~
~~175~~	~~5~~	~~6~~	~~1~~	~~-5~~
~~176~~	~~5~~	~~6~~	~~2~~	~~-4~~
~~177~~	~~5~~	~~6~~	~~3~~	~~-3~~
~~178~~	~~5~~	~~6~~	~~4~~	~~-2~~
~~179~~	~~5~~	~~6~~	~~5~~	~~-1~~
~~180~~	~~5~~	~~6~~	~~6~~	~~0~~
181	**6**	**1**	**1**	**0**
182	**6**	**1**	**2**	**1**
183	**6**	**1**	**3**	**2**
184	**6**	**1**	**4**	**3**
185	**6**	**1**	**5**	**4**
186	**6**	**1**	**6**	**5**
187	**6**	**2**	**1**	**-1**
188	**6**	**2**	**2**	**0**
189	**6**	**2**	**3**	**1**
190	**6**	**2**	**4**	**2**
191	**6**	**2**	**5**	**3**
192	**6**	**2**	**6**	**4**
193	**6**	**3**	**1**	**-2**
194	**6**	**3**	**2**	**-1**
195	**6**	**3**	**3**	**0**
196	**6**	**3**	**4**	**1**
197	**6**	**3**	**5**	**2**
198	**6**	**3**	**6**	**3**
199	**6**	**4**	**1**	**-3**
200	**6**	**4**	**2**	**-2**
201	**6**	**4**	**3**	**-1**
202	**6**	**4**	**4**	**0**
203	**6**	**4**	**5**	**1**
204	**6**	**4**	**6**	**2**
205	**6**	**5**	**1**	**-4**
206	**6**	**5**	**2**	**-3**
207	**6**	**5**	**3**	**-2**
208	**6**	**5**	**4**	**-1**
209	**6**	**5**	**5**	**0**
210	**6**	**5**	**6**	**1**
~~211~~	~~6~~	~~6~~	~~1~~	~~-5~~
~~212~~	~~6~~	~~6~~	~~2~~	~~-4~~
~~213~~	~~6~~	~~6~~	~~3~~	~~-3~~
~~214~~	~~6~~	~~6~~	~~4~~	~~-2~~
~~215~~	~~6~~	~~6~~	~~5~~	~~-1~~
~~216~~	~~6~~	~~6~~	~~6~~	~~0~~
			Итого для невычеркнутых строк	**105**

Номер варианта трёх последовательных подбрасываний игральной кости	Результат предпоследнего подбрасывания X_{t-1}	Результат последнего подбрасывания X_t	Результат следующего подбрасывания X_{t+1} **с условием: $X_{t-1} > X_t$**	Разница: $X_{t+1} - X_t$

Не правда ли, что какой-то странный результат, если учесть что все варианты в каждой из строк вышеуказанной таблицы равновозможны? Всего в таблице 216 вариантов выпадения кубика в трех последовательных подбрасываниях, из которых 90 не вычеркнуты. В результате чего получается, что наш игрок имеет математическое ожидание 105 / 90 = 1.1666666666666666666666666667... денежных единиц на каждую сделанную им ставку.

Странность заключается в том, что мы не наблюдаем последействия, т.к.: $p(X_t > X_{t+1}) = p(X_{t+1} > X_t)$ и $p(X_t - X_{t+1}) = p(X_{t+1} - X_t)$, а соответственно зная значение только последнего подбрасывания игральной кости X_t наш игрок не мог никаким образом получить математическое ожидание более нулевого, т.к. $M = (X_t - X_{t+1})\ p(X_t - X_{t+1}) - (X_{t+1} - X_t)\ p(X_{t+1} - X_t) = 0$. Однако знание значения предпоследнего подбрасывания X_{t-1} уже позволяет получить игроку преимущество, а соответственно напрашивается вывод, что: **последующее значение случайного ряда может зависеть от не менее, чем двух предыдущих значений.** Также: **случайные ряды могут иметь память (или как её ещё именуют: последействие) на глубину не менее двух уровней, даже если у них отсутствует память на глубину одного уровня.** Где под глубиной уровней считается количество заведомо известных значений предыдущих величин случайного ряда.

Формулировка теоремы

Предположим, что имеется некий генератор случайных временных рядов, последовательно выдающий значения измеримые, попарно сравнимые и однозначно ранжируемые. Об алгоритме которого нам известно лишь то, что вероятность сгенерированного любого его последующего значения независима от любого предыдущего сгенерированного значения. Предположим, что данный генератор с интервалом в 1 единицу времени, выдаёт некую последовательность чисел:

$X_1, X_2, \ldots X_{t-1}, X_t$

Где:

X_i - некое значение случайного числа, сгенерированное генератором на i-й единице времени с момента его запуска.

t - текущее время в единицах времени с момента запуска генератора

Предположим, что нам известны два произвольных значения, сгенерированные в прошлом: X_{t-k} и X_{t-m}

При условии:

$0 \le k \le m \le t$

Предположим, что имеется некий букмекер, который предлагает сделать ставку в момент t на разницу между значениями чисел $\delta = X_{t-m} - X_{t+n}$, где n - натуральное число, при условиях:

- Если мы делаем ставку на понижение, то размер нашего выигрыша будет равен δ в денежных единицах
- Если мы делаем ставку на повышение, то размер нашего выигрыша будет равен -δ в денежных единицах

Возможно ли получить математическое ожидание выше значения 0 денежных единиц при ставках у вышеуказанного букмекера, если нам заведомо известны значения двух произвольных предыдущих чисел ряда: $X_{t - k}$ и $X_{t - m}$? Ведь очевидно, что значение числа ряда $X_{t + n}$ нам пока неизвестно, т.к. генератор выдаст его в будущем только через n единиц времени.

Для начала попробуем доказать, что знание только лишь одного значения числа $X_{t - m}$ явно недостаточно для получения положительного математического ожидания по правилам вышеприведённой игры. Хотя вроде бы и очевидно по вышеуказанным условиям, вероятности сгенерированных значений попарно независимы друг от друга. Но это пока ещё не доказано для математического ожидания.

Доказательство теоремы

Рассмотрим случай 1.1. при условии: $X_{t - m} = X_{t + n}$

Поскольку в этом случае $\delta = |X_{t - m} - X_{t + n}| = 0$, то очевидно, что математическое ожидание всегда тоже будет равно M = 0.

Рассмотрим случай 1.2. при условии: $X_{t - m} \neq X_{t + n}$

Найдём минимум от значений $X_{t - m}$ и $X_{t + n}$

$V_{min} = \min(X_{t - m}, X_{t + n})$

Найдём максимум от значений $X_{t - m}$ и $X_{t + n}$

$V_{max} = \max(X_{t - m}, X_{t + n})$

Вычислим между ними разницу:

$dV = V_{max} - V_{min}$

В таком случае равновозможны всего лишь два несовместных варианта, приведенные в нижеуказанной таблице по строкам:

Номер варианта	Значение $X_{t - m}$	Значение $X_{t + n}$	Разница: $X_{t - m} - X_{t + n}$
1	V_{min}	V_{max}	-dV
2	V_{max}	V_{min}	dV

Поскольку вышеуказанные варианты 1 и 2 равновозможны, т.е. p(1) = p(2) = ½, то математическое ожидание:

M = (dV - dV) / 2 = 0

Вывод: Знание значения единственного произвольной случайной величины случайного временного ряда не даёт никакого преимущества в математическом ожидании разницы между этим значением и любым заведомо неизвестным числом этого же ряда при условии попарной независимости значений всех чисел в этом же ряду.

С двумя числами случайногов временного ряда, значение одного из которых нам заведомо известно, а второго неизвестно, мы разобрались. Теперь перейдём к трём числам, значения двух из которых нам заведомо известны, а третьего неизвестно.

Рассмотрим 2.1. случай, когда $X_{t - m} = X_{t - k} = X_{t + n}$

Очевидно, что всегда $\delta = 0$, а следовательно и M = 0

Рассмотрим 2.2. случай, когда два значения равны между собой, а третье не равно ни

одному из остальных двух значений

Т.е. может иметь место только один из трёх нижеприведённых равновозможных вариантов:

1. $X_{t-m} = X_{t-k}$ и $X_{t+n} \neq X_{t-m}$ и $X_{t+n} \neq X_{t-k}$
2. $X_{t-m} \neq X_{t-k}$ и $X_{t+n} = X_{t-m}$ и $X_{t+n} \neq X_{t-k}$
3. $X_{t-m} \neq X_{t-k}$ и $X_{t+n} \neq X_{t-m}$ и $X_{t+n} = X_{t-k}$

Найдём минимум от значений X_{t-m}, X_{t-k} и X_{t+n}

$V_{min} = \min(X_{t-m}, X_{t-k}, X_{t+n})$

Найдём максимум от значений X_{t-m}, X_{t-k} и X_{t+n}

$V_{max} = \max(X_{t-m}, X_{t-k}, X_{t+n})$

Вычислим между ними разницу:

$dV = V_{max} - V_{min}$

У нас могут быть всего шесть равновозможных и попарно несовместных вариантов:

Номер варианта	Значение X_{t-k}	Значение X_{t-m}	Значение X_{t+n}	Разница:
1	V_{max}	V_{max}	V_{min}	dV
2	V_{max}	V_{min}	V_{max}	-dV
3	V_{min}	V_{max}	V_{max}	0
4	V_{max}	V_{min}	V_{min}	0
5	V_{min}	V_{max}	V_{min}	dV
6	V_{min}	V_{min}	V_{max}	-dV

И тут мы видим две интересные закономерности:

1. Если $X_{t-k} > X_{t-m}$, то $X_{t-m} \leq X_{t+n}$
2. Если $X_{t-k} < X_{t-m}$, то $X_{t-m} \geq X_{t+n}$

Поскольку значения X_{t-k} и X_{t-m} нам заведомо известны, то в данном случае мы можем без всякого риска сделать ставку на знак разницы: $X_{t-m} - X_{t+n}$.

Что касается условия $X_{t-k} = X_{t-m}$, то в силу того, что нам заведомо неизвестно являются ли значения этих случайных величин максимальными или минимальными из трёх возможных, то математическое ожидание значения разницы $|X_{t-m} - X_{t+n}|$ всегда будет нулевым, т.к. варианты с номерами 1 и 6 равновозможны.

Вычислим матожидание для вариантов, когда $X_{t-k} > X_{t-m}$, т.е. для вариантов с номерами 2 и 4:

$M(X_{t-k} > X_{t-m}) = (-dV + 0) / 3 = -dV / 3 < 0$

Вычислим матожидание для вариантов, когда $X_{t-k} < X_{t-m}$, т.е. для вариантов с номерами 3 и 5:

$M(X_{t-k} > X_{t-m}) = (dV + 0) / 3 = dV / 3 > 0$

Ну и конечно же:

$M(X_{t-k} = X_{t-m}) = 0$

Рассмотрим 2.3. случай, когда все известные и неизвестное значения случайных величин попарно не равны друг другу

Найдём минимум от значений X_{t-m}, X_{t-k} и X_{t+n}

$V_{min} = \min(X_{t-m}, X_{t-k}, X_{t+n})$

Найдём максимум от значений X_{t-m}, X_{t-k} и X_{t+n}

$V_{max} = \max(X_{t-m}, X_{t-k}, X_{t+n})$

Найдём среднее из значений X_{t-m}, X_{t-k} и X_{t+n}

$V_{mid} = \mathrm{mid}(X_{t-m}, X_{t-k}, X_{t+n})$

Вычислим между ними разницу:

$dV_a = V_{mid} - V_{min}$

$dV_b = V_{max} - V_{mid}$

$dV_c = V_{max} - V_{min} = dV_a + dV_b$

У нас могут быть всего шесть равновозможных и попарно несовместных вариантов:

Номер варианта	Значение X_{t-k}	Значение X_{t-m}	Значение X_{t+n}	Разница:
1	V_{max}	V_{mid}	V_{min}	dV_a
2	V_{max}	V_{min}	V_{mid}	$-dV_a$
3	V_{mid}	V_{max}	V_{min}	$dV_a + dV_b$
4	V_{mid}	V_{min}	V_{max}	$-dV_a - dV_b$
5	V_{min}	V_{max}	V_{mid}	dV_b
6	V_{min}	V_{mid}	V_{max}	$-dV_b$

Вычислим матожидание для вариантов, когда $X_{t-k} > X_{t-m}$, т.е. для вариантов с номерами 1, 2 и 4:

$M(X_{t-k} > X_{t-m}) = (\cancel{dV_a} - \cancel{dV_a} - dV_a - dV_b) / 3 = -(dV_a + dV_b) / 3 < 0$

Вычислим матожидание для вариантов, когда $X_{t-k} < X_{t-m}$, т.е. для вариантов с номерами 3, 5 и 6:

$M(X_{t-k} > X_{t-m}) = (dV_a + dV_b + \cancel{dV_a} - \cancel{dV_a}) / 3 = (dV_a + dV_b) / 3 > 0$

Обобщив закономерности для случаев 2.1., 2.2. и 2.3. мы получаем закономерность:

$$\mathbf{M(X_{t+n} - X_{t-m}) = p(X_{t-m} \neq X_{t-k}) \cdot sgn(X_{t-m} - X_{t-k}) \cdot (V_{max} - V_{min}) \geq p(X_{t-m} \neq X_{t-k}) \cdot sgn(X_{t-m} - X_{t-k}) \cdot |X_{t-k} - X_{t-m}|}$$

Поскольку:

$|x| = sgn(x) \cdot x$

и

$sgn(x)^2 = 1$

то:

$$\mathbf{M(X_{t+n} - X_{t-m}) \geq p(X_{t-m} \neq X_{t-k}) \cdot (X_{t-m} - X_{t-k})}$$

Соответственно, если заведомо зная значения не менее двух предыдущих величин случайного временного ряда, можно однозначно вычислить знак матожидания для разницы между последним известным значением числа этого ряда и пока ещё неизвестным значением того же самого ряда, то можно сделать окончательный вывод о том, что:

Случайные временные ряды обладают памятью на глубину не менее двух заведомо известных значений

P. S.:

1. Если бы было известно значение для $p(X_{t - m} \neq X_{t - k})$ то можно было бы вычислить и абсолютное значение этого матожидания, а оно нам неизвестно, т.к. мы не обладаем никакими сведениями об алгоритме генератора.
2. Если ряд монотонно возрастающий либо монотонно убывающий, то значение математического ожидания в вышеуказанных формулах будет с противоположным знаком. Но при таких условиях подобные ряды никак нельзя назвать случайными или, по крайней мере, нельзя сказать про такие ряды, что последующее значение ряда независимо от предыдущего.

Юрий Решетов

Tags: Математика
Теория вероятностей

Source URL: http://yury-reshetov.com/node/36