Лабораторная работа №2

Реализация систем поддержки принятия решений на базе нечеткой логики.

1 Цель работы

Целью работы является получение студентами практических навыков реализации систем поддержки принятия решений на базе нечеткой логики.

2 Основные теоретические сведения

Основой систем нечеткой логики является математическая теория нечетких множеств, которая берет свое начало со статьи американского ученого Лотфи Заде, опубликованной под названием "Fuzzy Sets" (нечеткие множества) в 1965 году в журнале Information and Control. В настоящее время эта теория получила достаточно глубокое развитие, а системы на базе нечеткой логики нашли широкое применение в промышленности от производства фотоаппаратов, стиральных машин, микроволновых печей до управления крупными промышленными производствами и систем поддержки принятия решения.

Идея, лежащая в основе теории нечетких множеств, заключается в том, что человек в своей повседневной жизни мыслит и принимает решения на основе нечетких понятий. Создание теории нечетких множеств - это попытка формализовать человеческий способ рассуждений. Развитие вычислительной техники позволяет в настоящее время создавать на базе теории нечетких множеств системы нечеткой логики, которые копируют способ рассуждений человека.

В большинстве решаемых человеком задач не требуется высокая точность. Наоборот, часто приходится находить разумный компромисс между понятиями "точность" и "важность" при общении с реальным миром. Так, для принятия решения о переходе улицы человек не оценивает скорость приближающегося автомобиля с точностью до десятых долей метров в секунду. Он определяет для себя скорость автомобиля как "очень быструю", "быструю", "медленную" и т.д., т.е. использует для обозначения скорости лингвистические переменные.

Определение лингвистической переменной (формальное)

Лингвистической переменной называется пятерка (x, T(x), X, G, M), где x - имя переменной; T(x) - множество имен лингвистических значений переменной x, каждое из которых является нечетким множеством на множестве X; G есть синтаксическое правило для образования имен значений x; M есть семантическое правило для ассоциирования каждой величины значения с ее понятием.

Это определение может вызвать ощущение, что лингвистическая переменная - очень сложное понятие, но на самом деле это не так. Цель концепции лингвистической переменной состоит в том, чтобы формальным образом сказать, что переменная может принимать в качестве значений слова из естественного языка. Например, если мы говорим "быстрая скорость", то переменная "скорость" должна пониматься как лингвистическая переменная, но это не означает, что переменная "скорость" не может принимать реальные значения.

Определение лингвистической переменной (интуитивное)

Если переменная может принимать значения слов в естественном языке (например, "маленький", "быстрый" и т.п.), то эта переменная определяется как лингвистическая переменная. Слова, значения которых принимает лингвистическая переменная, обычно обозначают собой нечеткие множества. Лингвистическая переменная может принимать своими значениями либо слова, либо числа.

Определение. Нечеткое множество - это такое множество, которое образуется путем введения обобщенного понятия принадлежности, т.е. расширения двухэлементного множества значений функции принадлежности {0,1} до отрезка [0,1]. Это означает, что переход от полной принадлежности объекта множеству к его полной непринадлежности происходит не скачком, как в обычных "четких" множествах, а плавно, постепенно, причем степень принадлежности элемента множеству выражается числом из интервала [0,1].

Таким образом, нечеткое множество A = {(x, μ_A(x))} определяется математически как совокупность упорядоченных пар, составленных из элементов x множества X и соответствующих им степеней принадлежности μ_A(x) или непосредственно в виде функции μ_A: X$\rightarrow$[0,1].Рассмотрим пример нечеткого множества.

Пример 1. Множество высоких людей

Пусть x есть лингвистическая переменная, обозначающая "рост человека", а ее функция принадлежности к множеству высоких людей μ_A:X$\rightarrow${0,1}, где X - множество, включающее в себя все возможные значения роста человека, задана следующим образом:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geq 180, \\ 0, & \text{если } x < 180. \end{cases}$$

Тогда множество "высоких людей" задается выражением A={x| μ_A(x)=1}, x $\in$X. Графически это представлено на рисунке 1 (сплошная линия).

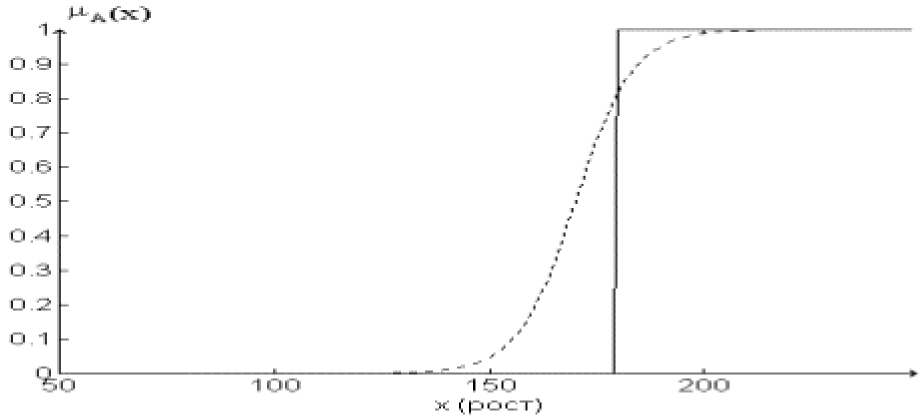


Рисунок 1

Однако в реальной жизни такое понятие, как "рост высокого человека", является субъективным, т.е. зависит от индивидуума, делающего оценку. Одни считают, что высокий человек должен быть ростом более 170 см, другие - более 180 см, третьи - более 190 см. Нечеткие множества позволяют учесть такую размытость оценок. Так, пусть функция принадлежности μ_A:X$\rightarrow${0,1} имеет вид, представленный на рисунке 1 пунктирной линией. Тогда множество A ("высоких людей") задается множеством пар A={x, μ_A(x)}, x $\in$X и является нечетким множеством.

Таким образом, человек ростом 145 см будет принадлежать множеству A со степенью принадлежности μ_A(145)=0, человек ростом 165 см - μ_A(165) = 0,3, ростом 185 см - μ_A(185)= 0,9, а ростом 205 см - μ_A(205)=1.

Можно сказать, что в нечеткой логике правдивость каждого утверждения рассматривается в рамках степени правдивости, которая может также рассматриваться как степень уверенности эксперта, делающего оценку, в том, что элемент x принадлежит множеству A.

Из вышесказанного можно сделать следующие выводы:

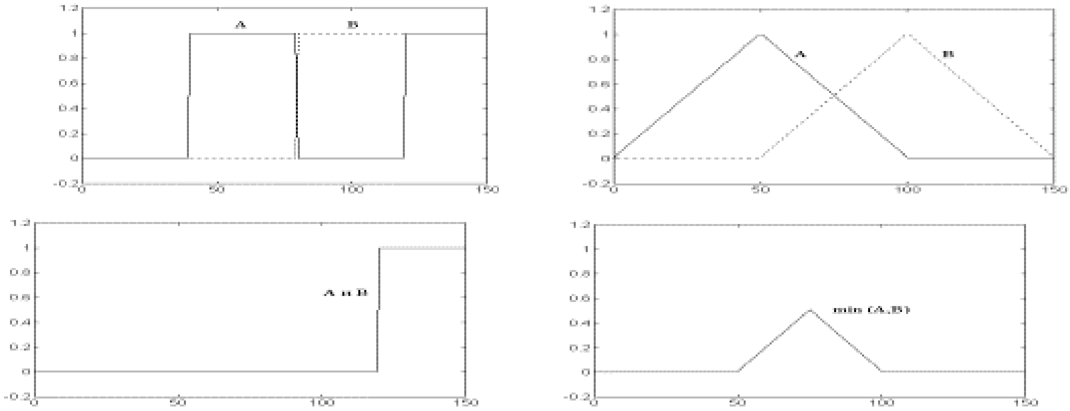
1) нечеткие множества описывают неопределенные понятия (быстрый бегун, горячая вода, жаркая погода);

2) нечеткие множества допускают возможность частичной принадлежности к ним (пятница - частично выходной день (укороченный), погода скорее жаркая);

3) степень принадлежности объекта к нечеткому множеству определяется соответствующим значением функции принадлежности на интервале [0,1] (пятница принадлежит

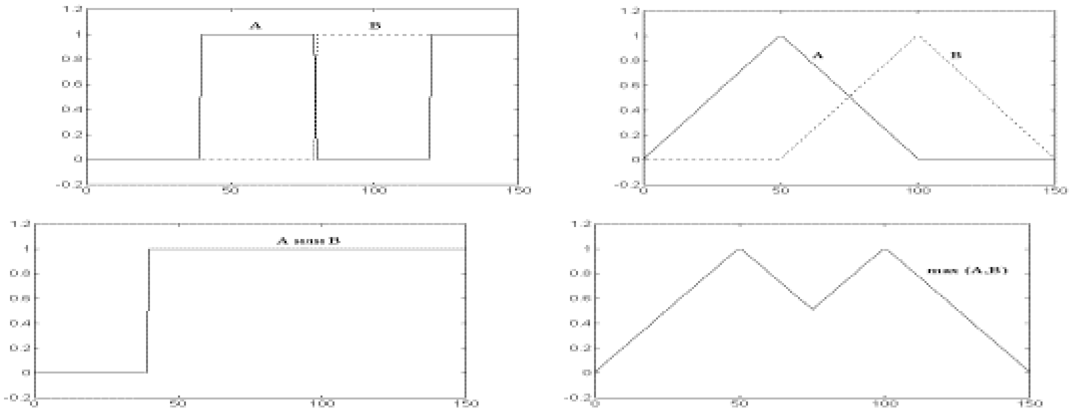
к выходным дням со степенью принадлежности 0,3);
4) функция принадлежности ставит в соответствие объекту (или логической переменной) значение степени его принадлежности к нечеткому множеству.

Логические операции с нечеткими множествами. Одной из важных вещей для понимания механизма нечеткой логики является то, что она может рассматриваться как расширение стандартной, хорошо известной булевой логики (подобно тому, как нечеткие множества являются расширением обычных множеств). Другими словами, если рассматривать нечеткие значения в их экстремумах, т.е. в 1 (абсолютная правда) и в 0 (абсолютная ложь), то можно применять стандартные логические операции: И, ИЛИ, НЕ. В нечеткой логике истинность каждого утверждения рассматривается в определенной степени. В нечеткой логике по аналогии с операциями И и ИЛИ вводятся операции min(A,B) и max(A,B), а операции НЕ соответствует операция 1-A. Графически это представлено на рисунках 2 - 4.



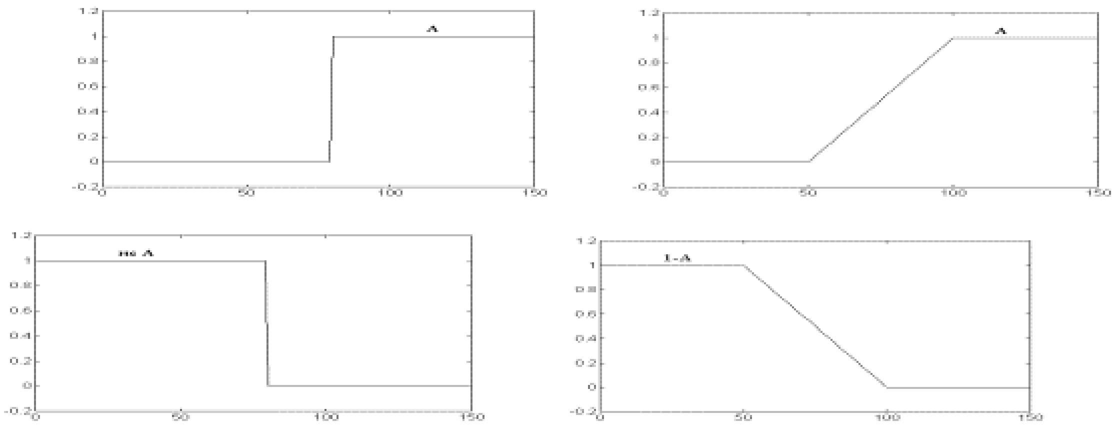
а б

Рисунок 2 - Операция min(A,B): а - "четкая" логика; б - "нечеткая" логика



а б

Рисунок 3 - Операция max(A,B): а - "четкая" логика; б- "нечеткая" логика



а б

Рисунок 4 - Операция 1-A: а - "четкая" логика; б- "нечеткая" логика

Рассмотрим формальные определения.

Определение 1. Пересечением $A \cap B$ двух нечетких множеств A и B на множестве X является нечеткое множество на множестве X с функцией принадлежности, определяемой для любого x $\in X$ как $\mu_{A \cap B} = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$.

Определение 2. Объединением $A \cup B$ двух нечетких множеств A и B на множестве X является нечеткое множество на множестве X с функцией принадлежности, определяемой для любого x $\in X$ как $\mu_{A \cup B} = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$.

Определение 3. Дополнением $\overline{A}$ нечеткого множества A на множестве X является нечеткое множество на множестве X с функцией принадлежности, определяемой для любого x $\in X$ как $\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$

Определения 1 и 2 представляют собой один из возможных выборов оператора пересечения и объединения нечетких множеств. Выбор оператора ведет к определенной интерпретации понятий пересечение и объединение. В литературе вводится понятие треугольных норм и треугольных конорм для обозначения операторов пересечения и объединения нечетких множеств.

Определение 4. Треугольной нормой (t-нормой) называется двухместная действительная функция $T:[0,1]x[0,1] \rightarrow [0,1]$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $T(0, 0)=0$; $T(\mu_A, 1)=T(1, \mu_A)=\mu_A$ (ограниченность);
2) $T(\mu_A, \mu_B) \le T(\mu_C, \mu_D)$, если $\mu_A \le \mu_C$, $\mu_B \le \mu_D$ (монотонность);
3) $T(\mu_A, \mu_B) = T(\mu_B, \mu_A)$ (коммутативность);
4) $T(\mu_A, T(\mu_B, \mu_C))=T(T(\mu_A, \mu_B), \mu_C)$ (ассоциативность).

Простыми случаями t-норм являются операции пересечения, алгебраического произведения (пересечение II), ограниченного произведения (пересечение III), сильного произведения (пересечение IV).

Определение 5. Алгебраическим произведением A*B двух нечетких множеств A и B на множестве X является нечеткое множество на множестве X с функцией принадлежности, определяемой для любого x $\in X$ как $\mu_{A*B}(x)=\mu_A(x) \mu_B(x)$.

Определение 6. Ограниченным произведением $A \mathring{*} B$ двух нечетких множеств A и B на множестве X является нечеткое множество на множестве X с функцией принадлежности, определяемой для любого x $\in X$ как $\mu_{A \mathring{*} B}(x)=\max(0, \mu_A(x)+\mu_B(x)-1)$.

Определение 7. Сильным произведением $A\hat{*}B$ двух нечетких множеств A и B на множестве X является нечеткое множество на множестве X с функцией принадлежности, определяемой для любого x $\in X$ как

$$\mu_{A\hat{*}B}(x) = \begin{cases} \mu_A(x), \ \text{если } \mu_B(x) = 1; \\ \mu_B(x), \ \text{если } \mu_A(x) = 1; \\ 0 \ - \ \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Для этих t-норм справедливо неравенство $A\hat{*}B \le A\mathring{*}B \le AB \le A\cap B$.

Определение 8. Треугольной конормой (t-конормой) называется двухместная действительная функция $\perp:[0,1]x[0,1] \rightarrow [0,1]$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\perp(1, 1)=1$; $\perp(0, \mu_A)=\perp(\mu_A, 0)=\mu_A$ (ограниченность);

2) $\perp(\mu_A, \mu_B) \ge (\mu_C,\mu_D)$, если $\mu_A \ge \mu_C$, $\mu_B \ge \mu_D$ (монотонность);

3) $\perp(\mu_A,\mu_B) = \perp(\mu_B, \mu_A)$ (коммутативность);

4) $\perp(\mu_A, \perp(\mu_B,\mu_C)) = \perp(\perp(\mu_A, \mu_B), \mu_C)$ (ассоциативность).

Простыми случаями t-конорм являются операции объединения, алгебраической суммы (объединение II), ограниченной суммы (объединение III) и сильной суммы (объединение IV).

Определение 9. Алгебраической суммой $A\oplus B$ двух нечетких множеств A и B на множестве X является нечеткое множество на множестве X с функцией принадлежности, определяемой для любого x $\in X$ как $\mu_{A\oplus B}(x) = \mu_A(x)+\mu_B(x)-\mu_A(x)\mu_B(x)$.

Определение 10. Ограниченной суммой $A\mathring{+}B$ двух нечетких множеств A и B на множестве X является нечеткое множество на множестве X с функцией принадлежности, определяемой для любого x $\in X$ как $\mu_{A\mathring{+}B}(x)=\min(1, \mu_A(x)+\mu_B(x))$.

Определение 11. Сильной суммой $A\hat{+}B$ двух нечетких множеств A и B на множестве X является нечеткое множество на множестве X с функцией принадлежности, определяемой для любого x $\in X$ как

$$\mu_{A\hat{+}B}(x) = \begin{cases} \mu_A(x), \ \text{если } \mu_B(x) = 0; \\ \mu_B(x), \ \text{если } \mu_A(x) = 0; \\ 1 \ - \ \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Для этих t-конорм справедливо неравенство $A\hat{+}B \ge A\mathring{+}B \ge A\oplus B \ge A\cup B$.

Следует отметить, что в теории нечетких множеств оператор дополнения также не является единственным. Помимо оператора 1-A существует целый набор операторов отрицания. Наиболее общее определение функции отрицания в нечетких множествах $C:[0,1]\rightarrow[0,1]$ предполагает, что выполняются, по крайней мере, два следующих свойства:

1) $C(0)=1$, $C(1)=0$;

2) C - невозрастающая функция, т.е. если μ_A μ_B, то $C(\mu_A)$ $C(\mu_B)$.

Определение 12. Разностью A-B двух нечетких множеств A и B на множестве X называется нечеткое множество на множестве X с функцией принадлежности, определяемой для любого x $\in X$ как

$\mu_{A-B}(x)=\max(0, \mu_A(x)- \mu_B(x))$.

Определение 13. Концентрированием нечеткого множества A^2 на множестве X называется нечеткое множество на множестве X с функцией принадлежности следующего вида: $\mu_{A^2} = \mu_A^2(x)$ - для любого x $\in$X.

Результатом применения операции концентрирования к нечеткому множеству A является уменьшение степени принадлежности элементов к этому множеству, и происходит оно в квадратичной зависимости, т.е. если $\mu_A(x) \approx 1$, то это уменьшение мало, а если $\mu_A(x) \approx 0$, то уменьшение велико.

В естественном языке применение операции концентрирования к значению лингвистической переменной соответствует использованию усиления "очень".

Определение 14. Растяжением нечеткого множества $A^{1/2}$ называется операция, противоположная концентрированию. В естественном языке ее можно сравнить с использованием слов "достаточно" или "более-менее" ("более-менее близкий").

Системы нечеткой логики. Системами нечеткой логики называются системы, которые оперируют с нечеткими понятиями, такими как нечеткие множества, лингвистические переменные и т.п., и используют при этом нечеткую логику. Системы нечеткой логики могут быть классифицированы по трем основным типам:

1) простые системы нечеткой логики (pure Fuzzy Logic Systems);
2) нечеткие системы Такаги и Суджено (Takagi and Sugeno);
3) системы нечеткой логики с фаззификатором и дефаззификатором.

Простые системы нечеткой логики. Базовая конфигурация простой системы нечеткой логики представлена на рисунке 5.

Базис нечетких правил содержит набор нечетких IF-THEN (ЕСЛИ-ТО) правил, а механизм нечеткого вывода на основе принципов нечеткой логики использует эти IF-THEN-правила для отображения нечетких множеств из входящего множества высказываний X в нечеткие множества из множества высказываний Y на выходе системы.

Нечеткие IF-THEN-правила выглядят следующим образом:

$R^{(p)}$: IF x_1 есть F_1^p и . . . и x_n есть F_n^p THEN y есть G^p , (1)

где F_i^p и G^p - нечеткие множества; $\bar{x} = (x_1, \square, x_n)^T \in X$ и $y \in Y$ есть входные и выходная лингвистические переменные соответственно; $p=\overline{1,m}$.

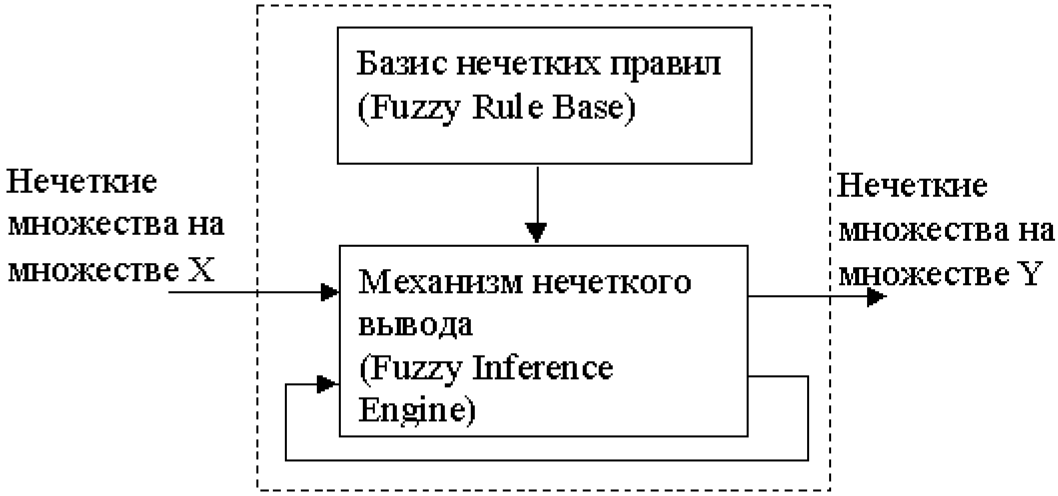


Рисунок 5 - Простая система нечеткой логики

Практика показывает, что эти нечеткие IF-THEN-правила обеспечивают удобный механизм для представления знаний человека-эксперта. Каждое нечеткое IF-THEN-правило определяет нечеткое множество $F_1^p \times \square \times F_n^p \rightarrow G^p$.

Наиболее общим принципом нечеткой логики, используемым в механизме нечеткого вывода, является композиция. Пусть A' есть произвольное нечеткое множество из X и пусть A' является входом простой системы нечеткой логики, представленной на рисунке 5. Тогда выход, определяемый каждым нечетким IF-THEN-правилом, есть нечеткое множество A' $\circ R^{(p)}$ в Y с функцией принадлежности

$$\mu_{A'\circ R^{(p)}}(y) = \sup_{\bar{x}\in X}(\mu_{A'}(\bar{x}) \otimes \mu_{F_1^p\times\ldots\times F_n^p\to G^p}(\bar{x},y))$$

где оператор "$\oplus$" есть одна из T-норм.
Окончательный выход простой системы нечеткой логики есть нечеткое множество A' $\circ$ ($R^{(p)}$,□$R^{(M)}$) в Y, которое является комбинацией M нечетких множеств, так что

$$\mu_{A'\circ(R^{(1)},\ldots,R^{(M)})}(y) = \mu_{A'\circ R^{(1)}}(y) \oplus \ldots \oplus \mu_{A'\circ R^{(M)}}(y)$$

где оператор "$\oplus$" есть одна из T-конорм.
Если присутствует обратная связь, как показано на рисунке 5, то мы имеем так называемую нечеткую динамическую систему, т.е. простую систему нечеткой логики, у которой входы зависят от ее выходов.
Структура простой системы нечеткой логики является существенной частью систем нечеткой логики. В общем случае, когда лингвистическая информация от эксперта переводится в количественные показатели, принципы нечеткой логики используются для систематизации информации. Главным недостатком простых систем нечеткой логики является то обстоятельство, что ее входы и выходы - нечеткие множества, тогда как в большинстве технических систем входы и выходы являются переменными, принимающими реальные значения.
Нечеткие системы Такаги и Суджено. Вместо рассмотрения нечетких IF-THEN-правил в виде (1) Такаги и Суджено предложили использовать следующие IF-THEN-правила: $L^{(p)}$: IF x_1 есть F_1^p и . . . и x_n есть F_n^p THEN $y^p = C_0^p + C_1^p\, x_1 +. . .+ C_n^p\, x_n$, где F_i^p - нечеткие множества; C_i - параметры, принимающие реальные значения; y^p - выход системы, соответствующий правилу $L^{(p)}$; $p=\overline{1,M}$.
Таким образом, они рассматривали правила, у которых часть IF является нечеткой, но "четкой" является часть THEN, и выход является линейной комбинацией переменных на входе. Для входного вектора вещественных переменных $\bar{x}= (x_1, □ , x_n)^T$ выход $y(\bar{x})$ нечеткой системы Такаги-Суджено есть взвешенное среднее от y^p-х:

$$y(\bar{x}) = \frac{\sum_{p=1}^{M} w^p y^p}{\sum_{p=1}^{M} w^p}$$

где вес w^p подразумевает обобщенную величину истинности при применении к входу правила $L^{(p)}$ и вычисляется как

$$w^p = \prod_{i=1}^{n} \mu_{F_i^p}(x_i)$$

Конфигурация нечеткой системы Такаги-Суджено представлена на рисунке 6.

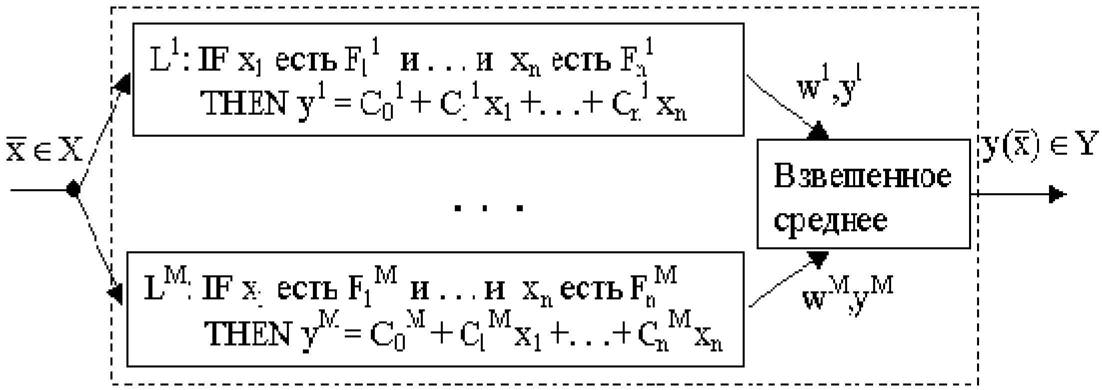


Рисунок 6 - Система нечеткой логики Такаги-Суджено

Преимуществом систем нечеткой логики такого типа является то, что они описываются компактной системой уравнений. Для них могут быть легко разработаны методы оценки параметров и выбора порядка системы M. Слабое место таких систем нечеткой логики заключается в том, что часть THEN в IF-THEN-правиле не является нечеткой, что не позволяет естественным образом получать нечеткие правила от человека-эксперта. Наибольшее распространение получили системы следующего вида.

Системы нечеткой логики с фаззификатором и дефаззификатором. Для того, чтобы использовать рассмотренные выше простые системы нечеткой логики в технических приложениях, когда входы и выходы систем принимают реальные значения, наиболее простым путем является добавление фаззификатора ко входу и дефаззификатора к выходу простой системы нечеткой логики.

Базовая конфигурация системы нечеткой логики с фаззификатором и дефаззификатором представлена на рисунке 7.

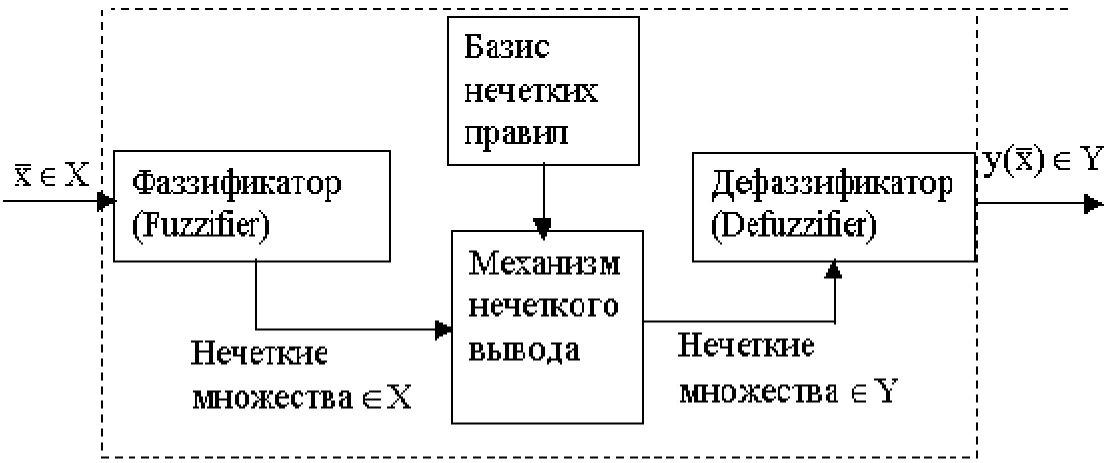


Рисунок 7 - Система нечеткой логики с фаззификатором и дефаззификатором

Фаззификатор отображает "четкую" точку (или значение переменной) из X в нечеткие множества из X. Дефаззификатор отображает нечеткие множества из Y в четкое значение выхода. Базис нечетких правил и механизм нечеткого вывода остаются такими же, как в простых системах нечеткой логики.

Системы нечеткой логики с фаззификатором и дефаззификатором имеют несколько привлекательных черт:

во-первых, они пригодны для использования в технических системах, так как их входные и выходные переменные принимают реальные значения;

во-вторых, они предоставляют возможность естественного перехода от заключений эксперта к нечетким IF-THEN-правилам;

в-третьих, они предоставляют большую свободу в выборе фаззификатора, механизма нечеткого вывода и дефаззификатора, т.е. можно подобрать систему нечеткой логики,

наиболее подходящую для решения конкретной задачи;
в-четвертых, могут быть разработаны различные алгоритмы настройки таких систем нечеткой логики, что позволяет эффективно объединять численную и лингвистическую информацию.

Базис нечетких правил. Базис нечетких правил состоит из набора нечетких IF-THEN-правил вида (1). Без потери общности можно рассматривать многовходовую систему нечеткой логики с одним выходом (MISO-систему), т.к. система со многими выходами (MIMO - система) может быть представлена как композиция группы систем, имеющих один выход.

Базис нечетких правил является основной частью системы нечеткой логики в том смысле, что остальные ее компоненты используются для интерпретации этих правил и их применения при решении конкретных задач. Практика показывает, что нечеткие IF-THEN-правила в форме (1) предоставляют удобный механизм человеку-эксперту для выражения своих знаний.

Механизм нечеткого вывода. В механизме нечеткого вывода принципы нечеткой логики используются для объединения нечетких IF-THEN-правил из базиса нечетких правил в отображение входных нечетких множеств из X= $X_1 \times \ldots \times X_n$ в выходные нечеткие множества из Y. Встает вопрос, как интерпретировать нечеткие IF-THEN-правила, заданные в виде (1)?

Нечеткое IF-THEN-правило вида (1) интерпретируется как нечеткая импликация $F_1^p \times \ldots \times F_n^p \to G^p$. Пусть нечеткое множество A' из X является входом механизма нечеткого вывода. Тогда каждое нечеткое IF-THEN-правило определяет нечеткое множество B^p из Y, используя композицию операторов sup и $\oplus$(где оператор $\oplus$ есть t-норма), т.е.

$$\mu_{B^p}(y) = \sup_{\bar{x} \in X}[\mu_{F_1^p \times \ldots \times F_n^p \to G^p}(\bar{x}, y) \otimes \mu_{A'}(\bar{x})] \quad (2)$$

Понятно, что возможны различные интерпретации нечеткой импликации в зависимости от того, какие t-нормы и t-конормы будут использованы.

Для входа A' выход механизма нечеткого вывода может принимать две формы:

1) M нечетких множеств B^p, $p = \overline{1, M}$ в виде (2), каждое из которых определено нечетким IF-THEN-правилом в виде (1);

2) одним нечетким множеством B', которое является объединением M нечетких множеств B^p, так что

$$\mu_{B'}(y) = \mu_{B^1}(y) \oplus \ldots \oplus \mu_{B^M}(y)$$

где оператор $\oplus$ есть t-конорма.

Таким образом, для каждого входа выход механизма нечеткого вывода может быть либо набором из M нечетких множеств, либо объединением M нечетких множеств. Для различных типов выходов используются различные типы дефаззификаторов, чтобы преобразовать выходные нечеткие множества в единственную точку в выходном пространстве Y.

Фаззификаторы. Фаззификатор выполняет преобразование "четкой" точки $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in X$ в нечеткое множество A' из X. Существует, по крайней мере, два возможных выбора такого преобразования:

1) однозначный фаззификатор: A' - нечеткое множество, такое, что $\mu_{A'}(\bar{x}') = 1$, если $\bar{x}' = \bar{x}$, и $\mu_{A'}(\bar{x}') = 0$ для всех остальных $\bar{x}' \in X$, для которых $\bar{x}' \neq \bar{x}$;

2) неоднозначный фаззификатор: A' - нечеткое множество, такое, что $\mu_{A'}(\bar{x}' = \bar{x}) = 1$ и $\mu_{A'}(\bar{x}')$ уменьшается от 1 с удалением $\bar{x}'$ от $\bar{x}$, например:

$$\mu_{A'}(\overline{x}') = \exp[-\frac{(\overline{x}'-\overline{x})^T(\overline{x}'-\overline{x})}{\sigma^2}]$$

где σ^2 есть параметр, характеризующий форму $\mu_{A'}(\overline{x}')$. В обычных приложениях используется однозначный фаззификатор. Неоднозначный фаззификатор может быть полезен в тех случаях, когда на вход системы накладывается дополнительный шум, или когда информация о величине на входе носит вероятностный характер.

Дефаззификаторы. Дефаззификатор выполняет переход от нечетких множеств из Y к четкой точке $y \in Y$. Существует, по крайней мере, несколько возможных выборов такого перехода.

Для системы, выходом которой является одно нечеткое множество, существуют следующие типы дефаззификаторов:

1. Дефаззификатор по максимуму определяется следующим образом:

$$y = \arg\sup_{y \in Y}(\mu_{B'}(y))$$

где $\mu_{B'}(y)$ определяется из уравнения (3). Если максимум не один, то в этом случае возможны модификации с выбором крайнего правого или крайнего левого максимума или использованием другого критерия, например, среднего арифметического из максимумов $y = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i^{max}$, где m - количество максимумов.

2. Дефаззификатор по центру тяжести. В качестве выходного значения принимается значение y, соответствующее центру тяжести фигуры, ограниченной функцией принадлежности $\mu_{B'}(y)$ и осью абсцисс:

$$y = \frac{\int_Y y\mu_{B'}(y)dy}{\int_Y \mu_{B'}(y)dy}$$

где $\mu_{B'}(y)$ определяется уравнением (3). Модификацией метода центра тяжести является метод, когда интегрирование происходит только в областях, где $\mu_{B'}(y)$ > α, α есть параметр от 0 до 1.

Для системы, выходом которой является набор из M нечетких множеств, существуют следующие типы дефаззификаторов:

1. Дефаззификатор по центральному среднему определяется следующим образом:

$$y = \frac{\sum_{p=1}^{M} \hat{y}^p(\mu_{B^p}(\hat{y}^p))}{\sum_{p=1}^{M} \mu_{B^p}(\hat{y}^p)}$$

где $\hat{y}^p$ есть центр нечеткого множества G^p, т.е. точка в Y, в которой $\mu_{G^p}(y)$ принимает максимальное значение, и $\mu_{B^p}(y)$ определяется из уравнения (2).

2. Модифицированный дефаззификатор по центральному среднему:

$$у = \frac{\sum_{p=1}^{M} \hat{y}^p (\mu_{B^p}(\hat{y}^p)/\delta^p)}{\sum_{p=1}^{M} \mu_{B^p}(\hat{y}^p/\delta^p)}$$

где δ^p - параметр, характеризующий форму $\mu_{G^p}(y)$, так что чем уже форма $\mu_{G^p}(y)$, тем меньше δ^p.

Пример системы нечеткой логики

Рассмотрим использование систем нечеткой логики для реализации функций принятия решения на межцеховом уровне машиностроительного предприятия на примере функции "принятие оптимального плана".

Задача принятия оптимального плана заключается в выборе номенклатуры выпускаемых изделий таким образом, чтобы целевая функция $F(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i$ где x_i - i-е изделие; P_i - планируемая прибыль от реализации i-го изделия, принимала максимальное значение. На эту формулу накладываются ограничения, связанные с производственными мощностями предприятия.

Данная формула описывает идеальную ситуацию, когда все заказчики той или иной продукции обладают стопроцентной платежеспособностью. Реальная жизнь вносит свои коррективы, и формула для вычисления целевой функции приобретает следующий вид:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} k_i x_i P_i$$

где k_i - коэффициент платежеспособности заказчика. Понятно, что платежеспособность является вполне нечетким понятием и определение коэффициента платежеспособности предприятия является сложной задачей принятия решения. В современных условиях российской экономики платежеспособность предприятия определяется не только наличием денежных средств на банковском счету или возможностью их своевременного привлечения из других источников, но и наличием изделий или материалов, способных заинтересовать предприятие-поставщика в качестве так называемого "бартера".

В связи с этим функция принятия решения по заданию коэффициента платежеспособности была реализована представленной на рисунке 8 системой нечеткой логики с двумя входами, одним выходом и тремя правилами. Входами системы являются экспертные балльные оценки наличия денег на счету заказчика и наличия интересующего предприятие бартера. Минимальное количество баллов (0) соответствует абсолютной уверенности дающего оценку эксперта в том, что заказчик не имеет на счету денежных средств и не сможет их вовремя привлечь для оплаты поставляемых ему изделий, а имеющийся в его распоряжении бартер абсолютно не нужен предприятию. Максимальное количество баллов (10) соответствует обратному положению вещей. Оценки о наличии денежных средств и полезности бартера выносятся разными специалистами. Оценка наличия денежных средств на счету заказчика производится специалистами отдела собственной безопасности предприятия и осуществляется по косвенным признакам. Полезность бартера оценивают специалисты из отдела снабжения.

Выходом системы нечеткой логики является значение коэффициента платежеспособности, который принимает значения от 0 до 1.

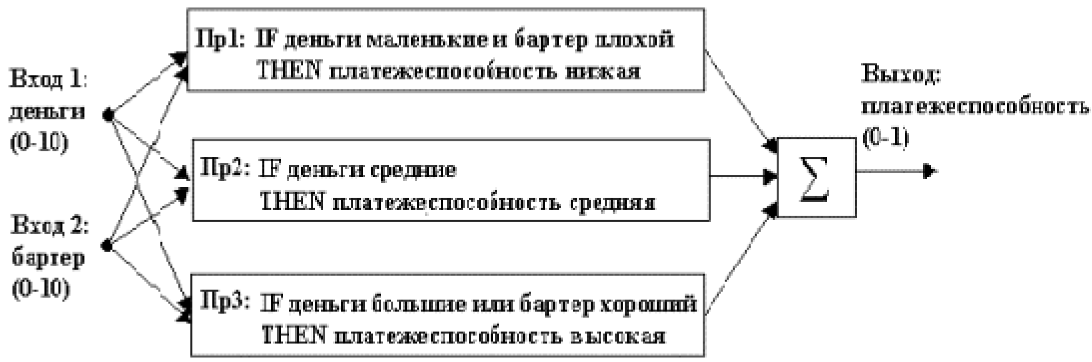


Рисунок 8

Система работает следующим образом. Информационный поток движется слева направо, от двух входов к одному выходу. Параллельная природа выполнения правил является одним из важных аспектов систем нечеткой логики. Вместо резкого переключения между моделями (правилами) в точках перехода получается гладкий переход от области, в которой поведение системы описывается одним правилом, к области, где оно описывается другим правилом.

Для входов системы определены соответствующие им нечеткие множества и заданы определяющие эти множества функции принадлежности. В данном случае входы задаются на множестве чисел (баллов) от 0 до 10. Экспертом, принимавшим участие в построении системы нечеткой логики, были заданы три правила, использующие нечеткие множества, и определены функции их принадлежности. Для наличия денег на счету заказчика (переменная "деньги") - это нечеткие множества "маленькие", "средние" и "большие", для переменной "бартер" - "плохой" и "хороший", для переменной "платежеспособность" - "низкая", "средняя" и "высокая".

Прежде чем применить тот или иной метод импликации, необходимо учитывать вес правила. Каждое правило может иметь свой вес (число от 0 до 1) в зависимости от того, насколько это правило является важным. Вес правила накладывается на выход IF-части. В данном случае все правила приняты равноценными, и вес каждого правила равен 1.

Метод импликации определяется как формирование вывода из правила на основе заданных условий. Входом процесса импликации является число, полученное из условий (степень истинности условия), а выходом - нечеткое множество. Для данной системы нечеткой логики был выбран самый простой и хорошо себя зарекомендовавший метод импликации по минимуму.

В случае, когда несколько правил работают параллельно, необходимо объединить (агрегатировать) нечеткие множества, представляющие выходы отдельных правил, в одно нечеткое множество для подготовки к заключительному шагу - дефаззификации. Входом процесса агрегатирования является набор нечетких множеств, полученных из каждого правила путем импликации. Его выходом является одно нечеткое множество для каждой выходной переменной. В данном случае для агрегатирования нечетких множеств используется операция объединения.

На рисунке 9 показана общая схема предлагаемой системы нечеткой логики.

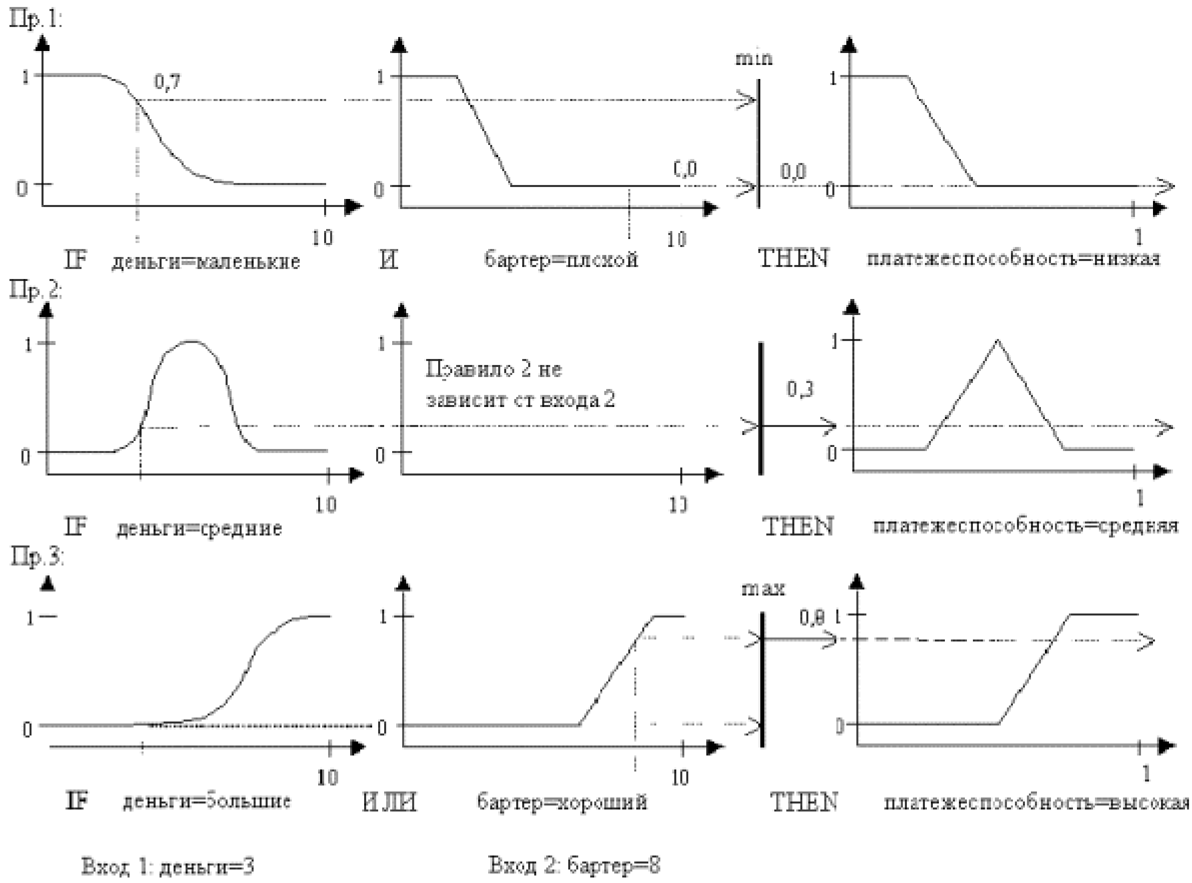


Рисунок 9

Заметим, что так как методы агрегатирования являются коммутативными (что должно выполняться всегда), то порядок, в каком стоят правила, не имеет значения. Для иллюстрации работы системы на рисунке 9 заданы входы "деньги=3" и "бартер=8". Выходом операции агрегатирования для заданных входов является нечеткое множество с функцией принадлежности, представленной на рисунке 10. Дефаззификация выходного нечеткого множества методом центра тяжести дает для приведенного примера выходное значение коэффициента платежеспособности 0,8. Заметим, что все нечеткие множества заданы на соответствующих множествах. Для денег и бартера - на множестве баллов от 1 до 10, для коэффициента платежеспособности - на непрерывном множестве от 0 до 1.

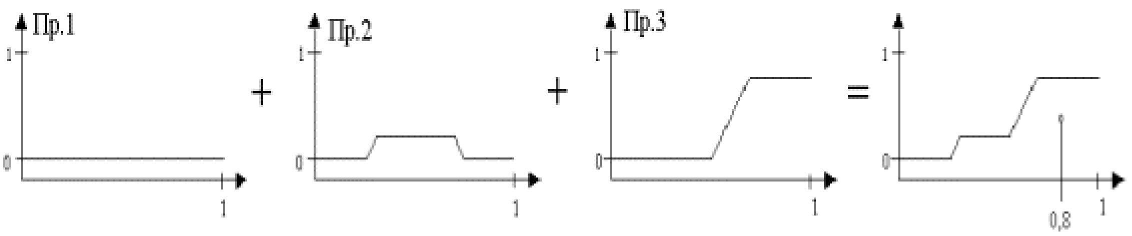


Рисунок 10

3 Порядок выполнения работы

3.1 Изучите список команд приложения FUZZY к пакету MATLAB и порядок работы с ними (приложение A).

3.2 Просмотрите демонстрационные примеры работы с приложением FUZZY (команда fisdemo).

3.3 Постройте функции принадлежности различных типов, используя команды bell_1, bell_2, sigmoid, trapeze. Опишите, каким образом изменяется форма функций принадлежности в зависимости от изменения параметров этих функций.

3.4 Постройте функцию принадлежности нечеткого множества "высокие люди", представ-

ленную на рисунке 1. Используя функцию grademf, получите значения степени принадлежности этому множеству людей ростом 150, 155, ☐ , 210 см. Полученные результаты представьте в виде таблицы.
3.5 Для рассмотренного на рисунке 2, б примера, используя функции union и intersec, получите функции принадлежности нечетких множеств, являющихся объединением и пересечением заданных нечетких множеств А и В. Используя функции comple и not, получите дополнения для этих множеств.
3.6 Постройте функции принадлежности нечетких множеств, являющихся объединением II (III, IV) и пересечением II (III, IV) нечетких множеств А и В, используя описанные выше t-нормы и t-конормы (необходимо написать собственные подпрограммы).
3.7 Для рассмотренного примера использования систем нечеткой логики для реализации функций принятия решения (рисунки 8 - 10) напишите программу, реализующую данную систему нечеткой логики в пакете MATLAB, используя приложение FUZZY. Рассмотрите, каким образом значение на выходе системы нечеткой логики зависит от использования того или иного типа дефаззификатора.
3.8 Преобразуйте данную систему нечеткой логики к виду Такаги-Суджено и реализуйте ее в пакете ReSolver (приложение Б)

4 Контрольные вопросы

4.1 Что такое нечеткие множества? Дайте определение и приведите примеры нечетких множеств.
4.2 Какие логические операции с нечеткими множествами вы знаете?
4.3 Какие существуют системы нечеткой логики?
4.4 Какие вы знаете типы фаззификаторов и дефаззификаторов?

ПРИЛОЖЕНИЕ А
(обязательное)
ПРИЛОЖЕНИЕ FUZZY К ПАКЕТУ MATLAB
(разработка А.Лотфи)

Для общего ознакомления с приложением FUZZY к пакету MATLAB служит функция FISDEMO. Эта функция вызывает демонстрационные примеры работы с приложением FUZZY, т.е. примеры выполнения команд, а также примеры реализации отдельных прикладных задач. Функция FISDEMO вызывается путем введения ее названия в рабочей строке пакета MATLAB.
Далее приводятся в алфавитном порядке основные операторы с примерами их использования.
BELL-1: задает функцию принадлежности формы колокола с тремя параметрами a, b, c (по умолчанию 1, 1 и 0 соответственно).
[Y] = BELL-1 (X, a, b, c).
Возвращает матрицу Y того же размера, что и X, каждый элемент у обозначает степень принадлежности и вычисляется по следующей формуле: $y = \exp(-(((x-c)/a)^\wedge 2)^\wedge b)$
(знак ^ в среде МАТЛАБ обозначает возведение в степень).
BELL-2: задает функцию принадлежности формы колокола с тремя параметрами a, b, c (по умолчанию 1, 1 и 0 соответственно).
[Y] = BELL-2 (X, a, в, c).
Возвращает матрицу Y того же размера, что и X, каждый элемент у обозначает степень принадлежности и вычисляется по следующей формуле: $y = 1/(1+(((x-c)/a)^\wedge 2)^\wedge b)$.
CENTRE: эта функция возвращает центр матрицы нечетких величин B на множестве X . Центр C есть вектор с тем же числом элементов, что и количество функций принадлежности в B (количество рядов).
[C] = CENTRE(B,X).
Количество строк в B должно совпадать с размерностью X.

COMPLE: эта функция возвращает дополнение к функции принадлежности A. [дополнение A] = COMPLE(A).
Замечание: эта функция выполняет то же самое, что и функция NOT.
DEFZFIR: эта функция выполняет операцию дефаззификации, используя две наиболее удобные для практических целей стратегии:
среднее из максимумов и центр тяжести.
$[B_0]$ = DEFZFIR (B_p, X, N),
где B_p есть вектор функции принадлежности нечеткого множества на множестве X; N - селектируемая переменная, принимающая значения 1 или 2 и задающая соответственно метод центра тяжести или среднего из максимумов. По умолчанию N=1. Выходом является "четкое" значение B_0.
FZFIR: функция выполняет операцию фаззификации, т.е. трансформирует "четкое" значение A_0 в нечеткое множество A_p. Фаззификация может осуществляться с использованием пяти различных типов функций принадлежности.
[Ap] = FZFIR (1, X, a, b, A_0) (функция bell_1);
[Ap] = FZFIR (2, X, a, b, A_0) (функция bell_2);
[Ap] = FZFIR (3, X, s, t, A_0) (функция trapeze);
[Ap] = FZFIR (4, X, a, A_0) (функция sigmoid);
[Ap] = FZFIR (5, X, A_0), (однозначный фаззификатор),
где X - множество, на котором идет построение нечетких множеств.
GRADEMF: эта функция возвращает значения функций принадлежности, соответствующих каждому нечеткому множеству в X (ряды в матрице A) для четкого значения наблюдаемой величины A_0. Размерности A (количество строк) и X должны совпадать.
INTEGRAL: эта функция возвращает интегралы матриц нечетких значений B на множестве X. I есть вектор с тем же количеством элементов, что и количество функций принадлежности в B (число рядов).
[I] = INTEGRAL (B, X).
Число строк в B должно совпадать с размерностью X.
INTERSEC: функция вычисляет пересечение матриц нечетких значений A1 и A2, заданных на одном и том же множестве.
[A1$\cup$A2] = INTERSES (A1, A2).
Матрицы A1 и A2 - матрицы функций принадлежности. Выходом является функция принадлежности, соответствующая множеству - пересечению множеств A1 и A2.
MF_PANEL: эта функция открывает окно ручной настройки функций принадлежности. Вручную можно выбрать тип функции и подстраивать ее параметры. После закрытия окна ручной настройки параметры a, b, c, множество X, на котором задано нечеткое множество, и функция принадлежности y становятся доступными в рабочем пространстве среды MATLAB.
MFPLOT: эта команда используется, чтобы нарисовать график функции принадлежности, определенной матрицей нечетких значений A на множестве X, или в более общем плане - график правил, заданных базисом правил с максимум 4-мя входами и одним выходом.
MORELESS: эта функция возвращает функцию принадлежности, получаемую с помощью операции "более-менее A" над матрицей нечетких значений A.
[более-менее A] = MORELESS(A).
NOT: эта функция возвращает функцию принадлежности для множества "НЕ A", где функция принадлежности множества A задана матрицей нечетких значений A.
[не A] = NOT(A).
REASON: эта функция использует метод минимакса для матрицы нечетких значений A и вектора наблюдаемых значений A_p. Нечеткие множества A и A_p должны быть определены на одном и том же множестве (т.е. количество рядов в матрице A должно быть равно длине вектора A_p). Элементы выходного вектора W являются результатами применения метода минимакса к наблюдаемой величине A_p с каждым рядом матрицы A в отдельности.

[W] = REASON (A, A_p).
RULEBASE: эта функция используется для более легкого задания функций принадлежности в правилах с максимум 4-мя входами и одним выходом.
[A,B] = RULEBASE(N, X, a, b, c, M, Y,$\hat{a}$,$\hat{b}$,$\hat{c}$),
где X и Y - множества, на которых задаются нечеткие множества условий и следствия соответственно. Вид функции принадлежности для входа и выхода должен быть определен с помощью параметров N и M соответственно. Для N(M)=1 - это экспоненциальная гауссовская функция, N(M)=2 - гауссовская функция, N(M)=3 - трапецеидальная функция, N(M)=4 - сигмовидная функция. Параметры, соответствующие выбранному типу функции принадлежности, - это векторы a, b, c, $\hat{a}$,$\hat{b}$,$\hat{c}$. Длина этих векторов определяет количество правил в базисе правил.
SIGMOID: эта функция задает сигмоидальную функцию принадлежности с двумя параметрами a и c.
[Y] = SIGMOID (X, a, c).
Функция возвращает матрицу Y, одного размера с X, каждый элемент y которой соответствует степени принадлежности. По умолчанию a=1, c=0.
TRAPEZE: задает функцию принадлежности трапецеидальной формы.
[Y] = TRAPEZE (X, a, b, c),
где параметры a - наклон трапеции; b - величина плоского участка; c - центр трапеции. По умолчанию a=1, b=0, c=0.
UNION: функция вычисляет объединение матриц нечетких значений A1 и A2, задающих нечеткие множества на одном и том же множестве.
[A1 A2] = UNION (A1, A2).
Матрицы A1 и A2 - матрицы функций принадлежности. Выходом является матрица функции принадлежности объединения множеств A1 и A2.
VERY: эта функция возвращает функцию принадлежности, соответствующую операции "очень A" над матрицей функции принадлежности A.
[очень A] = VERY(A).