Глава 1

Введение

1.1. Сущность теории нечетких множеств

Традиционные математические методы предназначены для обработки точных данных, таких как «скорость автомобиля $v = 111$ км/ч». Представить такие данные графически можно с использованием так называемых одноточечных (одноэлементных) множеств (рис. 1.1).

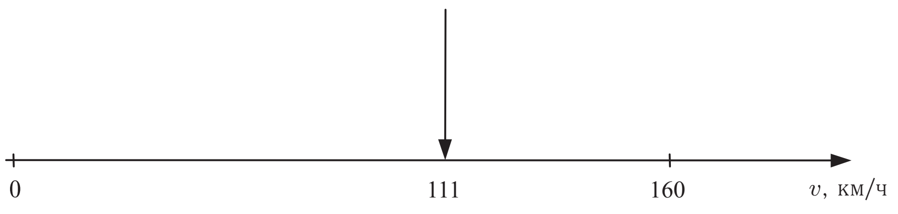


Рис. 1.1. Визуальное представление точного измерения скорости

Точные данные могут быть получены только с помощью высокоточных технических измерительных устройств, в то время как человек способен непосредственно оценивать скорость автомобиля, оперируя такими терминами, как «низкая», «средняя» и «высокая». Эти приближенные оценки также можно представить графически (рис. 1.2).

С помощью функций «низкая», «средняя» и «высокая», называемых **функциями принадлежности**, можно определить, является ли некоторое точное значение скорости соответственно низким, средним или

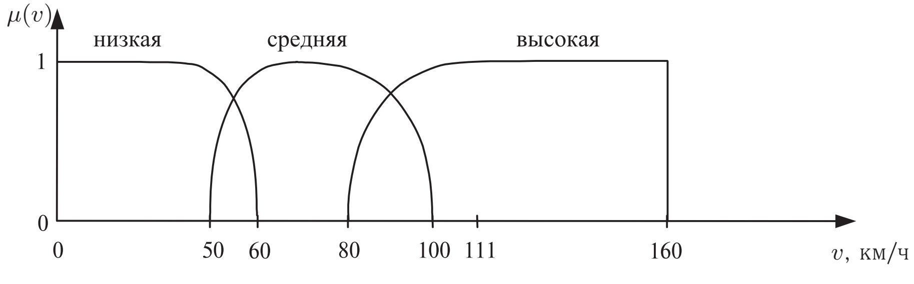


Рис. 1.2. Визуальное представление приближенных оценок скорости

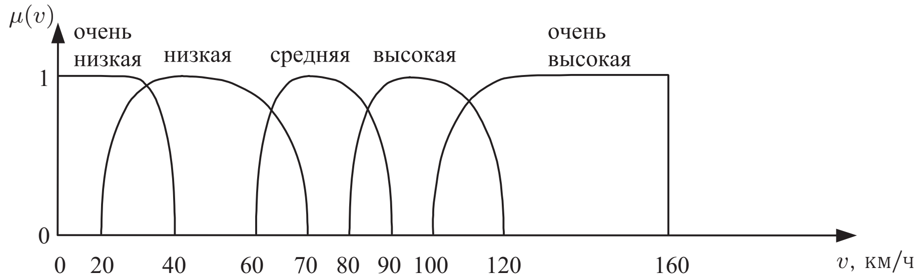


Рис. 1.3. Оценка скорости с использованием пяти информационных гранул

высоким. Человек, наблюдающий автомобиль, движущийся со скоростью v = 111 км/ч, не в состоянии оценить это значение точно, но приближенно он может оценить такую скорость как высокую (рис. 1.2).

О подобного рода оценках говорят как об **информационных гранулах** (Zadeh 1979, 1996). Если трех гранул («низкая», «средняя», «высокая») недостаточно, точность оценки скорости можно повысить, введя, например, 5 гранул — «очень низкая», «низкая», «средняя», «высокая», «очень высокая» (рис. 1.3). Точность оценки можно, наоборот, снизить, если использовать только две гранулы — «низкая» и «высокая». Степень гранулированности информации будет определяться потребностями и интеллектуальными способностями использующего ее человека, либо будет зависеть от контекста, в котором он ее использует.

Информация, получаемая от человека, обычно менее точна (более гранулирована), в то время, как информация от измерительных устройств является более точной (менее гранулированной). **Гранулированность информации** можно определить с помощью ширины гранулы (функции принадлежности), и таким образом гранула «средняя» может иметь различную ширину, зависящую от общего количества используемых человеком гранул (рис. 1.4). Как видно из рис. 1.4, уменьшение степени гранулированности дает в пределе **точку** (гранулу бесконечно малой ширины), которая и соответствует точно заданной информации — именно той, с которой оперируют традиционные математические методы.

Информация, представленная в виде гранул, имеющих конечную и ненулевую ширину, называется **нечеткой информацией** — автором данного термина является проф. Лотфи Заде, впервые исследовавший явление информационной гранулированности. Область математики, занимающаяся обработкой такой информации, была названа **теорией нечетких множеств** (Zimmerman 1994). Важнейшим направлением данной теории является **нечеткая логика**, применяемая в нечетком модели-

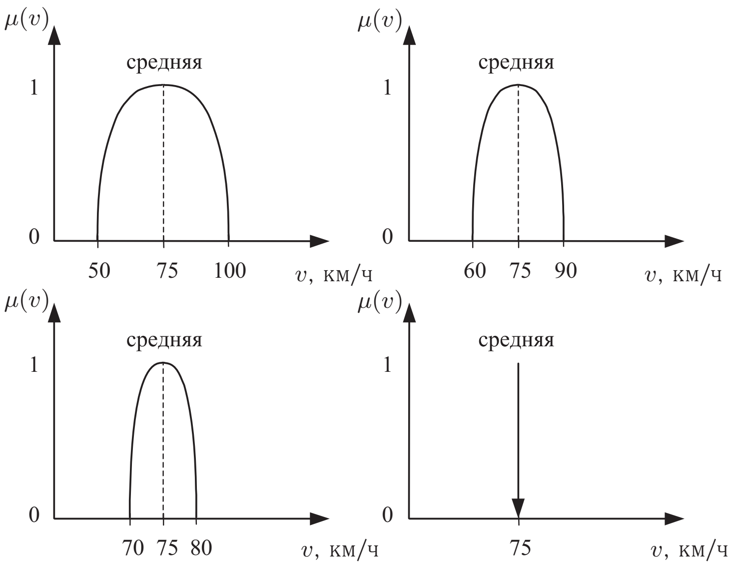


Рис. 1.4. Различная ширина информационной гранулы, соответствующей «средней» скорости

ровании и управлении. Укажем на новые возможности, появившиеся в научно-технических исследованиях благодаря теории нечетких множеств.

1. Возможность создания искусственного интеллекта, сходного с интеллектом человека, и его применения в автоматах и роботах. В настоящее время наблюдается устойчивая и даже растущая тенденция к получению в этом направлении результатов, свидетельствующих о том, что для ряда конкретных приложений искусственный интеллект превосходит человеческий по объему и скорости обработки информации.

2. Создание компьютеров, программируемых с помощью естественного языка (Zadeh 1996). Применение таких компьютеров в автоматах и роботах делает возможным управление ими и «общение» с ними на естественном языке с использованием нечетких понятий. В настоящее время имеются устройства, способные распознавать ограниченное число слов и словосочетаний.

3. Использование информации любой степени гранулированности в задачах моделирования, управления, оптимизации и диагностики. Более высокая степень гранулированности может привести к сокращению объемов обрабатываемой и хранимой информации и к повышению быстродействия алгоритмов.

4. Возможность подстройки уровня гранулированности информации под требуемую точность моделирования, управления, оптимизации, диагностики и т. д. Такая подстройка выполняется человеком, как показано на рис. 1.5–1.7.

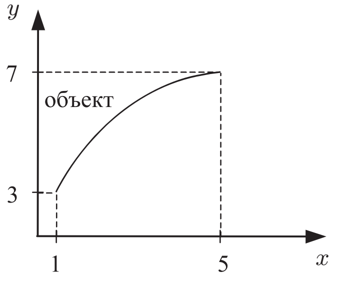
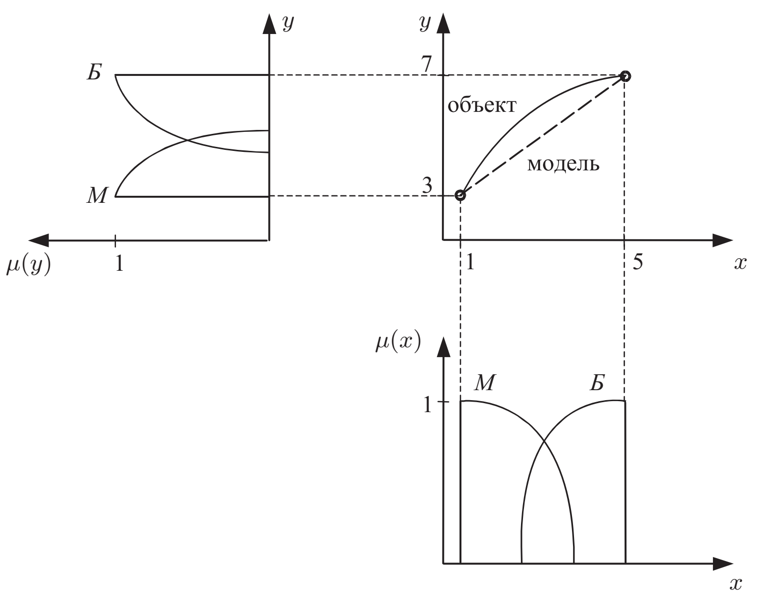


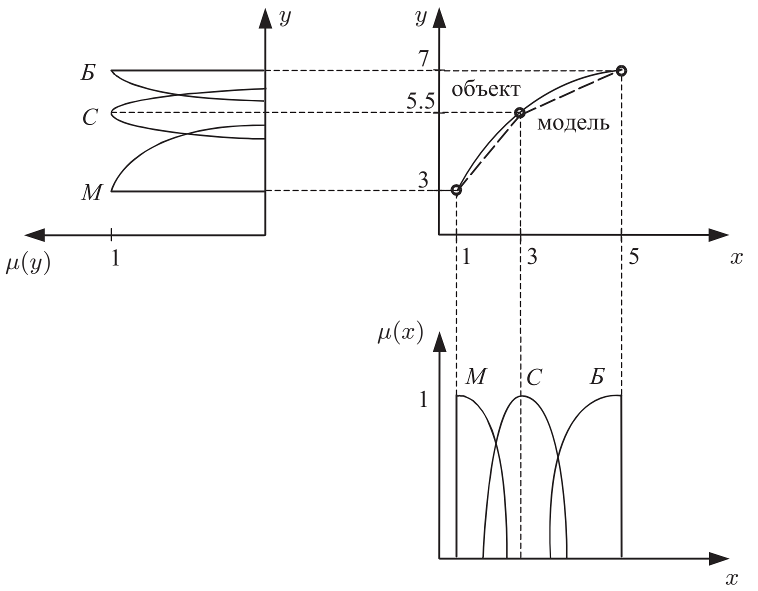
Рис. 1.5. Зависимость выхода от входа для объекта управления

Предположим, что на первом этапе управления объектом взаимосвязь между входными и выходными параметрами которого представлена на рис. 1.5, принимаются во внимание только предельные состояния объекта и на основе этого формируется модель, основанная на двух правилах (рис. 1.6). Для определенности, под моделью объекта будем понимать некоторое его приближенное представление, обладающее необходимой точностью.



$R1$:	ЕСЛИ	(значение x малое)	ТО	(значение y малое)
$R2$:	ЕСЛИ	(значение x большое)	ТО	(значение y большое)

Рис. 1.6. Модель объекта, основанная на двух информационных гранулах: «малое» и «большое»



$R1$:	ЕСЛИ	(значение x малое)	ТО	(значение y малое)
$R2$:	ЕСЛИ	(значение x среднее)	ТО	(значение y среднее)
$R3$:	ЕСЛИ	(значение x большое)	ТО	(значение y большое)

Рис. 1.7. Модель объекта, основанная на трех информационных гранулах: «малое», «среднее» и «большое»

Если точность модели, представленной на рис. 1.6, является недостаточной, будем пытаться повысить ее, дополнительно принимая во внимание наиболее существенное (Babuška 1995b) промежуточное состояние (рис. 1.7), тем самым задавая еще одно правило, определяющее поведение объекта, и приходя в итоге к новым, более мелким информационным гранулам. Более того, если модель, представленная на рис. 1.7, все еще имеет недостаточную точность, можно рассмотреть другие существенные состояния объекта и тем самым уменьшить гранулированность информации, увеличить число вербальных правил, характеризующих поведение объекта, и получить таким образом более точную модель.

Как показали исследования по психологии (Kruse 1994), человек со средними способностями в состоянии одновременно хранить в памяти от 5 до 9 характеристик объекта, и по этой причине для описания любого параметра используется не более, чем 5–9 информационных гранул. Заметим, что в общем случае, при управлении летательными аппаратами, другими средствами передвижения и объектами, а также при решении множества повседневных задач такая гранулированность является вполне достаточной.

Компьютерные технологии обеспечивают возможность практического использования информации любой степени гранулированности, вследствие чего можно получать значительно более точные модели. Опыт моделирования реальных систем говорит о том, что практически всегда есть некоторый порог точности, превышение которого не дает особой пользы. Возникновение подобных ситуаций связано с определенными, имеющими место в сложных системах эффектами, охарактеризовать которые можно следующим образом.

1. Существование хаоса. Внутри ядра систем возникают активные возмущения, не поддающиеся измерению. Кроме того, об их существовании может быть даже не известно. Другими словами, в системах возможны неконтролируемые процессы. Влияние указанных факторов зависит от того, насколько они интенсивны, и может привести к непредсказуемым изменениям в системе, которые можно трактовать как хаотические.

2. Стремительный рост числа возможных решений. Увеличение сложности системы приводит к резкому возрастанию числа факторов, обусловливающих ее наблюдаемое поведение — этот эффект называется «комбинаторным взрывом» и его обычно невозможно учесть в математической модели. При формировании модели такой системы в нее следует включать лишь наиболее значимые факторы, влияющие на ее поведение. Это снижает сложность модели, но может привести к ошибке (из-за зоны нечувствительности модели), обусловленной не столь очевидными, но существенными факторами.

3. Невозможность точного измерения некоторых сигналов при работе с системой. При неточном измерении входных сигналов реальной системы, вычисляемые для нее выходные сигналы (выходная информация) даже в случае очень точной модели могут не соответствовать поведению реальной системы, известному из опыта.

Признавая существование описанных выше эффектов, основатель нечеткой логики проф. Л. Заде выдвинул утверждение, названное им **принципом несовместимости** (Zadeh 1973):

> «По мере возрастания сложности системы наша способность формулировать точные и при этом осмысленные утверждения о ее поведении уменьшается вплоть до некоторого порога, за пределами которого точность и смысл становятся практически взаимоисключающими характеристиками».

Точное моделирование с использованием очень малых информационных гранул возможно лишь в случае простых систем с малым числом входных величин. Для нетривиальных систем, особенно систем с большим количеством входов, приходится использовать информацию, представленную с помощью более крупных гранул — нечеткую информацию.

1.2. Развитие теории нечетких множеств

Теория нечетких множеств вызывает сегодня немалый интерес. По оценкам (Altrock 1993), в 1993 г. насчитывалось от 15 до 16 тыс. публикаций, связанных с этой тематикой. В 2000 г., на момент написания данной книги, число публикаций превысило 27 тыс. и продолжало интенсивно расти. Организуются научные конференции, возрастает количество промышленных приложений. Что же является причиной столь высокой популярности теории нечетких множеств в современной науке?

Начало развитию теории нечетких множеств положила основополагающая статья «Fuzzy Sets» («Нечеткие множества»), опубликованная профессором из США Лотфи Заде (Zadeh 1965), который впервые ввел понятие нечеткого множества, предложил идею и первую концепцию теории, которая давала возможность нечеткого описания реальных систем. Важнейшим направлением теории нечетких множеств является **нечеткая логика** (Zimmermann 1994a), применяемая для управления системами, а также в экспериментах по формированию их моделей.

В 60-е годы начался период быстрого развития компьютеров и цифровых технологий на базе двоичной логики. В то время считалось, что использование данной логики позволит решать многие научные и технические проблемы. По этой причине появление нечеткой логики оставалось почти незамеченным, несмотря на всю ее концептуальную революционность. Тем не менее, важность нечеткой логики была осознана рядом представителей научного сообщества и она получила развитие, а также практическую реализацию в рамках различных промышленных приложений. Через некоторое время стал повышаться интерес к ней и со стороны научных школ, объединявших приверженцев технологий на основе двоичной логики. Это произошло из-за того, что обнаружилось достаточно много практических задач, которые не поддавались решению с помощью традиционных математических моделей и методов, несмотря на существенно возросшие доступные скорости реализации вычислений. Требовалась новая методология, характерные черты которой предстояло найти в нечеткой логике.

Подобно робототехнике, нечеткая логика была с бóльшим интересом встречена не в стране своего происхождения, США, а за ее пределами, и как следствие этого, первый опыт промышленного использования нечеткой логики — для управления котельными установками электростанций (Assilian 1974) — связан с Европой. Все попытки использовать для управления паровым котлом традиционные методы, порой весьма замысловатые, оканчивались неудачей — настолько сложной оказалась эта нелинейная система. И только применение нечеткой логики позволило синтезировать регулятор, который удовлетворял всем требованиям. В 1976 г. нечеткая логика была положена в основу системы автоматического управления карусельной печью в производстве цемента (Mamdani 1977). И тем не менее, первые практические результаты применения нечеткой логики, полученные в Европе и Америке, не вызвали какого-либо значительного повышения интереса к ней. Точно так же, как было с робототехникой, страной, которая первой начала повсеместное внедрение нечеткой логики, осознав ее огромный потенциал, стала Япония (Bellon 1992).

Среди созданных в Японии прикладных нечетких систем наибольшую известность получила разработанная компанией Hitachi система управления поездами метрополитена в г. Сендай. Реализация проекта велась с участием опытного машиниста, знания и опыт которого легли в основу разработанной модели управления. Система автоматически снижала скорость поезда при подъезде его к станции, обеспечивая остановку в требуемом месте. Еще одним преимуществом поезда была его высокая комфортабельность, обусловленная плавностью набора и снижения скорости (Abel 1991). Имелся и целый ряд других преимуществ по сравнению с традиционными системами управления.

Тестирование и совершенствование системы управления продолжалось в течение двух лет. Эти усилия были нацелены на проверку нового метода управления и обеспечение максимальной безопасности пассажиров. О том, что данный проект можно считать успешным, свидетельствует тот факт, что спустя 12 месяцев разработку своих собственных приложений с использованием нечеткой логики вели уже 50 крупных японских компаний. В 1991 г. вклад Японии в мировое производство продукции, использующей нечеткую логику, исчислялся миллиардами долларов — в абсолютных величинах это составляло 80% (по данным Market Intelligence Research). Начиная с 1989 г. в Японии было создано не менее 5 научных сообществ, связанных с нечеткой логикой, среди которых:

1. Лаборатория Международных нечетких технических исследований (Laboratory for International Fuzzy Engineering Research — LIFE).
2. Японское Сообщество теории нечетких множеств и нечетких систем (Japan Society of Fuzzy Theory and Systems — SOFT).

3. Ассоциация биомедицинских нечетких систем (Biomedical Fuzzy Systems Association — BMFSA).
4. Институт систем нечеткой логики Иидзука (Fuzzy Logic Systems Institute Iizuka — FLSI).
5. Центр развития нечеткой логики (Center for Promotion of Fuzzy Logic).

С 1986 г. функционирует Японское отделение международной организации IFSA (International Fuzzy Systems Association — Международная ассоциация нечетких систем).

Среди перечисленных организаций наиболее известна лаборатория LIFE, созданная Министерством международной торговли и промышленности Японии совместно с рядом крупных промышленных предприятий, среди которых Honda, Kawasaki Steel, Tokyo Electric и др. (общее их число в 1991 г. составляло 49). Целью деятельности данной лаборатории является разработка нечетких методов для нужд промышленности, торговли, поддержки принятия решений (например, в области валютных операций) и т. д. В состав LIFE вошли лучшие специалисты в области нечеткой логики из японских университетов и промышленных компаний. Помимо этого, финансовую поддержку лаборатории осуществляет ряд крупных компаний за пределами Японии, среди которых Bosh, Zeiss, Siemens, Audi, Volkswagen. Спонсоры LIFE посылают в нее своих инженеров для прохождения стажировок и выполнения исследований под руководством специалистов.

Быстрое развитие нечеткой логики в Японии привело к тому, что ее практические приложения появились не только в промышленности, но и в производстве товаров народного потребления. Примером здесь может служить видеокамера, оборудованная нечеткой подсистемой стабилизации изображения (Abel 1991), применявшейся для компенсации колебаний изображения, вызванных малоопытностью оператора. Данная задача была слишком сложной для решения ее традиционными методами, поскольку требовалось отличать случайные колебания изображения от целенаправленного перемещения объектов съемки (например, движения людей). Другим примером является автоматическая стиральная машина, управляемая одним нажатием кнопки (Zimmerman 1994). Подобная «целостность» вызвала интерес и была встречена с одобрением. Использование методов нечеткой логики позволило оптимизировать процесс стирки, обеспечивая автоматическое распознавание типа, объема и степени загрязненности одежды, не говоря уже о том, что сведение механизма управления машиной к одной единственной кнопке позволило значительно упростить обращение с ней. Изобретения в области нечеткой логики были воплощены японскими фирмами и во многих других устройствах, среди которых микроволновые печи (Sanyo), антиблокировочные системы и автоматические коробки передач (Nissan), интегрированное управление динамическими характеристиками автомобиля (INVEC), а также регуляторы жестких дисков в компьютерах, обеспечивающие уменьшение времени доступа к информации.

Находясь в авангарде исследований в сфере приложений нечеткой логики, японские инженеры получили в данной области огромное количество патентов. Только компания Omron из города Киото в 1993 г. владела более чем 700 патентами.

Массовое применение нечеткой логики в изделиях японской промышленности привлекло внимание во всем мире и особенно в Европе, где вызов лидерству Японии был брошен главным образом учеными и предпринимателями из Германии. В г. Аахен находится штаб-квартира европейской организации ELITE (European Laboratory for Intelligent Techniques Engineering Foundation), занимающейся разработкой и продвижением методов искусственного интеллекта, таких как нечеткая логика и нейронные сети, с упором на научные исследования в данных областях. Под ее эгидой проводится множество международных конференций, среди которых ежегодная Европейская конференция по искусственному интеллекту EUFIT (European Congress on Intelligent Techniques and Soft Computing — Европейский конгресс по интеллектуальным технологиям и мягким вычислениям).

Помимо упоминавшихся выше приложений, с начала 1990-х гг. наблюдается интенсивное развитие нечетких методов в рамках целого ряда прикладных областей, в том числе и не связанных с техникой. Чтобы дать читателю представление о возможностях нечеткой логики, перечислим некоторые из известных ее приложений.

- система управления электронным кардиостимулятором (Akaiwa 1990; Kitamura 1991; Sugiura 1991);
- система управления механическими транспортными средствами (Altrock 1992);
- водогрейные котлы (Bien 1992);
- химические реакторы и установки (Altrock 1995; Bork 1993; Hanakuma 1989; Häck 1997; Höhmann 1993; Kolios 1994; Roffeld 1991);
- системы охлаждения (Becker 1994; Hakata 1990);
- кондиционеры и вентиляционное оборудование (Tobi 1991; Watanabe 1990);
- оборудование для сжигания мусора (Altrock 1993; Fujiyoshi 1992; Ohnishi 1991);

- стеклоплавильная печь (Aoki 1990; Hishida 1992);
- система контроля кровяного давления (Arita 1990),
- диагностика опухолей (Arita 1991),
- диагностика текущего состояния сердечно-сосудистой системы (Altrock 1993),
- система управления подъемными и мостовыми кранами (Altrock 1993; Watanabe 1991),
- насосная станция (Chen 1992),
- обработка изображений (Fijiwara 1991; Franke 1994),
- быстродействующее зарядное устройство (Altrock 1993),
- распознавание слов (Fujimoto 1989),
- лечение диабета и контроль уровня сахара в крови (Jacoby 1994; Kageyama 1990),
- электроэнергетическая система (Hiyama 1991),
- оборудование для металлообработки (Hsieh 1994),
- управление биопроцессорами (Hanss 1994),
- отопительные приборы (Heider 1994),
- управление электродвигателями (Kawai 1990; Lee 1992),
- сварочное оборудование и процессы сварки (Murakami 1989; Reshuffled 1994),
- системы управления движением транспорта (Sasaki 1988; Voit 1994),
- биомедицинские исследования (Takahashi 1990),
- оборудование для уборки помещений (Yamashita 1992),
- оборудование для очистки от шлама (Yu 1990),
- водоочистные сооружения (Altrock 1995).

По теории нечетких множеств издан ряд книг, например (Altrock 1993,1995; Brown 1994; Bezdek 1981; Driankov 1993,1996; Gottwald 1993; Hung 1995; Kahlert 1994,1995; Knappe 1994; Kandel 1994; Kruse 1994; Kiendl 1997; Kaufmann 1985; Koch 1996; Kacprzyk 1986,1992,1997; Nguyen 1995; Pedrycz 1993; Rutkowska 1997; Tilli 1991; Wang 1994a; Yager 1994,1995; Zimmermann 1994a,1994b).

На рынке программного обеспечения имеется несколько продуктов, осуществляющих поддержку нечеткого моделирования и управления. Информацию о них можно найти в (Ader 1996; Baldwin 1995a; Koch 1996; Kuhn 1994; Krieger 1994; Krone 1996c).

В Польше исследования в области нечетких множеств ведутся с 1970-х гг. (Kacprzyk 1977,1978). Польскими учеными, внесшими существенный вклад в развитие данной теории в мире, являются профессора E. Czogala, J. Kacprzyk и W. Pedrycz (фамилии перечислены в алфавитном порядке).

И хотя теория нечетких множеств позволяет решать задачи, с которыми часто не справляются обычные методы, не следует считать ее «панацеей». Было бы ошибкой говорить о ней как о единственно возможной замене всех остальных подходов. Практика показывает, что применять нечеткую логику целесообразнее всего там, где остальные подходы до сих пор терпели неудачу (Altrock 1993), и следовать традиционным методам, если приемлемые результаты могут быть получены на их основе.

Глава 2

Основные понятия теории нечетких множеств

2.1. Нечеткие множества

Человек использует нечеткие множества для оценки и сравнения физических величин, состояний объектов и систем на приближенном, качественном уровне. Так, любой из нас способен оценить величину температуры, не прибегая к помощи термометра, а руководствуясь лишь собственными ощущениями и шкалой приближенных оценок, подобной тем, которые представлены на рис. 2.1.

Отметим, что качественная оценка имеет нечисловой характер, поскольку не обладает свойством аддитивности, присущим числам.

Пример. 1 см + 1 см = 2 см,
но: небольшая сумма денег + небольшая сумма денег =?

Результат подобной операции не всегда будет соответствовать большой сумме денег.

Понятия «небольшой» и «большой» суммы являются нечеткими и субъективными и зависят от смысла, вкладываемого в них в каждом конкретном случае. Поэтому качественные оценки нельзя складывать подобно тому, как это делается с числовыми величинами.

Рис. 2.1. Примеры качественных оценок, используемых человеком

Качественные оценки человек использует и тогда, когда средства точного измерения ему доступны. Например, несмотря на точные показания скорости на спидометре автомобиля, характеризуя свою поездку, водитель чаще всего говорит:

- «Я ехал очень быстро»,
- «Я ехал со скоростью примерно 100 км/ч»,
- «Я ехал со скоростью более 100 км/ч».

Если бы водитель попытался вспомнить точное значение скорости в каждый момент своей поездки, то это бы было, во-первых, практически невыполнимым, вследствие ограниченных возможностей человеческой памяти, а во-вторых, совершенно излишним, поскольку для человека бывает достаточным сделать грубую оценку, позволяющую избавиться от больших объемов ненужной информации, сосредоточившись на той, которая является наиболее существенной, и которую можно быстро обработать, чтобы принять необходимое решение.

В окружающем нас мире имеется большое число величин, которые нельзя оценить с помощью измерительных устройств, поскольку таких устройств просто не существует. К таким величинам относятся, например, женская красота, порядок в доме, опасность начала войны, шансы на успех в бизнесе и т. п. Но у каждого человека есть свои собственные, неизведанные или понятные лишь отчасти «измерительные устройства», позволяющие ему давать качественные оценки подобных величин и ситуаций, представляющихся настолько сложными, что с ними невозможно справиться средствами современной науки. Пользуясь подобным несовершенным, нечетким механизмом оценивания, люди отлично справляются с окружающей действительностью, приспосабливаются к ней, преобразуют ее, распознают (идентифицируют) существующие в ней системы, которыми управляют затем оптимальным или субоптимальным образом.

Качественно оценивая действительность, люди выработали у себя весьма совершенные логические и интеллектуальные способности, которыми робототехнические устройства не обладают, несмотря на непрекращающуюся интенсивную работу в этом направлении. По этой причине у ученых и инженеров возникла идея создания искусственного интеллекта, который имитировал бы человеческий интеллект и использовал сходные с ним подходы.

Важнейшее условие создания такого интеллекта состоит в том, чтобы перевести нечеткие, качественные оценки, применяемые человеком, на язык математики, понятный вычислительной машине. В результате станет возможным:

- преобразовывать четкие и точные показания приборов в форму качественных оценок, применяемых людьми, и использовать их в алгоритмах искусственного интеллекта, основанных на правилах, подобных тем, которые лежат в основе человеческих рассуждений,
- вводить в системы обработки информации, математические модели управляемых систем и алгоритмы управления величины, определить которые может только человек, например платежеспособность покупателя, вероятность сбора богатого урожая в данном году и др.

Видно, таким образом, что нечеткие, качественные оценки позволяют значительно расширить традиционные методы математического моделирования, требующие точной информации о входных величинах системы. Это становится возможным за счет использования информации о параметрах, ранее не учитываемых из-за отсутствия средств их измерения (т. е. вводятся гибридные модели, имеющие как четкие, так и нечеткие составляющие). Тем самым, нечеткие методы качественного оценивания следует рассматривать не как альтернативу, а как дополнение к точным техническим измерениям, позволяющее создать более полную картину или модель действительности.

Формализация качественных оценок может осуществляться на основе теории нечетких множеств. Понятие нечеткого множества появилось в научной литературе в 1965 г., благодаря работе ученого из США Лотфи Заде (Zadeh 1965), внесшего существенный вклад в развитие данной теории.

Рассмотрим далее основные понятия, связанные с нечеткими множествами.

- **Лингвистическая переменная**

Лингвистической переменной является переменная (которая может быть как входной или выходной, так и переменной состояния) с лингвистическими значениями, выражающими качественные оценки.

Примеры: скорость судна, электрическое напряжение, температура.

На практике для задания лингвистических переменных можно использовать не только лингвистические значения, но и нечеткие числа (Bertram 1994; Koch 1993), т. е. определенного рода комбинированный подход.

- **Лингвистическое значение**

Лингвистическое значение представляет собой значение лингвистической переменной, выраженное в словесной форме.

Примеры: очень большой отрицательный, средний отрицательный, средний положительный, очень большой положительный, старый, молодой, хороший, средний, приятный, неприятный, истинный, ложный.

Лингвистическое значение всегда присутствует в модели совместно со связанной с ним лингвистической переменной.

Примеры: высокое атмосферное давление, сильное течение, молодой возраст (человека), истинная информация, ложная информация.

- **Нечеткие числа**

Понятие нечеткого числа будет рассмотрено в главе 3.
Примеры нечетких чисел: около нуля, примерно 5, более (менее) 5, немного более 9, приблизительно между 10 и 12.

Оценка параметров системы с использованием лингвистических значений основана на восприятии человека и не требует технических измерительных устройств, в то время как при использовании с этой целью нечетких чисел подобные устройства необходимы. С помощью нечетких чисел можно обобщать большие объемы точных данных, являющихся результатами измерений или обращений к базам данных, например информацию о цене X_i на акции некоторой компании (рис. 2.2).

Данные, представленные на рис. 2.2 в точной (четкой) форме, можно обобщенно представить в виде нечеткого числа:
— «приблизительно в пределах между 9 и 11» или
— «около 10».

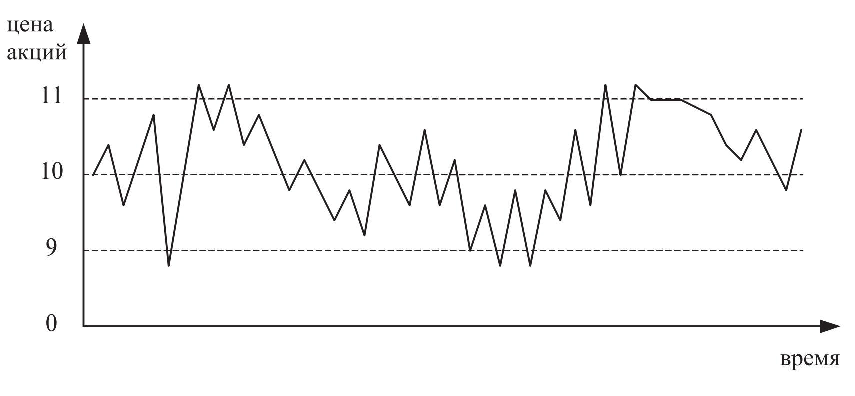


Рис. 2.2. Пример большого объема данных о точном значении параметра

На практике применяются смешанные наборы значений лингвистических переменных — см., например, (Abel 1991; Koch 1993). В частности, возможны шкалы следующего вида:

— отрицательный, **около нуля**, положительный,
— большой отрицательный, средний отрицательный, малый отрицательный, **около нуля**, малый положительный, средний положительный, большой положительный.

- **Лингвистическое терм-множество переменной**

Лингвистическим терм-множеством называется множество всех лингвистических значений, используемых для определения некоторой лингвистической переменной. Данное множество также называют базисным лингвистическим множеством (Bertram 1994), лингвистической предметной областью, либо лингвистической областью (пространством) значений. Для обозначения терм-множеств будем использовать прописные латинские буквы:

$$X_L = \{\textit{отрицательный},\ \textit{положительный}\} = \{x_{L1}, x_{L2}\},$$
$$Y_L = \{\textit{малый},\ \textit{средний},\ \textit{большой}\} = \{y_{L1}, y_{L2}, y_{L3}\}.$$

Лингвистическая область значений (лингвистический универсум) представляет собой конечное множество.

- **Область значений переменной**

Областью значений переменной является множество всех числовых значений, которые может принимать определенный параметр изучаемой системы, либо множество значений, существенных с точки зрения решаемой задачи (модели системы). Для области значений используются также следующие названия:

— пространство значений (пространство рассуждений) (Bertram 1994),
— поле значений (Abel 1991),
— пространство (Kacprzyk 1986; Yager 1994,1995),
— множество (Kacprzyk 1986),
— область значений (область рассуждений),
— предметная область (Yager 1994,1995),
— базисный диапазон (Knappe 1994),
— множество элементарных значений (Kruse 1994).

Слово «числовых» употреблено здесь, чтобы подчеркнуть отличие этих значений от лингвистических. Области значений переменных будем обозначать прописными латинскими буквами, например:

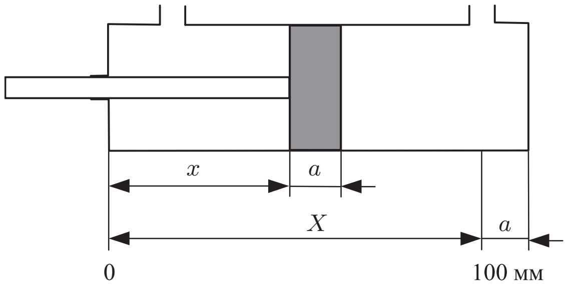


Рис. 2.3. Непрерывный числовой интервал значений позиции поршня x

$X = \{x\}$ — бесконечная (непрерывная) область,
$X = \{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\}$ — конечная, дискретная область.

Пример непрерывной области значений переменной приведен на рис. 2.3.
Пример дискретной области значений:

$$X = \{x_1 = -1,\ x_2 = -0.75,\ \ldots,\ x_8 = 0.75,\ x_9 = 1\}$$

- **Мощность числовой области значений**

Мощность числовой области значений (числовой предметной области) есть число содержащихся в ней элементов:

$$\|X\| = n. \tag{2.1}$$

- **Нечеткое множество**

Нечетким множеством A, определенным на некоторой числовой предметной области X, называется множество пар:

$$A = \{(\mu_A^*(x), x)\}\,, \quad \forall x \in X, \tag{2.2}$$

где для каждого элемента $x \in X$ степень μ_A^* его принадлежности множеству A задается с помощью функции принадлежности $\mu_A(x)$, при этом

$$\mu_A(x) \in [0, 1].$$

Функция принадлежности отображает числовую область значений X данной переменной на отрезок [0,1]:

$$\mu_A\colon X \to [0, 1].$$

Понятие нечеткого множества обеспечивает возможность математического представления качественных оценок, выражаемых людьми в форме лингвистических значений и нечетких чисел.

- **Мощность нечеткого множества**

Мощность нечеткого множества определяется как число содержащихся в нем пар $(\mu_A^*(x), x)$:

$$\|A\| = n.$$

Значение мощности нечеткого множества A совпадает со значением мощности его предметной области X.

- **Функция принадлежности и степень принадлежности**

Функция принадлежности ставит в соответствие каждому значению x заданной переменной некоторое число из интервала [0,1]:

$$\mu_A(x)\colon X \to [0, 1], \quad \forall x \in X. \tag{2.3}$$

Это число, называемое **степенью принадлежности**, характеризует степень, с которой элемент x принадлежит нечеткому множеству A. Функция принадлежности может быть задана в виде:
— графика (в непрерывном случае) или диаграммы (в дискретном случае),
— аналитического выражения (формулы),
— таблицы,
— вектора степеней принадлежности,
— суммы или интеграла.

При задании функции принадлежности с помощью формулы целесообразно ввести логическую переменную w, ограничивающую область значений переменной x:

$$w = \begin{cases} 1, & \text{если} -a \leqslant x \leqslant a, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases} \tag{2.4}$$

В этом случае функция принадлежности, представленная на рис. 2.4, допускает следующую форму записи:

$$\mu\,(x) = w\left(\frac{a - |x|}{a}\right). \tag{2.5}$$

Дискретная функция принадлежности может быть представлена в виде табл. 2.1.

Замечание. В качестве значений x в таблице могут выступать не только числа, но и какие-либо объекты, человеческие индивидуумы или абстрактные понятия. Например, таблица может содержать информацию о принадлежности различных компаний множеству A преуспевающих предприятий (табл. 2.2).

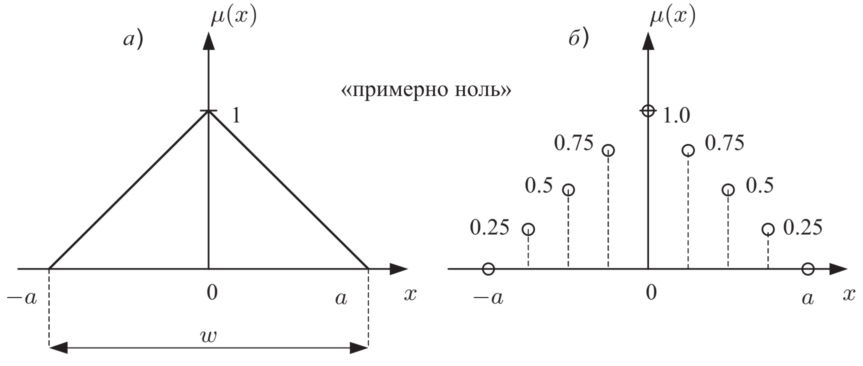


Рис. 2.4. Графическая форма задания непрерывной (*а*) и дискретной (*б*) функции принадлежности нечеткого числа «примерно ноль»

Таблица 2.1

Пример табличного задания функции принадлежности

$x \in X$	$x_1 = a$	$x_2 = -0.75a$	$x_3 = -0.5a$	$x_4 = -0.25a$	$x_5 = 0$
$\mu_A(x)$	0.00	0.25	0.5	0.75	1.00

$x \in X$	$x_6 = 0.25a$	$x_7 = 0.5a$	$x_8 = 0.75a$	$x_9 = a$
$\mu_A(x)$	0.75	0.5	0.25	0.00

Если порядок следования всех n элементов x_i области определения X фиксирован, то функция принадлежности может быть задана в виде вектора степеней принадлежности V_A:

$$V_A = \{\mu_A(x_1),\ \mu_A(x_2),\ \ldots,\ \mu_A(x_n)\}\,. \tag{2.6}$$

Пример. $V_A = \{0.00,\ 0.25,\ 0.50,\ 0.75,\ 1.00,\ 0.75,\ 0.50,\ 0.25,\ 0.00\}$.

Дискретное нечеткое множество также может быть записано в форме суммы (Zimmermann 1994a):

$$A = \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{x_2} + \ldots + \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_A(x_i)}{x_i}. \tag{2.7}$$

Таблица 2.2

Табличное задание функции принадлежности множества преуспевающих предприятий

$x \in X$	Компания 1	Компания 2	...	Компания $(n-1)$	Компания n
$\mu_A^*(x)$	0.4	0.5	...	1.00	1.00

Приведенная запись означает, что множество A представляет собой объединение (а не арифметическую сумму) пар $(\mu_A(x)/x)^*$.

Пример.

$$A = \frac{0.00}{-a} + \frac{0.25}{-0.75a} + \frac{0.50}{-0.5a} + \frac{0.75}{-0.25a} + \frac{1.00}{0} + \frac{0.75}{0.25a} + \frac{0.50}{0.5a} + \frac{0.25}{0.75a} + \frac{0.00}{a}.$$

Непрерывное нечеткое множество может быть записано в виде интеграла (Zimmermann 1994a):

$$A = \int\limits_X \frac{\mu_A(x)}{x}. \tag{2.8}$$

Приведенная запись означает, что нечеткое множество A представляет собой объединение континуума пар $(\mu_A(x)/x)$.

Пример. «Вещественные числа, близкие к нулю» (рис. 2.4).

$$A = \int\limits_X w\left(\frac{a-|x|}{a}\right)/x. \tag{2.9}$$

При записи функции принадлежности элементы x_i, степень принадлежности которых нулевая, как правило, опускаются.

- **Пустое нечеткое множество**

Нечеткое множество A, функция принадлежности $\mu_A(x)$ которого равна нулю на всей предметной области X, называется пустым и обозначается символом $\varnothing$:

$$\varnothing\colon \mu_\varnothing(x) = 0, \quad \forall x \in X. \tag{2.10}$$

- **Универсальное нечеткое множество**

Нечеткое множество, все элементы предметной области которого имеют степень принадлежности, равную 1, называется универсальным (Knappe 1994) и обозначается символом U:

$$U\colon \mu_U(x) = 1, \quad \forall x \in X. \tag{2.11}$$

Пустое $\varnothing$ и универсальное U множества соответствуют предельным случаям. Соотношение

$$\varnothing \leqslant A \leqslant U \tag{2.12}$$

справедливо для любого нечеткого множества A.

---

* Пару $\mu_A(x_i)/x_i$, $i = 1, \ldots, n$, $\mu_A(x_i) > 0$ можно рассматривать как одноэлементное нечеткое множество. Тогда A есть объединение таких множеств. В случае дискретного нечеткого множества A это утверждение имеет вид (2.7), где вместо традиционного знака $\bigcup$, соответствующего операции объединения множеств, принято использовать знаки $+$ и $\sum$. — *Прим. ред.*

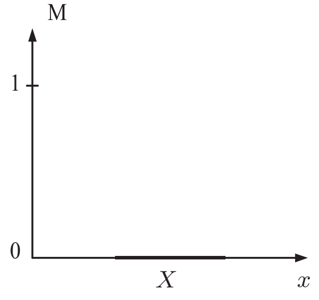


Рис. 2.5. Пустое нечеткое множество

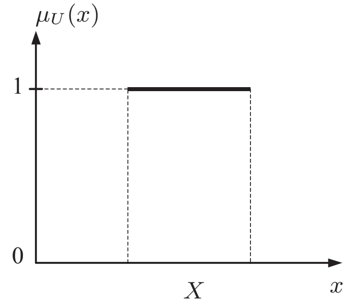


Рис. 2.6. Универсальное нечеткое множество U

- **Нормальные нечеткие множества**

Допустимый диапазон значений функции принадлежности не обязан ограничиваться интервалом от 0 до 1. Теоретико-множественные операции не выводят за пределы данного интервала, в то время как при выполнении арифметических операций могут получаться значения степени принадлежности, бо́льшие 1.

Если обозначить максимальное значение степени принадлежности множеству через $\sup_x \mu_A(x)$, то любое непустое нечеткое множество A может быть **нормировано** (Knappe 1994; Zimmermann 1994a) путем деления исходной функции принадлежности на ее максимальное значение. Функция принадлежности результирующего множества A_n будет прини-

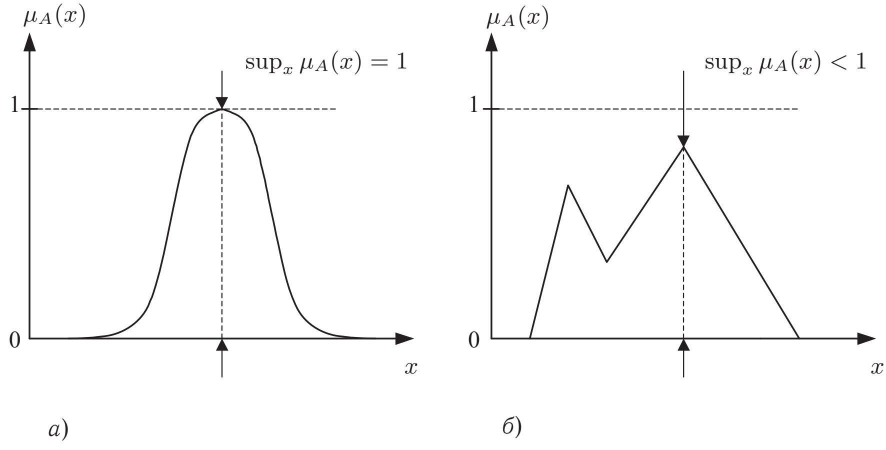


Рис. 2.7. Примеры нормального (*а*) и субнормального (*б*) нечетких множеств

мать значения в интервале от 0 до 1:

$$\mu_{A_n} = \frac{\mu_A(x)}{\sup_x \mu_A(x)}\,. \tag{2.13}$$

Нечеткое множество называется **нормальным** (нормированным), если его функция принадлежности принимает значения в интервале от 0 до 1 (при этом существуют элементы, степень принадлежности которых равна 1).

Нечеткое множество называется **субнормальным**, если максимальное значение его функции принадлежности меньше 1. Субнормальными являются результаты некоторых операций над нормальными нечеткими множествами.

- **Набор**

Набором (пакетом) B называется любое множество элементов предметной области (области определения) X, при этом допускаются многократные вхождения одного и того же элемента в набор.

Пример. На предметной области $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ можно задать набор:

$$B^* = \{x_1, x_2, x_2, x_3\}.$$

Различие между понятиями множества и набора состоит в том, что множество не может содержать многократные вхождения одного и того же элемента.

Нечетким набором B (Yager 1994,1995) называется набор пар вида (элемент x, степень принадлежности элемента x набору B):

$$B = \{(x, \mu_B^*(x))\,, \quad \forall x \in X\}\,. \tag{2.14}$$

Пример. $B = \left\{\dfrac{0.7}{x_1}, \dfrac{0.9}{x_2}, \dfrac{0.6}{x_2}, \dfrac{0.5}{x_3}\right\}.$

Нечеткие наборы появляются в результате выполнения арифметических (т. е. не относящихся к теоретико-множественным) операций над нечеткими множествами, например, суммирования нескольких нечетких множеств (Yager 1994,1995). Поскольку один и тот же элемент может входить в набор многократно, то совокупная степень его принадлежности (в арифметическом, а не теоретико-множественном смысле) может превосходить 1.

Примеры нечетких множеств приведены на рис. 2.8–2.10.

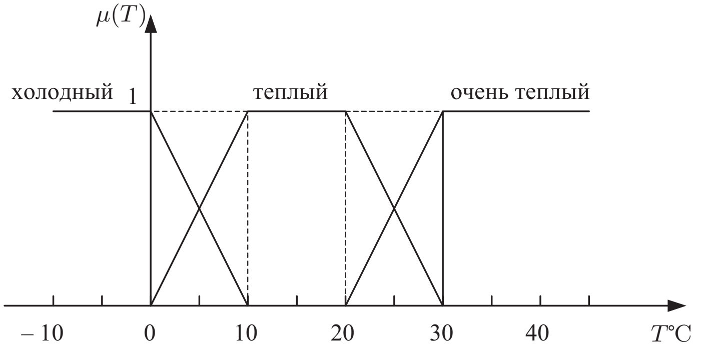


Рис. 2.8. Возможный вид нечетких множеств «холодный», «теплый» и «очень теплый» при их использовании для качественной оценки температуры

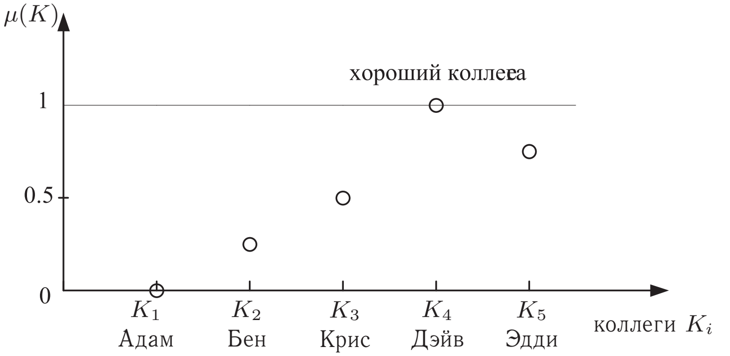


Рис. 2.9. Пример дискретного нечеткого множества «хороший коллега»

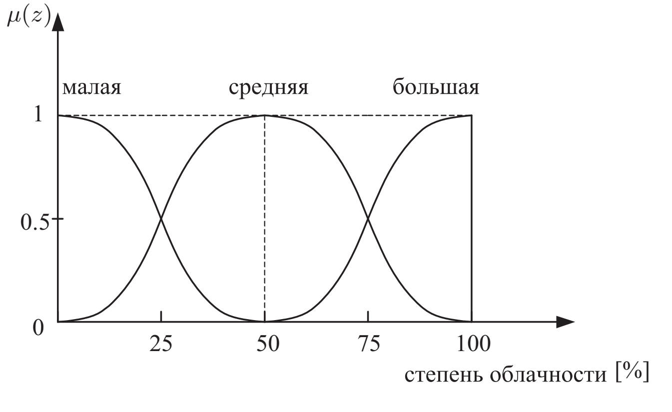


Рис. 2.10. Примеры нечетких множеств, используемых для грубой оценки степени облачности z

2.2. Характеристические параметры (показатели) нечеткого множества

- **Высота нечеткого множества** A

Определяется как максимальное из значений, принимаемых функцией принадлежности нечеткого множества на всей области определения X:

$$h(A) = \sup_{x \in X} \left(\mu_A(x) \right). \tag{2.15}$$

Поскольку функция принадлежности нечеткого множества в общем случае может иметь несколько локальных максимумов, высота (2.15) определяется с помощью точной верхней грани (sup).

- **Носитель нечеткого множества** A

Представляет собой четкое подмножество области определения X, содержащее все элементы, степени принадлежности которых множеству A отличны от нуля:

$$S(A) = \mathrm{supp}(A) = \{x : \mu_A(x) > 0, \quad x \in X\}. \tag{2.16}$$

Носитель нечеткого множества является более узким по сравнению с областью определения либо совпадает с ней.

- **Ядро нечеткого множества** A

Представляет собой четкое подмножество области определения X, содержащее все элементы, принадлежащие множеству A со степенью, равной 1:

$$C(A) = \mathrm{core}(A) = \{x : \mu_A(x) = 1, \quad x \in X\}. \tag{2.17}$$

Нормальное нечеткое множество имеет непустое ядро, в то время как ядро субнормального нечеткого множества является пустым.

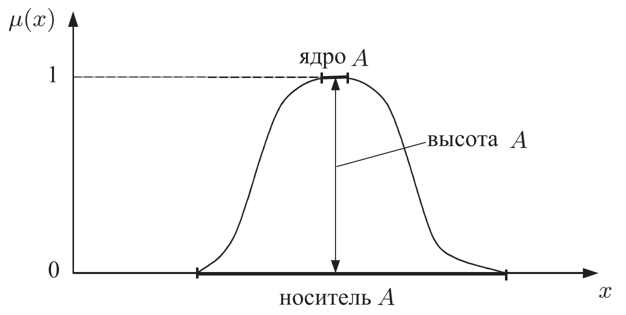


Рис. 2.11. Характеристические показатели нечеткого множества

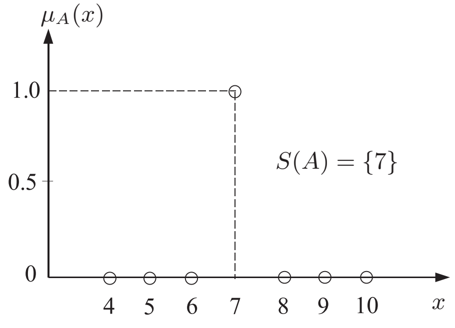


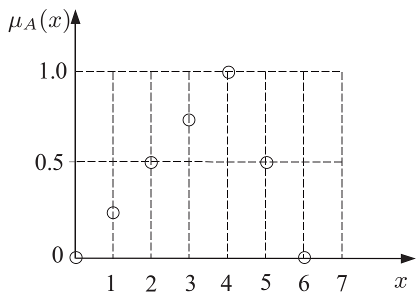
Рис. 2.12. Одноэлементное нечеткое множество

- **Одноточечное (одноэлементное) нечеткое множество**

Представляет собой нечеткое множество A, носитель которого $S(A)$ содержит в точности один элемент (т. е. A имеет только один элемент с ненулевой степенью принадлежности).

- **Вертикальное представление нечеткого множества**

Вертикальная форма представления нечеткого множества соответствует его представлению в виде множества пар (элемент x множества A, степень принадлежности элемента x множеству A). Такая форма представления нечеткого множества (рис. 2.13) используется наиболее часто (Kruse 1994).



$\mu_A(x)$	0.25	0.5	0.75	1	0.5
x	1	2	3	4	5

Рис. 2.13. Примеры вертикального представления дискретного нечеткого множества

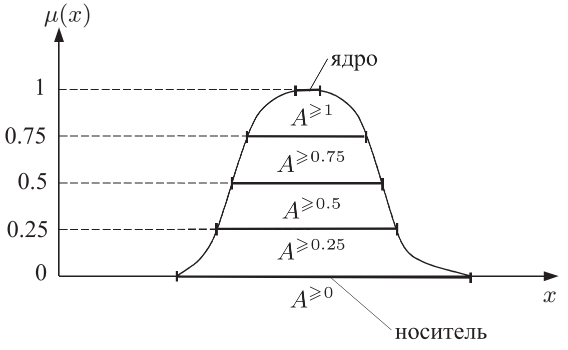


Рис. 2.14. Примеры α-срезов нечеткого множества A

- **Горизонтальное представление нечеткого множества**

Горизонтальная форма представления нечеткого множества соответствует его заданию с помощью так называемых α-срезов* A^α (рис. 2.14).

Введение понятия α-срезов обусловлено тем, что в ряде случаев его использование упрощает процедуру извлечения экспертных знаний для построения функции принадлежности. Например, если эксперт затрудняется задать конкретные значения степеней принадлежности элементов нечеткому множеству, то его можно спросить о том, какие из них принадлежат нечеткому множеству со степенью, не меньшей α; ответить на такой вопрос, как правило, легче.

Пример. Построить функцию принадлежности нечеткого множества «друзья» можно, задавая вопросы вида:
— «Кого из ваших знакомых вы считаете приятелями ($\alpha > 0.5$)?»
— «Кого вы считаете настоящими друзьями ($\alpha = 1$)?»
— «Кого вы не считаете своими друзьями ($\alpha = 0$) ?»

Существуют два способа определения α-срезов (Knappe 1994):

$$\begin{aligned} A^{>\alpha} &= \{x : x \in X, \quad \mu_A(x) > \alpha\}, \\ A^{\geqslant\alpha} &= \{x : x \in X, \quad \mu_A(x) \geqslant \alpha\}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

При $\alpha = 0$ α-срез совпадает с носителем множества $S(A)$, а при $\alpha = 1$ — с его ядром $C(A)$ (рис. 2.14).

По множеству α-срезов нечеткого множества можно с требуемой точностью восстановить его функцию принадлежности. Для дискретного

* В отечественной литературе альфа-срезы часто называют множествами альфа-уровня, а горизонтальное представление нечеткого множества — разложением нечеткого множества по множествам уровня. — *Прим. перев.*

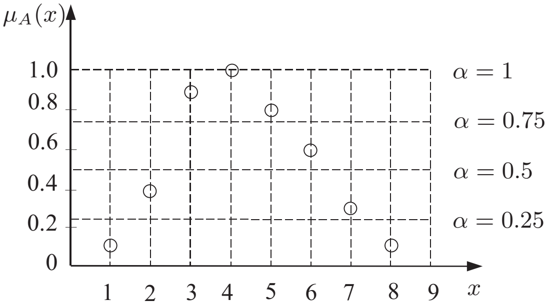


Рис. 2.15. Дискретная функция принадлежности нечеткого множества A

множества число необходимых срезов конечно, для непрерывного — вообще говоря, бесконечно (хотя во многих частных случаях оказывается конечным).

Если на области определения известны элементы отдельных α-срезов нечеткого множества A, то его функцию принадлежности $\mu_A^*(x)$ можно аппроксимировать следующим образом*:

$$\mu_A^*(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \left(\alpha \cdot \mu_{A > \alpha}(x)\right),$$

либо

$$\mu_A^*(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \left(\alpha \cdot \mu_{A \geqslant \alpha}(x)\right). \tag{2.19}$$

Пример 2.2.1. Пусть задано нечеткое множество (рис. 2.15)

$$A = \left\{\frac{0.1}{1}, \frac{0.4}{2}, \frac{0.9}{3}, \frac{1.0}{4}, \frac{0.8}{5}, \frac{0.6}{6}, \frac{0.3}{7}, \frac{0.1}{8}\right\}.$$

Срезы $A^{\geqslant \alpha}$:

$$A^{\geqslant 1} = \left\{\frac{1}{4}\right\}, \quad A^{\geqslant 0.75} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right\},$$

$$A^{\geqslant 0.5} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}\right\}, \quad A^{\geqslant 0.25} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}\right\},$$

$$A^{\geqslant 0} = \left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}\right\}.$$

Степени принадлежности элементов α-срезам могут принимать только значения 0 и 1. Представление множества A через его α-срезы имеет

* Здесь, в отличие от (2.2), через $\mu_A^*(x)$ обозначается приближенное представление функции принадлежности $\mu_A(x)$, $\forall x \in X$, посредством α-срезов. — *Прим. ред.*

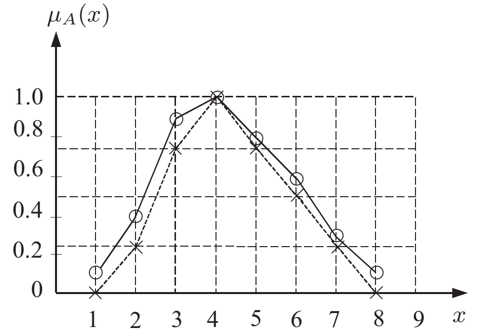


Рис. 2.16. Исходная функция принадлежности $\mu_A(x)$ (сплошная линия) и функция $\mu_A^*(x)$, восстановленная с помощью α-срезов (пунктирная линия)

вид:

$$\mu_A^*(x) = \sup_{\alpha\in[0,1]}\left(1\cdot\left(\frac{1}{4}\right) + 0.75\cdot\left(\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}\right) + 0.5\cdot\left(\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6}\right) + \right.$$
$$\left. + 0.25\cdot\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7}\right) + 0\cdot\left(\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7},\frac{1}{8}\right)\right) =$$
$$= \left(\frac{0}{1},\frac{0.25}{2},\frac{0.75}{3},\frac{1.0}{4},\frac{0.75}{5},\frac{0.5}{6},\frac{0.25}{7},\frac{0}{8}\right).$$

Если сопоставить исходную функцию принадлежности $\mu_A(x)$ с функцией $\mu_A^*(x)$, восстановленной с помощью α-срезов (рис. 2.16), то можно заметить, что результат восстановления не является абсолютно точным. Повысить точность можно путем увеличения числа α-срезов, либо за счет оптимизации их выбора. ■

- **Мощность (кардинальное число) нечеткого множества**

Для дискретного нечеткого множества мощность $\|A\|$, или кардинальное число $\mathrm{card}(A)$, определяется как сумма степеней принадлежности всех его элементов:

$$\|A\| = \mathrm{card}(A) = \sum_{x\in S(A)} \mu_A(x), \tag{2.20}$$

где $S(A)$ — носитель нечеткого множества.

Мощность непрерывного нечеткого множества вычисляется при помощи интегрирования функции принадлежности:

$$\|A\| = \mathrm{card}(A) = \int\limits_{x\in S(A)} \mu_A(x)\,dx. \tag{2.21}$$

Интегрирование или суммирование производится по элементам носителя нечеткого множества, поскольку степень принадлежности остальных элементов области определения равна нулю. Понятие мощности позволяет сравнивать различные нечеткие множества между собой. Пустое нечеткое множество имеет нулевую мощность.

- **Относительная мощность нечеткого множества**

Относительная мощность дискретного нечеткого множества определяется как доля его мощности, приходящаяся на один элемент области определения X:

$$\|A\|_X = \frac{\sum\limits_{x \in X} \mu_A(x)}{N}, \tag{2.22}$$

где N — число элементов области определения.

Относительная мощность непрерывного нечеткого множества задается формулой

$$\|A\|_X = \frac{\int\limits_{x \in X} \mu_A(x)\, dx}{\int\limits_{x \in X} dx}. \tag{2.23}$$

В случае бесконечно большого числа N элементов дискретного нечеткого множества или неограниченной области определения непрерывного нечеткого множества суммирование или интегрирование можно производить по элементам носителя $S(A)$.

- **Выпуклые и невыпуклые нечеткие множества**

Примеры выпуклого и невыпуклого множеств представлены на рис. 2.17.

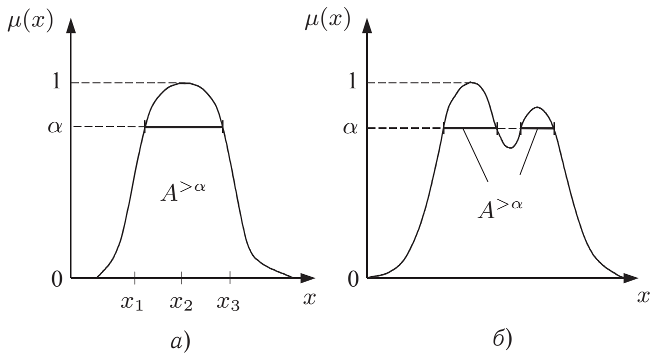


Рис. 2.17. Примеры выпуклого (*а*) и невыпуклого (*б*) нечетких множеств

Выпуклое нечеткое множество обладает тем свойством, что все его α-срезы являются связными, одноинтервальными подмножествами области определения X. У невыпуклого множества имеются несвязные α-срезы, состоящие из нескольких частей (рис. 2.17, *б*).

Невыпуклые нечеткие множества могут возникать в результате выполнения теоретико-множественных, алгебраических и арифметических операций над множествами (исходные множества при этом могут быть выпуклыми). Для выпуклых нечетких множеств справедливы следующие условия:

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \Rightarrow \mu_A(x_2) \geqslant \min\left(\mu_A(x_1), \mu_A(x_3)\right), \quad \forall x_1, x_2, x_3 \in X, \tag{2.24}$$

или

$$\mu_A\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_3\right) \geqslant \min\left(\mu_A(x_1), \mu_A(x_3)\right), \quad \forall \lambda \in [0,1] \quad \text{и} \quad \forall x_1, x_3 \in X. \tag{2.25}$$

2.3. Лингвистические модификаторы нечетких множеств

Лингвистические модификаторы используются для создания нечетких множеств, являющихся производными от некоторых ранее заданных. Например, если имеется нечеткое множество «холодный», то на его основе с помощью лингвистических модификаторов можно получить множества «очень холодный» или «более или менее холодный».

Существуют три основных модификатора (называемых также операторами):
— оператор концентрирования,
— оператор растяжения,
— оператор повышения/понижения контрастности.

- **Оператор концентрирования нечеткого множества**

Если A — нечеткое множество, соответствующее лингвистическому значению l_i, то данный оператор позволяет получить производное значение «очень l_i». Действие оператора концентрирования можно описать в виде следующей формулы*:

$$\mu_{\mathrm{CON}(A)}(x) = \mathrm{CON}\left(\mu_A(x)\right) = \mu_A(x)^2, \quad \forall x \in X. \tag{2.26}$$

Результат действия оператора на лингвистическое значение «средний» с треугольной формой функции принадлежности показан на рис. 2.18, *а*.

* От concentration — концентрирование. — *Прим. ред.*

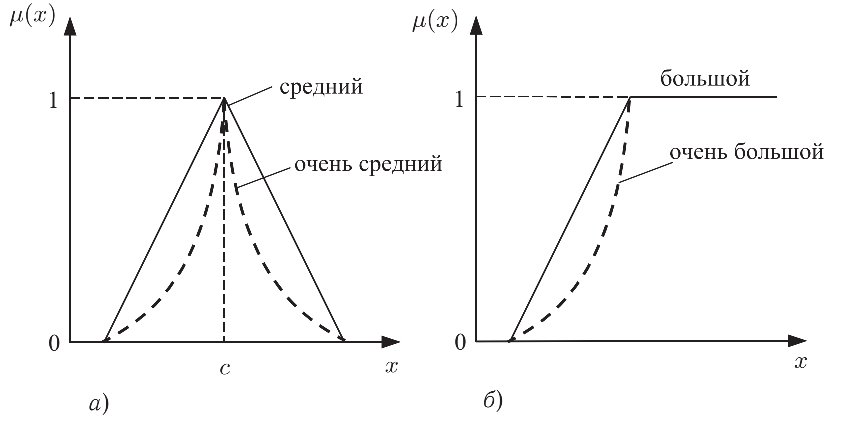


Рис. 2.18. Пример действия оператора концентрирования на внутреннее (*а*) и крайнее (*б*) нечеткие множества

Применительно к внутреннему нечеткому множеству с треугольной формой функции принадлежности (рис. 2.18, *а*), смысл концентрирования заключается в том, что «очень средними» следует считать только те значения x, которые расположены очень близко к центру c носителя множества. Использование данного оператора возможно и для крайних нечетких множеств, таких как множество «большой» на рис. 2.18, *б*, однако вместо этого в подобных ситуациях часто строят новое крайнее нечеткое множество «очень большой» (рис. 2.19).

- **Оператор растяжения нечеткого множества**

Данный оператор преобразует исходное нечеткое множество A, соответствующее лингвистическому значению l_i, во множество, соответствующее лингвистическому значению «слегка l_i» или «более или менее l_i».

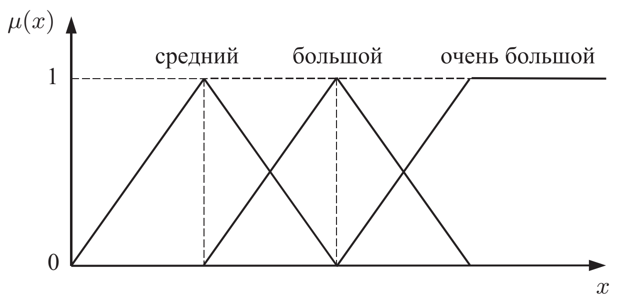


Рис. 2.19. Альтернатива концентрированию множества «большой»

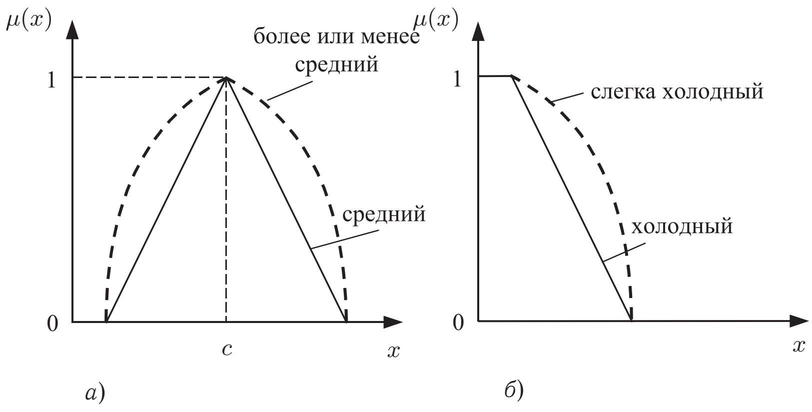


Рис. 2.20. Действие оператора растяжения на внутреннее (*а*) и крайнее (*б*) нечеткие множества

Его действие противоположно действию концентрирования*:

$$\mu_{\mathrm{DIL}(A)}(x) = \mathrm{DIL}\,(\mu_A(x)) = \sqrt{\mu_A(x)}, \quad \forall x \in X. \tag{2.27}$$

Оператор растяжения приводит к увеличению степеней принадлежности элементов нечеткого множества. Пример его действия представлен на рис. 2.20.

Смысл операции растяжения заключается в том, что элементы x носителя множества, расположенные дальше от его центра c, соответствуют понятию «более или менее средний» в большей степени, чем понятию «средний».

- **Оператор повышения контрастности нечеткого множества**

Характерной особенностью моделей, основанных на применении нечетких оценок, является нечеткость границ между отдельными лингвистическими значениями (рис. 2.21).

Границы между отдельными лингвистическими значениями являются размытыми при нечетком оценивании (рис. 2.21, *а*) и, наоборот, явно выражены при использовании четких оценок (рис. 2.21, *б*). Используя оператор повышения контрастности, нечеткие множества можно приводить к четкому виду. Изменяя углы наклона ветвей функции принадлежности, он позволяет более четко выделять границы перехода от одного нечеткого множества к другому (рис. 2.22).

Оператор повышения контрастности задается с помощью двух формул, первая из которых соответствует степеням принадлежности, мень-

* От dilatation — растяжение. — *Прим. ред.*

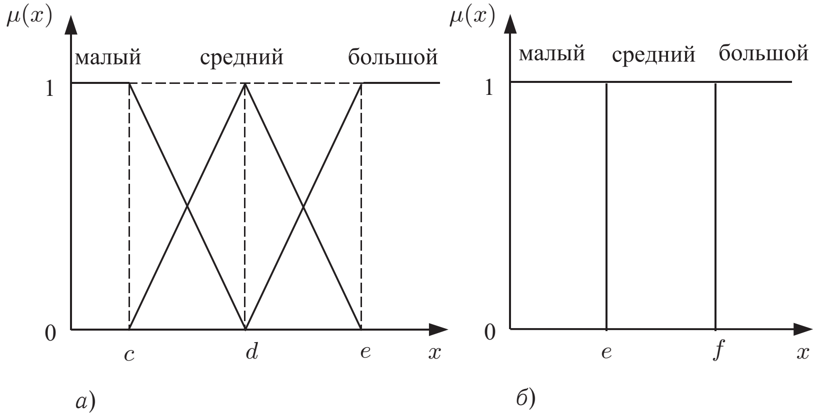


Рис. 2.21. Нечеткие (*а*) и четкие (*б*) границы лингвистических оценок

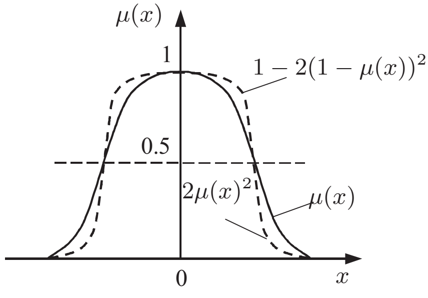


Рис. 2.22. Действие оператора повышения контрастности нечеткого множества

шим 0.5, а вторая — степеням, большим либо равным 0.5 (рис. 2.22)*:

$$\mu_{\mathrm{INT}(A)}(x) = \mathrm{INT}\,(\mu_A(x)) =$$
$$= \begin{cases} 2(\mu_A(x))^2 & \text{для} \quad \mu_A(x) < 0.5, \\ 1 - 2(1-\mu_A(x))^2 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{2.28}$$

Повышение контрастности можно усиливать, используя степени, бо́льшие 2. При стремлении показателя степени к бесконечности функция принадлежности $\mu_A(x)$ принимает прямоугольную форму и мы приходим к обычному множеству с четкими границами (рис. 2.23).

- **Оператор понижения контрастности нечеткого множества**

Действие данного оператора противоположно действию оператора повышения контрастности. Операция понижения контрастности, обозна-

* От intensification — усиление, повышение. — *Прим. ред.*

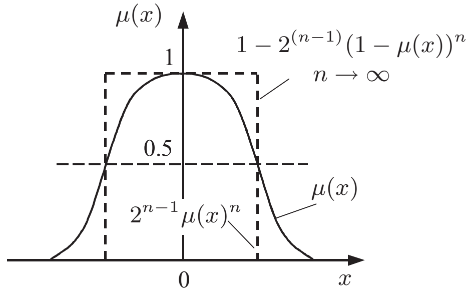


Рис. 2.23. Четкое множество как предельный случай повышения контрастности нечеткого множества

чаемая аббревиатурой BLR*, выполняется в соответствии с формулой (Kacprzyk 1986):

$$\mu_{\mathrm{BLR}(A)}(x) = \mathrm{BLR}(\mu_A(x)) = \\ = \begin{cases} 1-2(1-\mu_A(x))^2 & \text{для} \quad \mu_A(x) < 0.5, \\ 2(\mu_A(x))^2 & \text{для} \quad \mu_A(x) \geqslant 0.5. \end{cases} \tag{2.29}$$

Для усиления действия данного оператора можно использовать степени $n > 1$. При очень больших степенях нечеткое множество преобразуется в точку, которая совпадает с его модальным значением m (рис. 2.24, *б*).

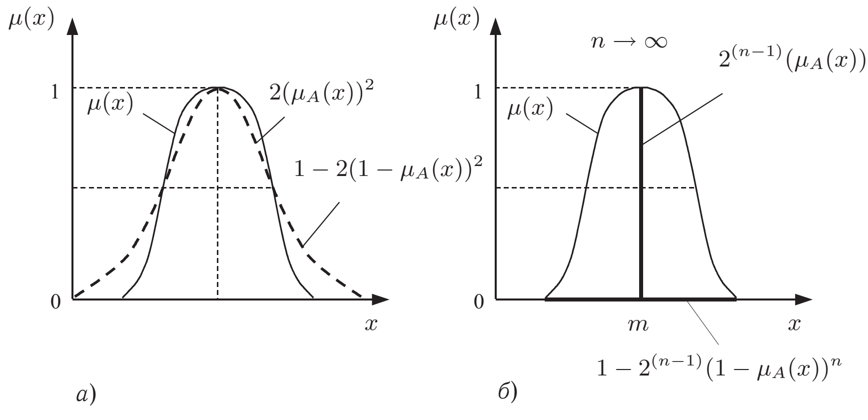


Рис. 2.24. Понижение контрастности нечеткого множества при $n = 2$ (*а*) и предельная форма нечеткого множества при $n\to\infty$ (*б*)

* От blurring — размывание. — *Прим. перев.*

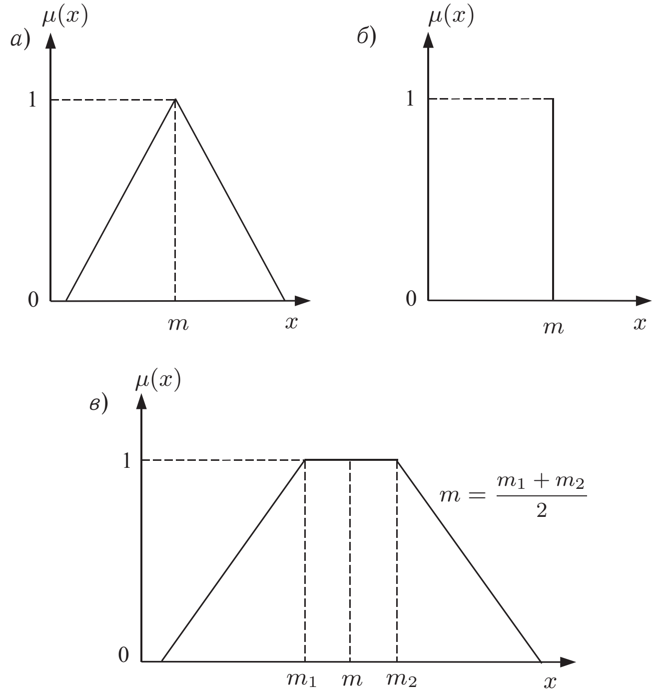


Рис. 2.25. Модальное значение m нечетких множеств различных типов: *а*) треугольного, *б*) одноэлементного, *в*) трапециевидного

- **Модальное значение нечеткого множества**

Понятие модального значения (Kahlert 1995) главным образом используется для нечетких множеств с ядром, содержащим единственный элемент области определения X (рис. 2.25, *а, б*).

Если ядро нечеткого множества содержит более одного элемента, то для такого множества модальное значение определяется как среднее значение элементов ядра (рис. 2.25, *в*).

- **Нечеткие множества, для которых выполняется условие разбиения единицы**

Важным и полезным свойством нечетких множеств, описывающих входные параметры системы управления, является выполнение условия разбиения единицы (2.30) (Brown 1994), которое состоит в равенстве 1 суммы степеней принадлежности для каждого из элементов x области определения:

$$\sum_h \mu_{A_h}(x) \equiv 1, \quad \forall x \in X, \tag{2.30}$$

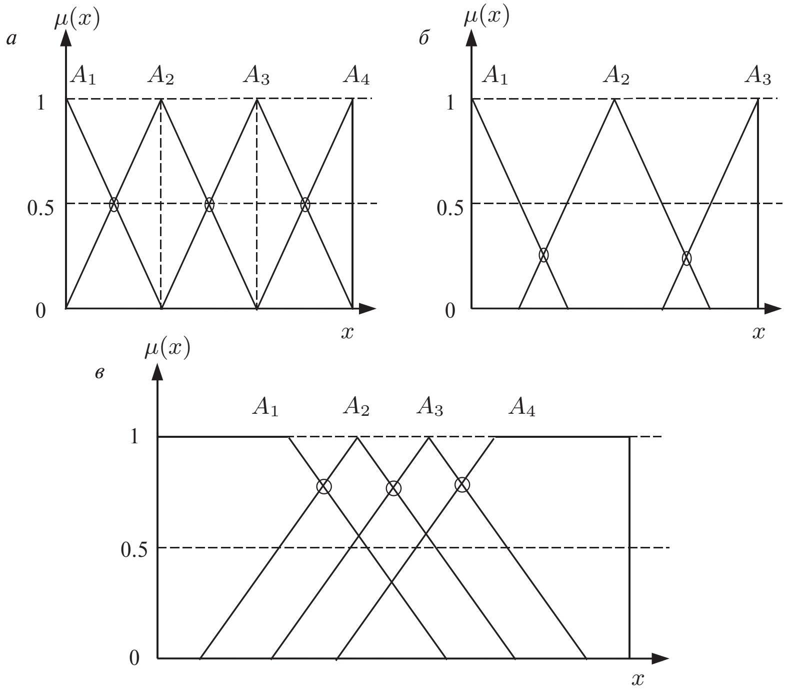


Рис. 2.26. Примеры нечетких множеств A_h, для которых выполняется (*а*) и не выполняется (*б, в*) условие разбиения единицы

где h — номер нечеткого множества.

Пример выполнения данного условия приведен на рис. 2.26, *а*, пример невыполнения — на рис. 2.26, *б, в*.

При выполнении условия разбиения единицы модель обычно имеет более гладкую поверхность отклика по сравнению с моделями, использующими нечеткие множества, подобные представленным на рис. 2.26, *б*, в то время как множества на рис. 2.26, *в* приводят к более плоским поверхностям. Нечеткие множества, для которых условие разбиения единицы не выполняется, можно привести к виду, удовлетворяющему данному условию.

Пример 2.3.1. Коррекция нечетких множеств A_i на рис. 2.27 выполняется следующим образом (A_i^* — преобразованные множества):

$$\mu^*_{A_1}(a) = \frac{\mu_{A_1}(a)}{\mu_{A_1}(a) + \mu_{A_2}(a)} = \frac{\mu_{A_1}(a)}{\mu_{A_1}(a)} = 1,$$

$$\mu^*_{A_1}(b) = \frac{\mu_{A_1}(b)}{\mu_{A_1}(b) + \mu_{A_2}(b)} = \frac{0.2}{0.4} = 0.5.$$

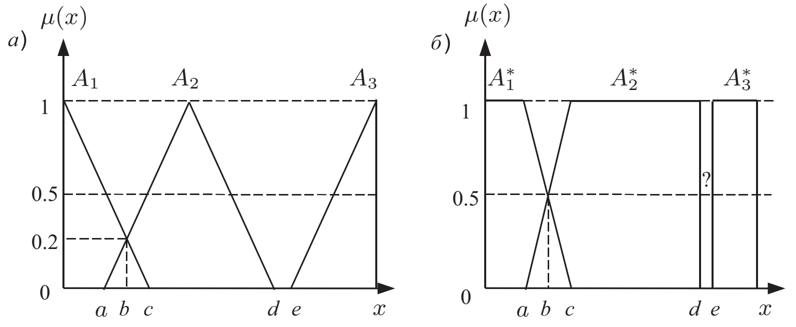


Рис. 2.27. Приведение нечетких множеств, не удовлетворяющих условию разбиения единицы (*а*), к виду, для которого данное условие удовлетворяется (*б*)

Преобразование функций принадлежности нечетких множеств A_h, представленных на рис. 2.27, *а*, приводит к множествам на рис. 2.27, *б*. Однако, следует отметить, что в результате такого действия изменяется форма функции принадлежности, а также возникают сложности, связанные с обработкой интервалов, не принадлежащих ни одному из множеств, например интервала $(d; e)$ на рис. 2.27. Интервалы такого типа могут возникать при подстройке (адаптации) нечетких моделей на основе входных и выходных данных (т. е. применении алгоритмов самообучения). В результате возникает совокупность областей, нечувствительных к изменению соответствующих входных параметров.

Условие разбиения единицы называют иногда также условием перекрытия функций принадлежности или условием приведения этих функций к единице. ■

2.4. Типы функций принадлежности нечетких множеств

В практических приложениях теории нечетких множеств используется большое количество различных типов функций принадлежности. Здесь мы рассмотрим ряд как простых, так и сложных видов этих функций и обсудим их свойства.

- **Функции принадлежности, состоящие из прямолинейных участков**

Такие функции применяются на практике достаточно часто, что обусловлено их простотой. На рис. 2.28 показаны различные формы наиболее часто используемой функции многоугольной формы.

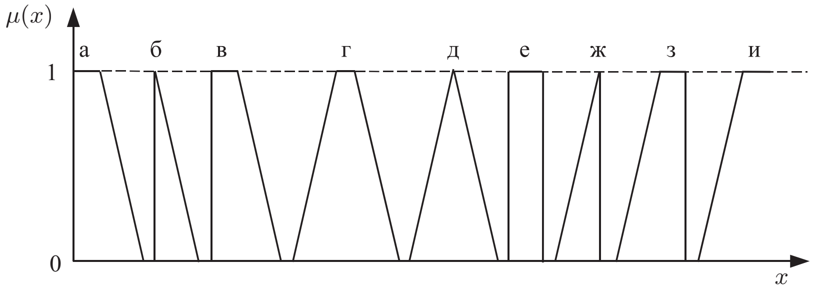


Рис. 2.28. Формы наиболее часто используемых кусочно-линейных функций принадлежности: а — крайняя левая функция принадлежности; б, ж — асимметричная треугольная функция принадлежности; в, з — асимметричная трапециевидная функция принадлежности; г — симметричная трапециевидная функция принадлежности; д — симметричная треугольная функция принадлежности; е — прямоугольная функция принадлежности; и — крайняя правая функция принадлежности

Существенным преимуществом многоугольных функций принадлежности является то, что для их определения требуется наименьший по сравнению с остальными функциями объем информации, который в данном случае ограничивается данными об угловых точках, что является весьма важным обстоятельством при моделировании систем в условиях ограниченности объема исходных данных. Чтобы определить многоугольную функцию принадлежности, на практике обычно требуется задать лишь модальное значение соответствующего нечеткого множества.

Пример 2.4.1. Значения входных и выходных величин реальных систем обычно ограничиваются некоторым диапазоном изменения. Например, перемещение поршня в серводвигателе может изменяться в пределах диапазона

$$x_{\min} \leqslant x \leqslant x_{\max}.$$

Функция принадлежности может иметь форму, представленную на рис. 2.29.

В случае, представленном на рис. 2.29, для полного задания трех функций принадлежности достаточно трех (вместо девяти) значений: $x_{\min}, x_{\mathrm{med}}, x_{\max}$.

Если, по мнению эксперта, модальное значение внутренней функции принадлежности находится в середине диапазона изменения параметра, то требуется только два значения: $x_{\min}$ и $x_{\max}$, поскольку в этом случае значение x_{med} однозначно определяется на их основе. ■

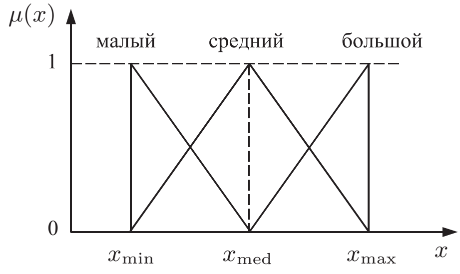


Рис. 2.29. Примеры функций принадлежности для случая, когда диапазон изменения параметра ограничен с обеих сторон

Чтобы определить модальное значение треугольной функции (т. е. величину $x_{\rm med}$), следует ответить на единственный вопрос о том, какое значение x следует считать наиболее характерным для данного лингвистического значения (например, значения «средний» на рис. 2.29).

Для записи математического выражения многоугольной функции принадлежности следует использовать логические переменные w_i: $\{0,1\}$.

Пример 2.4.2. В случае трапециевидной функции принадлежности (рис. 2.30, *а*) вводятся следующие логические переменные:

$$\begin{aligned} w_1 &= \begin{cases} 1 & \text{для } a \leqslant x < b, \\ 0 & \text{в других случаях,} \end{cases} \\ w_2 &= \begin{cases} 1 & \text{для } b \leqslant x < c, \\ 0 & \text{в других случаях,} \end{cases} \\ w_3 &= \begin{cases} 1 & \text{для } c \leqslant x \leqslant d, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases} \end{aligned} \tag{2.31}$$

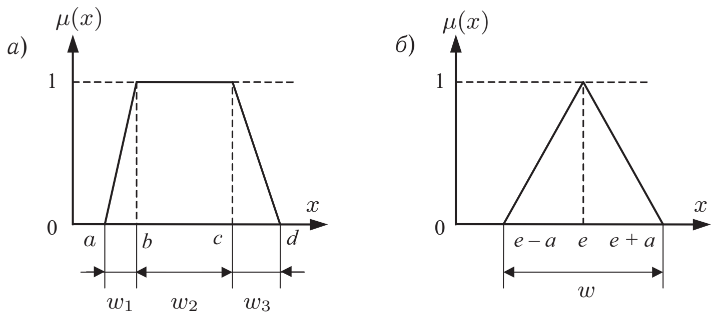


Рис. 2.30. Асимметричная трапециевидная и симметричная треугольная функции принадлежности

Функция принадлежности, имеющая форму асимметричной трапеции, может быть представлена в виде

$$\mu(x) = w_1 \left(\frac{x-a}{b-a}\right) + w_2 + w_3 \left(\frac{d-x}{d-c}\right). \tag{2.32}$$

В случае симметричной треугольной функции (рис. 2.30, *б*) требуется ввести только одну логическую переменную w:

$$w = \begin{cases} 1 & \text{для } (e-a) \leqslant x < (e+a), \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases} \tag{2.33}$$

Функция принадлежности может быть записана в виде

$$\mu(x) = w \left(\frac{a-|x-e|}{a}\right). \tag{2.34}$$

■

Достоинства многоугольных функций принадлежности

1. Для их задания требуется малый объем данных.
2. Простота модификации параметров (модальных значений) функции принадлежности на основе измеряемых значений входных и выходных величин системы.
3. Возможность получения в рамках модели отображения «вход→выход» в виде гиперповерхности, состоящей из **линейных** участков.
4. Для многоугольных функций принадлежности легко обеспечивается выполнение условия разбиения единицы (в соответствии с которым сумма степеней принадлежности для любого элемента x должна равняться 1).

Недостатки многоугольных функций принадлежности

1. Многоугольные функции принадлежности не являются непрерывно дифференцируемыми.

Пример 2.4.3. Как можно видеть на рис. 2.31, производная функции принадлежности в точках разрыва изменяется скачкообразно. Таким образом, модель системы, содержащая подобные функции, также не является непрерывно дифференцируемой. ■

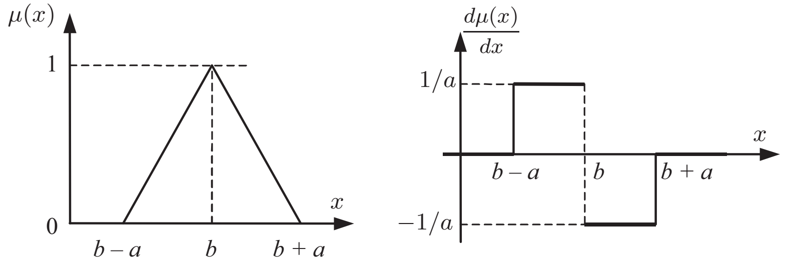


Рис. 2.31. Треугольная функция принадлежности и ее производная

В некоторых работах (Preuss 1994a; Rummelhart 1986) высказывается мнение о том, что отсутствие непрерывной дифференцируемости функций принадлежности усложняет процесс адаптации (обучения) нечетких моделей. Вместе с тем, результаты исследований автора и его коллег (Piegat 1996,1997a) позволяют утверждать, что модели с функциями принадлежности рассмотренного вида все же обладают хорошими адаптивными свойствами.

- **Интуитивные функции принадлежности**

Функции принадлежности, которые, часто на подсознательном уровне, использует человек, называют интуитивными функциями принадлежности. Исследования, преимущественно связанные с методами классификации решений (Altrock 1993), позволили сделать вывод о том, что для интуитивных функций принадлежности справедлив ряд свойств, именуемых аксиомами Шваба.

Аксиома 1. Интуитивные функции принадлежности $\mu(x)$ являются непрерывными на всей числовой области определения X.

Выражаемая человеком качественная оценка величины x не изменяется скачкообразно ни при каком достаточно малом изменении ее значения. Таким образом, интуитивная функции принадлежности не может иметь вид, представленный на рис. 2.32.

Пример 2.4.4. Весьма сомнительно, что для качественной оценки роста мы стали бы использовать функцию принадлежности прямоугольной формы (рис. 2.33), в соответствии с которой человек с ростом 179.9 см считается имеющим средний рост, а тот, кто всего лишь на 2 мм выше (т. е. имеет рост 180.1 см), относится уже к высоким людям. Мало кто согласился бы с подобной классификацией. ■

Аксиома 2. Первая производная интуитивной функции принадлежности $\mu(x)$:

$$\dot{\mu}(x) = \frac{d\mu(x)}{dx},$$

является непрерывной на всей числовой области определения X.

Это следует из наблюдения, согласно которому скорость изменения оценки параметра x (т. е. производная этой оценки) не меняется скачкообразно при любых малых изменениях самого параметра.

Пример 2.4.5. В случае, когда функция принадлежности имеет треугольную форму (рис. 2.34), любое небольшое изменение переменной x в окрестности точки b приводит не только к скачкообразному изменению значения производной $\dot{\mu}(x)$, но также и к изменению ее знака. Тем самым, треугольная функция принадлежности дает весьма грубое приближение того, как делает оценку человек.

Отмеченное свойство, тем не менее, не означает, что данные функции не следует использовать в нечетких моделях, поскольку точность модели, содержащей треугольные функции принадлежности, может быть вполне удовлетворительной. ■

Аксиома 3. Вторая производная интуитивной функции принадлежности $\mu(x)$:

$$\ddot{\mu}(x) = \frac{d^2\mu(x)}{dx^2},$$

непрерывна на всей области определения.

Аксиома 4. Интуитивная функция принадлежности имеет минимальное значение кривизны.

Данное утверждение означает, что из множества возможных функций принадлежности человек выбирает ту, для которой значение максимума

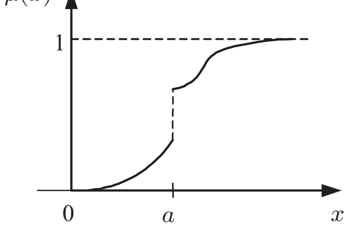


Рис. 2.32. Функция принадлежности, имеющая разрыв в точке $x = a$

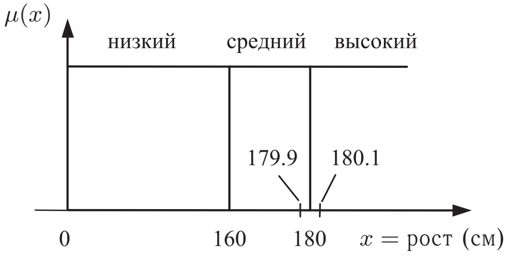


Рис. 2.33. Пример разрывной функции принадлежности для лингвистической переменной «рост»

второй производной является минимальным среди всех таких функций:

$$\mu(x)\colon \mu(x) = \arg\min_{\mu} \left| \max_{X} \left(\frac{d^2\mu(x)}{dx^2} \right) \right|.$$

Пример 2.4.6. Для треугольной функции принадлежности (рис. 2.34) значение кривизны в точках $(b-a)$, b, $(b+a)$ столь велико, что ее вторая производная $\ddot{\mu}(x)$ обращается в этих точках в бесконечность. Принципам оценивания, которыми руководствуется человек, в большей степени соответствует функция, представленная на рис. 2.35, обладающая малой кривизной и непрерывными первой и второй производными. ■

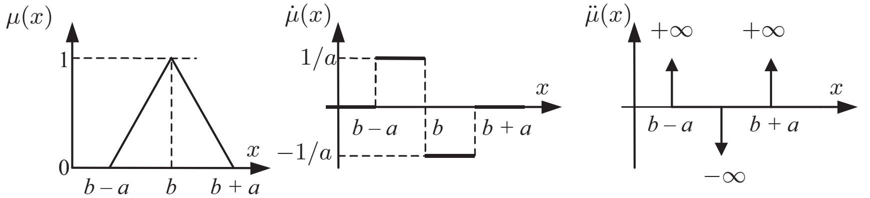


Рис. 2.34. Треугольная функция принадлежности и ее производные

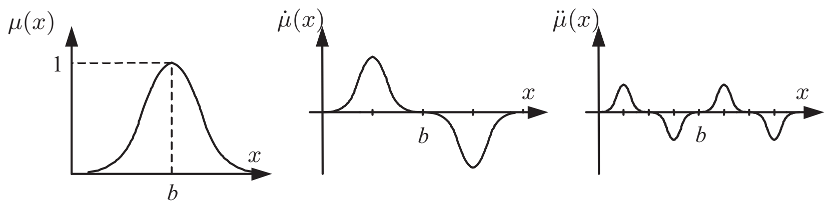


Рис. 2.35. Пример непрерывной функции принадлежности с малой кривизной

Далее мы рассмотрим различные виды функций, которые можно использовать для математического представления интуитивных функций принадлежности.

- **Симметричная гауссова функция**

Гауссова функция описывается выражением*

$$\mu(x) = \exp\left[-\left(\frac{x-b}{a}\right)^2\right]. \tag{2.35}$$

Вид этой функции изображен на рис. 2.36.

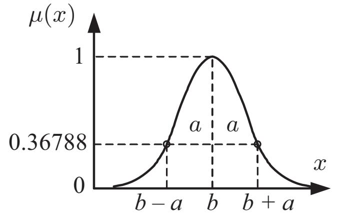


Рис. 2.36. Функция принадлежности гауссовского типа

Вид данной функции, иногда называемой гауссовым колоколом (Preuss 1994a), определяется двумя параметрами — a и b, где b задает ее модальное значение, и a — ширину. На уровне

$$\mu(x) = e^{-1} \cong 0.36788$$

ширина гауссовой функции равна $2a$. Модальное значение получают экспертным путем, задавая вопрос о наиболее характерном значении x для данного нечеткого множества.

Пример 2.4.7. В качестве числового значения, в наибольшей степени характеризующего нечеткое множество «средний рост», может быть выбрано $b = 170$ см.

Для того чтобы экспертным путем определить значение параметра a, характеризующего ширину функции, можно воспользоваться понятием **критической точки** k функции принадлежности, под которой понимается точка со степенью принадлежности, равной 0.5. Любая гауссова функция имеет две таких точки (рис. 2.37).

Если предположить, что соседние функции принадлежности пересекаются примерно на уровне $\mu(x_k) = 0.5$ (что, однако, в нечетких моделях выполняется не всегда), то критическую точку k можно рассматривать как точку, для координаты x которой мы не можем указать, какому из нечетких множеств — левому или правому — она принадлежит в большей степени (Altrock 1993).

* Обычно эту функцию определяют немного иначе:

$$\mu(x) = \exp\left[-\frac{(x-b)^2}{2a^2}\right].$$

В этом случае точки $b \pm a$ будут как раз точками перегиба. — *Прим. перев.*

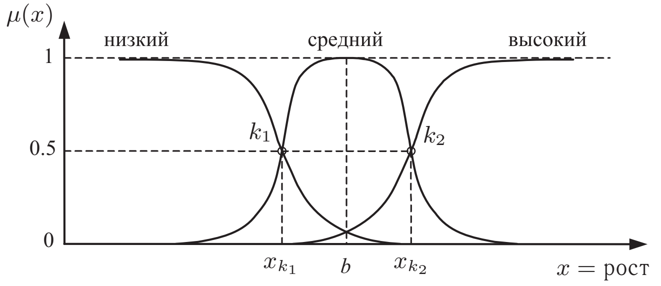


Рис. 2.37. Гауссова функция, используемая в качестве функции принадлежности нечеткого множества «средний рост»

Таким образом, если мы не в состоянии решить, к какой группе людей— низкого или среднего роста — следует отнести человека, имеющего рост 165 см, то можно считать, что данное значение принадлежит обоим названным нечетким множествам с одинаковой степенью, равной 0.5, и задает тем самым координату критической точки функции принадлежности: $x_k = 165$ см.

По известному модальному значению гауссовой функции ($b = 170$ см) можно вычислить значение второго параметра a:

$$\mu(x_k) = \exp\left[-\left(\frac{x_k - 170}{a}\right)^2\right] = 0.5,$$

$$a = \frac{|x_k - b|}{\sqrt{\ln 2}} \cong 6\,\text{см}. \qquad ■$$

Понятие критической точки k является особенно полезным при определении параметров функции принадлежности путем экспертного оценивания, так как человеку легче всего указать граничные значения предъявленного показателя и выделить значения, имеющие смысловое различие для заданной области его изменения. При этом эксперт, как правило, не в состоянии задать точные значения степеней принадлежности элементов, не имеющих в заданной области смыслового различия. Поверхность отклика нечеткой модели, использующей гауссову функцию, в общем случае является глобально и локально нелинейной.

Достоинства гауссовой функции принадлежности

1. Использование гауссовых функций обеспечивает получение гладких, непрерывно дифференцируемых гиперповерхностей отклика нечеткой модели.

2. Являясь непрерывно и, более того, бесконечно дифференцируемыми (бесконечная дифферецируемость означает наличие производной любого порядка), гауссовы функции дают возможность проведения теоретического анализа нечетких систем (Brown 1994).

Недостатки гауссовой функции принадлежности

1. Гауссова функция симметрична, что приводит к нарушению условия разбиения единицы (рис. 2.38).
2. Использование гауссовой функции принадлежности предполагает задание большего, чем для треугольной функции, числа параметров (по два параметра для каждой функции), что усложняет настройку нечеткой модели.
3. Гауссова функция имеет неограниченный носитель, что означает, что любой элемент x области определения X будет принадлежать любому нечеткому множеству, задаваемому с помощью этой функции (рис. 2.38), и это может не соответствовать представлениям эксперта о моделируемой системе. Вместе с тем, степени принадлежности элементов x, находящихся далеко от центра гауссовой функции, пренебрежимо малы, вследствие чего ширина этой функции на практике оказывается не столь велика.
4. Использование гауссовой функции затрудняет получение простых локально линейных поверхностей отклика нечеткой модели.

В качестве альтернативы гауссовым функциям принадлежности с неограниченным носителем были предложены бесконечно дифференцируемые гауссовы функции с ограниченным носителем (Werntges 1993). Пример такой функции (Brown 1994) показан на рис. 2.39.

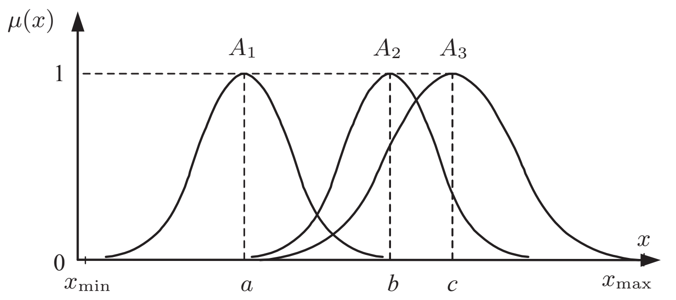


Рис. 2.38. Неравномерное расположение гауссовых функций принадлежности на области определения X для различных значений ширины

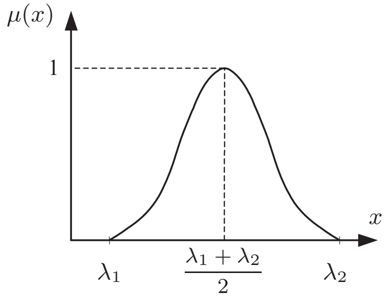


Рис. 2.39. Гауссова функция принадлежности с ограниченным носителем (λ_1, λ_2)

Форма данной функции определяется выражением

$$\mu(x) = \begin{cases} \exp\left[\dfrac{4(\lambda_2 - x)(x - \lambda_1) - (\lambda_2 - \lambda_1)^2}{4(\lambda_2 - x)(x - \lambda_1)}\right] & \text{для} \quad \lambda_1 \leqslant x \leqslant \lambda_2, \\ 0 & \text{в других случаях,} \end{cases} \tag{2.36}$$

где λ_1, λ_2 задают узловые точки функции (ограничивающие ее носитель). Гауссова функция вида (2.36) является симметричной.

- **Асимметричная гауссова функция**

Данная функция сочетает в себе преимущество гауссовой функции, связанное с бесконечной дифференцируемостью, с отсутствием недостатка, выражающегося в ее симметричности (рис. 2.40).

Если ввести вспомогательную логическую переменную

$$w = \begin{cases} 1 & \text{для} \quad -\infty < x \leqslant m, \\ 0 & \text{в других случаях,} \end{cases} \tag{2.37}$$

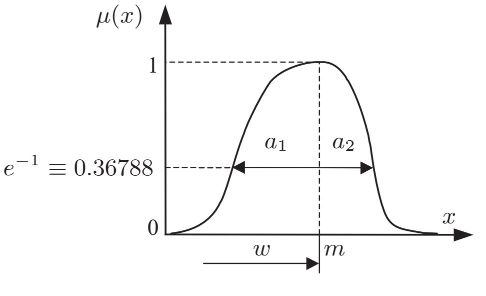


Рис. 2.40. Бесконечно дифференцируемая асимметричная гауссова функция

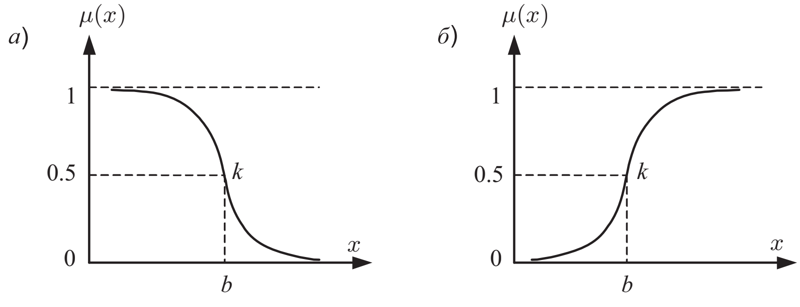


Рис. 2.41. Левая (*а*) и правая (*б*) сигмоидальные функции

то асимметричная гауссова функция задается в следующем виде:

$$\mu(x) = w \cdot \exp\left[-\left(\frac{x-m}{a_1}\right)^2\right] + (1-w) \cdot \exp\left[-\left(\frac{x-m}{a_2}\right)^2\right], \qquad (2.38)$$

где m — ее модальное (среднее) значение.

При использовании асимметричной гауссовой функции имеется возможность выполнения условия разбиения единицы (Brown 1994).

- **Сигмоидальная функция принадлежности**

Будучи симметричными, гауссовы функции подходят для представления внутренних нечетких множеств. Для представления крайних множеств можно использовать левую и правую сигмоидальную функцию (рис. 2.41).

Правая сигмоидальная функция задается с помощью выражения* :

$$\mu(x) = \frac{1}{1+\exp[-a\cdot(x-b)]}\,. \qquad (2.39)$$

Параметр b задает координату точки k, принадлежащей нечеткому множеству со степенью 0.5, поэтому его значение можно достаточно легко получить от эксперта. Коэффициент a определяет наклон функции в точке перегиба k — с увеличением его значения растет величина наклона. При $a = 10$ вид функции близок к ступенчатому (рис. 2.42).

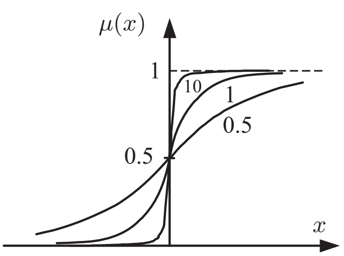


Рис. 2.42. Форма сигмоидальной функции при различных значениях коэффициента наклона a

* Здесь $a \geqslant 0$, потому что при отрицательных a это уже будет левая сигмоидальная функция. — *Прим. перев.*

Коэффициент наклона a можно вычислить на основе экспертной оценки значения $x_{0.99}$, т. е. наименьшего значения переменной x, которое может с практически полной уверенностью считаться принадлежащим нечеткому множеству, задаваемому сигмоидальной функцией.

Рассматриваемая сигмоидальная функция достигает значения 1.0 при $x \to \infty$:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{1 + \exp[-a \cdot (x - b)]} = 1, \tag{2.40}$$

с учетом чего на практике можно предполагать, что значение функции, равное, например 0.99, соответствует полной принадлежности значения переменной x нечеткому множеству.

Пример 2.4.1. Нечеткое множество «высокий рост» можно задать с помощью сигмоидальной функции, представленной на рис. 2.43.

Если предположить, что людей, имеющих рост 180 см, можно с полной уверенностью ($\mu = 0.99$) отнести к высоким, то коэффициент наклона a вычисляется согласно выражениям:

$$\mu(x_{0.99}) = \frac{1}{1 + \exp[-a \cdot (x_{0.99} - b)]}, \tag{2.41}$$

$$a = \frac{\ln(99)}{x_{0.99} - b} = \frac{\ln(99)}{180 - 175} \cong 0.919. \tag{2.42}$$

■

Левая сигмоидальная функция (рис. 2.41, a) задается выражением:

$$\mu(x) = 1 - \frac{1}{1 + \exp[-a \cdot (x - b)]} = \frac{\exp[-a \cdot (x - b)]}{1 + \exp[-a \cdot (x - b)]}. \tag{2.43}$$

По аналогии с правой, левая сигмоидальная функция имеет точку перегиба $x = b$, и ее значение в этой точке равно 0.5. Коэффициент

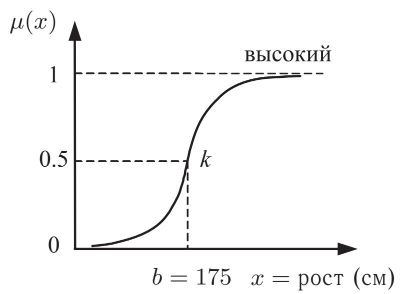


Рис. 2.43. Сигмоидальная функция принадлежности нечеткого множества «высокий рост»

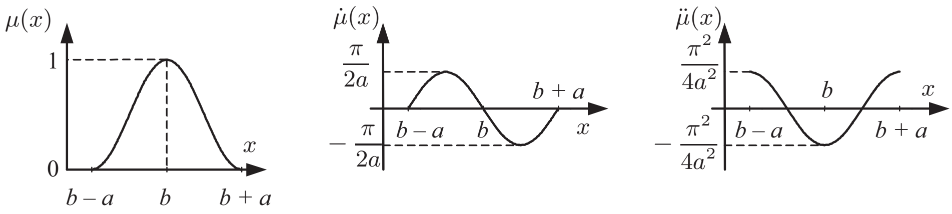


Рис. 2.44. Гармоническая функция принадлежности и ее производные

наклона a вычисляется по формуле:

$$a = -\left(\frac{\ln(99)}{x_{0.99} - b}\right). \tag{2.44}$$

Сигмоидальная функция имеет те же **достоинства и недостатки**, что и гауссова.

- **Гармоническая функция принадлежности**

Выражение для внутренней гармонической функции имеет вид:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0.5 \cdot \left[1 + \cos\left(\pi\,\dfrac{x-b}{a}\right)\right] & \text{для} \quad (b-a) \leqslant x \leqslant (b+a), \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases} \tag{2.45}$$

Вид этой функции показан на рис. 2.44.

Достоинства гармонической функции принадлежности

1. Гармоническая функция имеет ограниченный носитель $[(b-a), (b+a)]$, что позволяет задавать ее параметры экспертным путем.
2. Будучи бесконечно дифференцируемой, гармоническая функция упрощает получение гладких, непрерывно дифференцируемых поверхностей отклика модели.
3. Первая производная гармонической функции в граничных точках носителя равна нулю, вследствие чего данная функция хорошо согласуется с некоторыми из аксиом Шваба.

Недостатки гармонической функции принадлежности

1. Гармоническая функция является симметричной и, если функции принадлежности расположены на области определения неравномерно, это нарушает условия разбиения единицы и отрицательно сказывается

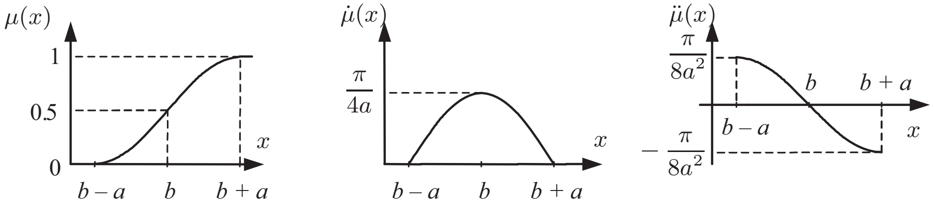


Рис. 2.45. Правая внешняя гармоническая функция принадлежности и ее производные

на качестве моделирования на участках, слабо охватываемых функциями принадлежности. Для минимизации данного недостатка можно воспользоваться асимметричной гармонической функцией, задаваемой аналогично тому, как это делалось в случае асимметричной гауссовой функции (2.38).

Правая внешняя гармоническая функция принадлежности задается с помощью формулы

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & \text{для} \quad x > (b+a), \\ 0.5 \cdot \left[1 + \sin\left(\pi\,\dfrac{x-b}{2a}\right)\right] & \text{для} \quad (b-a) \leqslant x \leqslant (b+a), \\ 0 & \text{для} \quad x < (b-a). \end{cases} \tag{2.46}$$

Вид правой внешней гармонической функции представлен на рис. 2.45. Как и в случае внутренней гармонической функции, ее первая производная равна нулю в граничных точках носителя $[(b-a), b+a)]$. Функция имеет малую кривизну, вследствие чего хорошо (хотя и не полностью) согласуется с аксиомами Шваба.

Левая внешняя гармоническая функция принадлежности задается с помощью формулы

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad x > (b+a), \\ 0.5 \cdot \left[1 - \sin\left(\pi\,\dfrac{x-b}{2a}\right)\right] & \text{для} \quad (b-a) \leqslant x \leqslant (b+a), \\ 1 & \text{для} \quad x < (b-a). \end{cases} \tag{2.47}$$

Функция имеет вид, представленный на рис. 2.46.

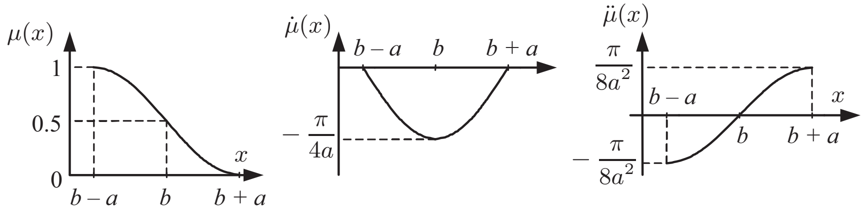


Рис. 2.46. Левая внешняя гармоническая функция принадлежности и ее производные

- **Полиномиальные функции принадлежности**

Достоинство этих функций состоит в том, что их сложность определяется числом аксиом Шваба, справедливость которых следует обеспечить.

Наиболее простой является внутренняя полиномиальная функция принадлежности **второго порядка**, которая определяется выражением

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{x-b}{a}\right)^2, & \text{если} \quad (b-a) \leqslant x \leqslant (b+a), \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases} \tag{2.48}$$

Вид этой функции показан на рис. 2.47.

Правая внешняя полиномиальная функция принадлежности второго порядка определяется по формуле

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < (b-a), \\ 1 - \left(\dfrac{x-b}{a}\right)^2, & \text{если} \quad (b-a) \leqslant x \leqslant b, \\ 1, & \text{если} \quad x > b. \end{cases} \tag{2.49}$$

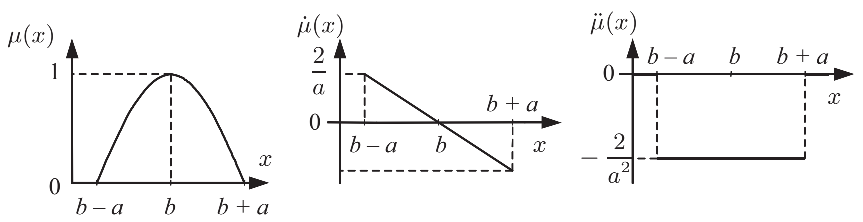


Рис. 2.47. Полиномиальная функция принадлежности второго порядка и ее производные

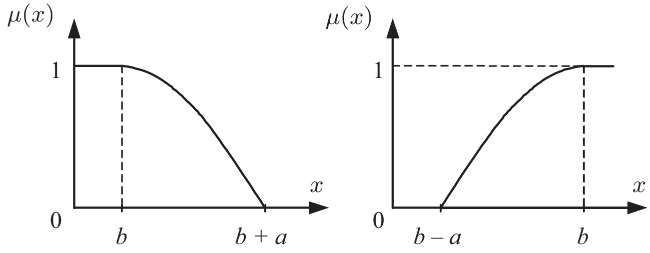


Рис. 2.48. Левая и правая внешние полиномиальные функции принадлежности второго порядка

Левая внешняя полиномиальная функция принадлежности второго порядка определяется по формуле

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x < b, \\ 1 - \left(\dfrac{x-b}{a}\right)^2, & \text{если} \quad b \leqslant x \leqslant (b+a), \\ 0, & \text{если} \quad x > (b+a). \end{cases} \tag{2.50}$$

Левая и правая полиномиальные функции принадлежности второго порядка изображены на рис. 2.48.

Достоинства полиномиальной функции принадлежности второго порядка

1. Функция является непрерывно дифференцируемой во всех точках носителя, а стало быть более гладкой, чем треугольная.
2. Параметры a, b легко задаются экспертным путем.

Недостатки полиномиальной функции принадлежности второго порядка

1. Функция не удовлетворяет в достаточной степени аксиомам Шваба. В частности, ее производная не обращается в ноль в граничных точках носителя (рис. 2.47).
2. Функция симметрична, т. е. для нее может не выполняться условие разбиения единицы.

Чтобы обеспечить выполнение большего числа (в том числе всех) аксиом Шваба, следует воспользоваться **полиномиальной функцией n-го порядка**, где $n = m - 1$, m — число основанных на аксиомах Шваба требований, предъявляемых к функции принадлежности.

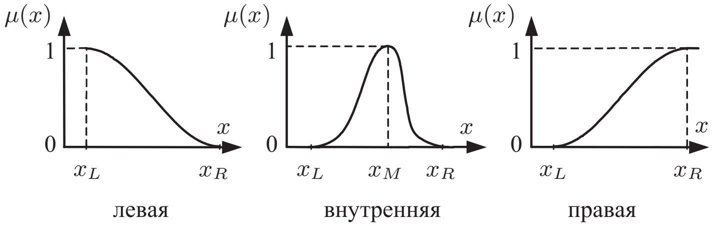


Рис. 2.49. Примеры полиномиальной функции принадлежности

Полиномиальная функция принадлежности n-го порядка задается формулой

$$\mu(x) = \begin{cases} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, & \text{если} \quad x_L \leqslant x \leqslant x_R, \\ 0 \text{ или } 1 & \text{в других случаях.} \end{cases} \tag{2.51}$$

Примеры внешних и внутренней функций принадлежности представлены на рис. 2.49.

Метод построения полиномиальной функции принадлежности рассмотрим на следующем ниже примере.

Пример 2.4.1. Предположим, что к левой полиномиальной функции принадлежности предъявляются следующие основанные на аксиомах Шваба требования (число требований можно варьировать):

1. $\mu(x_L) = 1$, 2. $\mu(x_R) = 0$,
3. $\dot{\mu}(x_L) = 0$, 4. $\dot{\mu}(x_R) = 0$,

где x_L, x_R — заданные узловые точки функции принадлежности, x_M — ее модальное значение.

Для выполнения указанных условий ($m = 4$) следует воспользоваться функцией принадлежности 3-го порядка:

$$\mu(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Производная этой функции имеет вид

$$\dot{\mu}(x) = 3a_3 x^2 + 2a_2 x + a_1.$$

Полагая координаты узловых точек равными $x_L = 0$, $x_R = 1$, приходим к системе четырех уравнений, выражающих предъявленные к функции требования:

1. $a_0 = 1$, 2. $a_1 = 0$,
3. $a_3 + a_2 + 1 = 0$, 4. $3a_3 + 2a_2 = 0$,

решая которую, получаем:

1. $a_0 = 1$, 2. $a_1 = 0$,
3. $a_2 = -30$, 4. $a_3 = 2$.

Окончательно, имеем следующее выражение для функции принадлежности:

$$\mu(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1. \qquad \blacksquare$$

Преимущества полиномиальных функций принадлежности высокого порядка

1. Возможность выполнения накладываемых на функции принадлежности условий, связанных с аксиомами Шваба, положением критической точки ($\mu(x_k) = 0.5$) и др.
2. Возможность значительного повышения точности модели и ее адаптации к моделируемой системе благодаря большому числу степеней свободы полиномиальных функций принадлежности.
3. Повышение возможности получения гладких, непрерывно дифференцируемых поверхностей отклика нечеткой модели.
4. Простота построения асимметричных внутренних функций принадлежности, что позволяет повысить точность моделирования.

Недостатки полиномиальных функций принадлежности высокого порядка

1. Сложность нахождения большого числа параметров, необходимых для задания полиномиальной функции высокого порядка.
2. Невыполнение (вообще говоря) условия разбиения единицы.

- **Рекомендации при выборе функции принадлежности**

Выбор функции принадлежности в значительной мере определяется объемом имеющейся информации о моделируемой системе, а также качеством имеющихся в распоряжении исследователя методов настройки модели.

Малый объем информации о системе

При малом объеме имеющейся информации о системе следует использовать простейшие функции принадлежности, состоящие из прямолинейных участков, для нахождения параметров которых требуется значительно меньшее, по сравнению с остальными функциями принадлежности, количество информации. Кусочно-линейные функции принадлеж-

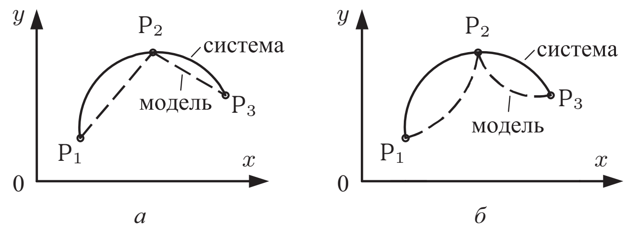


Рис. 2.50. Локально линейная (*а*) и локально нелинейная (*б*) модель системы

ности приводят к получению локально линейных поверхностей отклика модели (при условии правильного выбора других составляющих нечеткой системы), что положительно сказывается на точности моделирования в условиях малого объема исходных данных.

Пример 2.4.1. Пусть известны только три точки поверхности отклика моделируемой системы: P_1, P_2 и P_3 (рис. 2.50).

При отсутствии информации о поведении системы в интервалах между точками P_1, P_2 и P_3 наиболее надежным будет использование модели, состоящей из прямолинейных участков (рис. 2.50, *а*). Использование функций принадлежности с криволинейными участками приведет к поверхности отклика, также содержащей криволинейные участки, однако, вследствие сложности нечетких моделей, будет сложно предугадать величину и направление их кривизны (рис. 2.50, *б*).

Указанное свойство, вообще говоря, негативно отражается на точности моделирования. Идентифицировать же параметры нелинейных функций принадлежности по причине недостатка информации о системе в этом случае часто не удается. ■

Большой объем информации о системе

Наличие большого объема информации о системе в форме измеренных входных и выходных данных дает возможность идентификации большего числа параметров нечеткой модели, что позволяет использовать более сложные функции принадлежности, такие как гауссовы или полиномиальные, и тем самым приводит к моделям более точным, чем в случае простых функций, состоящих из прямолинейных участков. Вместе с тем, для идентификации большого числа параметров нечеткой модели требуются высокоэффективные методы ее адаптации (настройки), которые не всегда имеются в распоряжении исследователя. Кроме того, более сложные функции принадлежности состоят из кривых, что повышает степень нелинейности модели, увеличивая в свою очередь число локальных экстремумов функции ошибок. В результате процесс идентификации сопровождается значительными трудностями, для преодоления которых следует применять достаточно мощные генетические алгоритмы (Davis 1991; Goldberg 1995; Kahlert 1995), которые, однако, не всегда дают удовлетворительные результаты (Preuss 1995) вследствие сложности моделей и наличия у них большого числа степеней свободы. Опыт автора (Piegat 1996,1997a) и других исследователей (Hensel 1995) позволяет говорить о преимуществе в данной ситуации более простых, состоящих из прямолинейных участков функций принадлежности, упрощающих процесс настройки (обучения) нечеткой модели, обеспечивая при этом ее высокую точность.

Некоторые исследователи (Altrock 1993) рекомендуют на начальном этапе построения модели использовать простейшие функции принадлежности, а на последующих этапах проводить тестирование модели с применением более сложных функций для того, чтобы проверить, не приводят ли эти функции к повышению точности модели. Также отметим, что существующее мнение (Altrock 1995; Zimmermann 1994) о том, что вид и форма функции принадлежности не оказывают существенного влияния на точность и качество нечеткой модели, является неверным — об этом также свидетельствуют результаты исследований, приведенные, в частности, в (Baglio 1994; Brown 1994).

2.5. Нечеткие множества типа 2

Если для множества A_1 каждому элементу x области определения X сопоставлено значение $\mu^*_{A_1}(x)$ степени принадлежности этому множеству, лежащее в интервале [0,1] и задаваемое с помощью функции принадлежности

$$\mu_{A_1}(x)\colon X \to [0,1], \tag{2.52}$$

то об A_1 говорят как о нечетком множестве типа 1.

Пример 2.5.1. Множество A_1 = «высокий рост»:

$$X = \{170\,\text{см}, 172.5\,\text{см}, 175\,\text{см}, 177.5\,\text{см}, 180\,\text{см},\ 190\,\text{см}, 200\,\text{см}\},$$

$$A_1 = \left\{\frac{0}{170\,\text{см}}, \frac{0.25}{172.5\,\text{см}}, \frac{0.5}{175\,\text{см}}, \frac{0.75}{177.5\,\text{см}}, \frac{1.0}{180\,\text{см}}, \frac{1.0}{190\,\text{см}}, \frac{1.0}{200\,\text{см}}\right\}.$$

Функция принадлежности множества представлена на рис. 2.51. ■

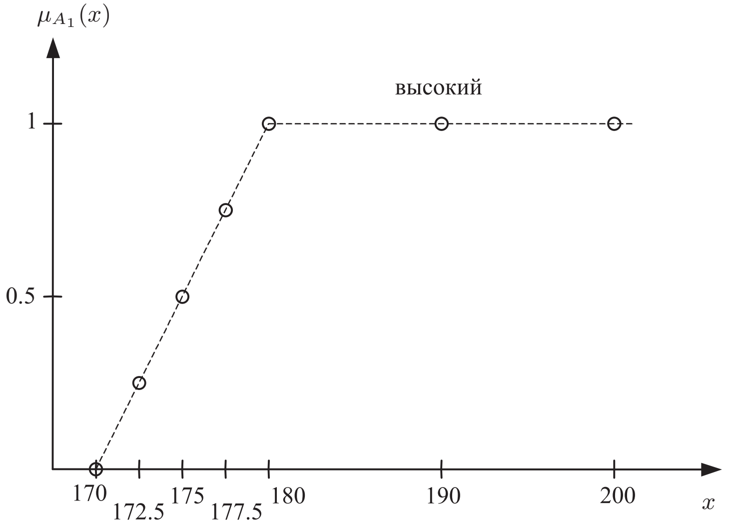


Рис. 2.51. Функция принадлежности нечеткого множества типа 1 «высокий рост»

Однако не всегда возможно определить степень принадлежности точно, в числовой форме — иногда это можно сделать только лингвистически, используя нечеткую меру.

Пример 2.5.2. $X = \{\text{Эндрю, Бен, Чарли}\} = \{x_1, x_2, x_3\}$ — множество студентов,
$L = \{\text{низкая, средняя, высокая}\} = \{l_1, l_2, l_3\}$ — множество нечетких степеней принадлежности нечеткому множеству «способных студентов»,
A_2 — множество «способных студентов»:

$$A_2 = \left\{ \frac{\text{высокая}}{\text{Эндрю}}, \frac{\text{средняя}}{\text{Бен}}, \frac{\text{низкая}}{\text{Чарли}} \right\} = \left\{ \frac{l_3}{x_1}, \frac{l_2}{x_2}, \frac{l_1}{x_3} \right\}.$$

Нечеткие степени принадлежности множеству «способных студентов» можно наглядно представить так, как это показано на рис. 2.52.

Множество «способных студентов» можно графически представить в соответствии с рис. 2.53.

При оценке способностей студентов обычно трудно точно оценить степень принадлежности конкретного студента множеству «способных студентов», в виде, например:

$$\mu_{A_2}(\text{Эндрю}) = 0.99.$$

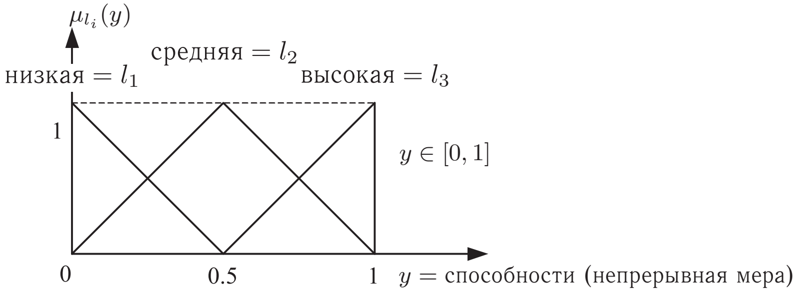


Рис. 2.52. Наглядное представление функций принадлежности нечетких степеней принадлежности μ_{li} в множестве «способных студентов»

Единственной разумной формой измерения принадлежности в данном случае будет ее нечеткая оценка с использованием значений «высокая», «средняя» или «низкая». ■

Другие примеры использования нечетких степеней принадлежности:
- множество привлекательных девушек,
- множество опасных или безопасных периодов для государства,
- множество кредитоспособных клиентов банка.

Если степени принадлежности $\mu_A^*(x)$ нечеткому множеству A задаются с помощью нечетких мер (также являющихся нечеткими множествами), то A называется нечетким множеством типа 2. Нечеткое множество типа 2 представляет собой множество пар (2.53) вида:

(нечеткая степень принадлежности элемента x множеству A_2, элемент x).

Индекс 2 в обозначении множества используется, чтобы отличить его от множеств типа 1:

$$A_2 = \left\{(\mu_{A_2}^*(x), x)\right\}, \quad \forall x \in X, \tag{2.53}$$

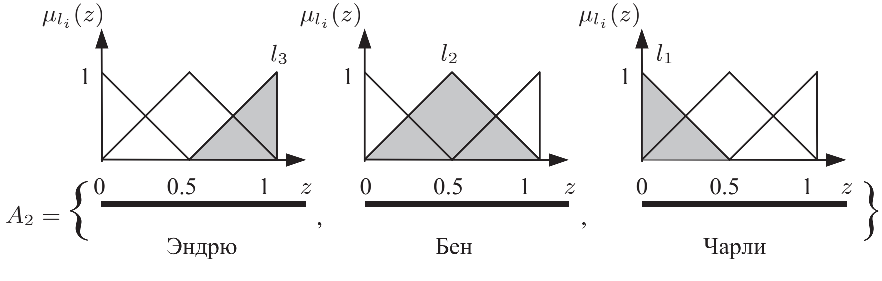


Рис. 2.53. Графическая форма представления множества «способные студенты»

где $\mu^*_{A_2}(x)$ — степень принадлежности элемента x множеству A, задаваемая с помощью функции принадлежности $\mu_{A_2}(x)$ вида:

$$\mu_{A_2}(x)\colon X \to L, \tag{2.54}$$

где X — область определения множества A_2,
$L = \{l_1, \ldots, l_m\}$ — множество нечетких значений степени принадлежности A_2,
$\{(\mu^*_{l_i}(y), y)\}$ — нечеткая степень принадлежности множеству A_2,
$\mu_{l_i}(y)$ — функция принадлежности нечеткой степени принадлежности l_i множеству A_2,
Y — область определения нечетких степеней принадлежности,
$y: \quad y \in Y$.

Функция принадлежности множества типа 1 зависит от одной переменной $x \in X$, в то время как функция принадлежности множества типа 2 является функцией двух переменных вида:

$$\mu_{A_2}(x, y)\colon X \to L, Y \to L. \tag{2.55}$$

Пример 2.5.3. X — множество проезжающих мимо автомобилей, обозначаемых c_i, $i = 1, 2, 3, 4$; $X = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$; A_2 — множество автомобилей, превышающих допустимую скорость $V = 60$ км/ч;

$$A_2 = \left\{\frac{N}{c_1}, \frac{Y}{c_2}, \frac{Y}{c_3}, \frac{N}{c_4}\right\},$$

где N («нет») соответствует скорости, лежащей в допустимых пределах ($V \leqslant 60$ км/ч), Y («да») соответствует скорости, превышающей ограничение ($V > 60$ км/ч), $L = \{N, Y\}$ — множество нечетких степеней принадлежности.

Измерение скорости производит инспектор полиции, оценивая ее значения с точностью ± 10 км/ч. На рис. 2.54 представлена функция принадлежности $\mu_L : V \to L$. ■

Нечеткие множества типа 2 можно использовать при моделировании систем, для которых возможна оценка значений входных и/или выходных величин с помощью нечетких мер (рис. 2.55).

Подобная форма оценивания имеет место, например, в экономических и политических системах, когда в условиях недостатка информации приходится руководствоваться в основном интуицией. Поскольку нечеткие степени принадлежности («малая», «средняя», «большая») можно представить в виде нечетких чисел, нечеткие множества типа 2 можно преобразовывать на основе принципа обобщения либо упрощенных методов

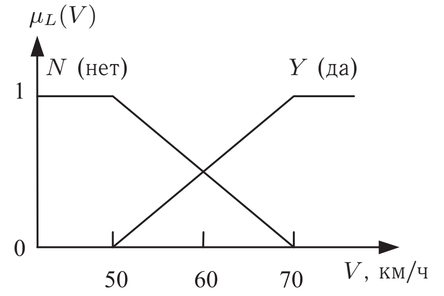


Рис. 2.54. Функции принадлежности нечетких степеней принадлежности множеству автомобилей, превышающих допустимую скорость

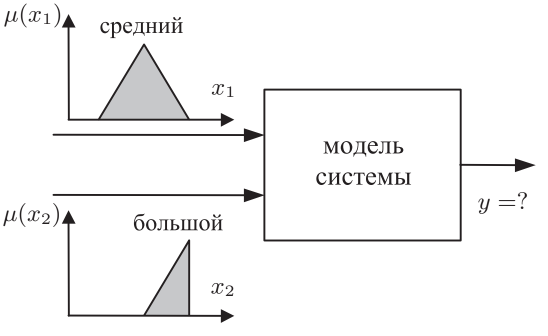


Рис. 2.55. Моделирование системы с использованием нечетких оценок входных величин

(L-R-представления). Более подробную информацию по данному вопросу можно найти в (Kacprzyk 1986; Zimmermann 1994a).

2.6. Два вида неопределенности — нечеткость и вероятность

Поскольку нечеткость часто путают с вероятностью, следует коснуться различий между этими двумя понятиями. Среди существующих видов неопределенности выделяют, в частности, следующие два (Altrock 1993):

1. стохастическая неопределенность,
2. лексическая неопределенность.

Примером стохастической неопределенности может служить утверждение:

Вероятность выиграть главный приз в лотерее «6 из 49» составляет 1/13983816.

Событие «выигрыш главного приза» является в данном случае точно определенным и означает наличие шести правильно угаданных номеров. Точное значение вероятности наступления данного события можно вычислить (Empacher 1970), зная число всех сочетаний из 6 элементов множества, содержащего 49 элементов ($m = 6$, $n = 49$):

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}\,. \tag{2.56}$$

Стохастическая неопределенность в данной ситуации проявляется в виде вероятности возникновения конкретного, **точно определенного** события, состоящего в выигрыше главного приза или, что то же самое, правильном угадывании шести номеров.

Пример лексической неопределенности

В утверждении «*Вероятность выиграть большую сумму в лотерею „6 из 49“мала*» присутствуют два понятия:

1) большая сумма выигрыша,
2) малая вероятность.

Оба эти понятия являются нечеткими, неточными и зависят от субъективных представлений того, кто их выражает. Так, человек со средним достатком будет считать большой суммой ту, которую можно выиграть, угадав четыре или пять номеров, человек же с достатком выше среднего будет относить сюда только выигрыш при угаданных шести номерах.

Точно определить понятие «малая вероятность» в данном случае также представляет собой сложную задачу, поскольку большинство играющих в лотерею не задумываются не только о точном числовом значении вероятности выиграть главный приз, вычисляемом по формуле (2.56), но даже и о приближенном ее значении, оценивая данную величину интуитивно, на основе степени своей уверенности в выигрыше. Тот, у кого эта степень высокая, в лотерее участвует, тот же у кого она низкая, от участия отказывается.

Из рассмотренных примеров видно, что нехватка точной информации об окружающей действительности не является препятствием для деятельности человека и принятия им решений. На протяжении многих лет ведется разработка точных математических моделей различных явлений окружающего мира, но говорить об успешных результатах моделирования можно лишь для малой их части, поскольку построение модели явления требует наличия большого количества информации о нем.

Вместе с тем, человек, независимо от уровня своей образованности, способен эффективно моделировать в своем воображении как окружающую действительность, так и работающие механизмы, машины, автомобили, летательные аппараты и т. п. Подобного рода модели основаны на использовании таких понятий, как:

- большой, малый,
- привлекательный, отталкивающий,
- разумный, неразумный,
- подобный X, непохожий на X и др.

Все они представляют собой неточные лексические понятия, и их оценка зависит от способа описания человеком действительности. Чем шире словарный запас человека, тем точнее формулировки, используемые им в описании интересующих его объектов окружающего мира.

Сказанное можно подытожить следующим образом:

- стохастическая неопределенность означает неопределенность появления события, которое является само по себе точно описанным,
- лексическая неопределенность означает неопределенность в описании события.

Неопределенность описания означает его нечеткость, и теория нечетких систем занимается методикой построения моделей с применением нечетких понятий, используемых человеком. Отметим здесь, что, помимо лексических нечетких понятий, человек также использует интуитивные понятия и образы, вообще не имеющие словесного описания. Люди, не знающие ни одного языка, также как и животные, строят информационные образы объектов окружающего мира на интуитивном, отличном от лексического, уровне, и такие образы позволяют им в этом мире жить и действовать. Развитием теории нечеткого моделирования в будущем может стать теория **интуитивного моделирования**.

Различие между нечеткостью и вероятностью проиллюстрируем также с помощью следующего примера, основанного на (Bezdek 1993).

Пример 2.6.1. Обозначим через X множество всех жидкостей, через A_D — множество жидкостей, пригодных для питья, и через A_N — множество жидкостей, для питья не пригодных.

Степень принадлежности ключевой воды множеству A_D равна 1, а степень ее принадлежности A_N равна 0. Допустим, что речную воду, взятую из устья Вислы, можно отнести к питьевой со степенью 0.6 (ее пьют дикие водоплавающие птицы) и к непригодной для питья — со степенью 0.4, и что сосуд A наполнен именно такой водой.

Степень принадлежности соляной кислоты множеству A_D равна 0, а степень ее принадлежности A_N равна 1. Пусть мы извлекли сосуд B из корзины, содержащей 10 сосудов, 6 из которых наполнены ключевой водой, а остальные 4 — соляной кислотой. Вероятность извлечь сосуд с жидкостью, пригодной для питья, равна 0.6.

Пусть мы должны выбрать один из следующих двух сосудов:

Сосуд A	Сосуд B
$\mu_{A_D}(A) = 0.6$	$P_{A_D}(A) = 0.6$

где $\mu_{A_D}(A)$ — степень принадлежности содержимого сосуда A множеству A_D жидкостей, пригодных для питья,

$P_{A_D}(A)$ — вероятность того, что сосуд B содержит пригодную для питья жидкость.

Что следует выбрать, если употребление жидкости из сосуда A опасно для здоровья, а употребление жидкости из сосуда B опасно для жизни? ■