Фундаментальная и прикладная математика

Юрий Вячеславович Решетов

ТЕОРЕМА О НАЛИЧИИ ПАМЯТИ У СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Первая редакция

г. Ташкент

Оглавление

Формулировка теоремы

Предположим, что мы играем в игру, где на столе лежат 2 * n (большое чётное число) запечатанных конвертов, содержимого которых мы не знаем. В каждом конверте лежит записка с указанным целым числом (все числа разные и не обязательно натуральные).

Сначала мы можем взять любой произвольный конверт и вскрыв его, ознакомиться с числом указанным на спрятанной в нём записке.

После этого крупье, также ознакомившись с числом на записке заменяет все прежние конверты на другие, таким образом, чтобы их количество осталось прежним (2 * n), а числа на записках, запечатанных в конверты, в количестве n штук были меньше значения числа из записки в распечатанном прежде конверте и в количестве n штук имели большее значение.

Наша задача заключается в том, выбрав один из новых (заменённых) конвертов, прежде, чем вскрыть его, угадать будет ли значение числа, указанное на записке в выбранном конверте больше либо меньше значения числа в прежде раскрытом конверте.

Если, после вскрытия второго конверта выяснится, что мы дали правильный ответ, то крупье выплачивает нам сумму в размере X денежных единиц. Если результат нашего прогноза оказался неудачным, то мы выплачиваем крупье X денежных единиц.

Любой, кто изучал теорию вероятности, скажет, что в данном случае мы имеем дело со случайными последовательностями чисел. Также он может добавить, что в данной игре последовательности чисел «не имеют памяти», поскольку вероятность правильного ответа не зависит от значений чисел указанных на записках в предыдущих вскрытых конвертах и «равна» значению ½. Ну и конечно же, если такого «знатока» спросить о математическом ожидании выигрыша в подобной игре, то он заявит, что игра «честная» и математическое ожидание в ней «нулевое».

Однако это не совсем верно. Если у нас всего одна единственная попытка угадать разницу между значением числа, указанного на записке в предыдущем вскрытом конверте и в следующем, ещё пока не распечатанном конверте, то «знаток» теории вероятностей окажется прав. Но если таких попыток более одной или нам будет разрешено прежде, чем дать ответ, ознакомиться с содержимым не одного, а последовательно двух или более конвертов, то выяснится, что слухи об амнезии у случайной последовательности могут оказаться неверными.

Чтобы выяснить, при каких обстоятельствах случайные ряды имеют память, а при каких амнезию, необходимо провести исследования различных случаев.

Теорема: Невозможность получить ненулевое математическое ожидание в игре в случае ставок на неизвестные будущие значения случайного ряда при знании одного единственного прежнего значения этого ряда, вовсе не доказывает, что значения в ряду не имеют памяти, если известно более одного прежнего значения ряда.

Первый случай — ставка на бинарный исход

Пусть у нас есть некое множество случайных чисел, такое, что в нём нет двух или более равных значений. Выберем случайным образом два из них, сначала x_1, потом x_2. Пусть у нас имеется другое множество случайных чисел, в котором нет ни одного числа равного по значению x_2, но такое что ровно половина чисел в этом множестве имеет значения больше значения x_2, а другая половина меньше.

Прежде, чем выбрать случайным образом число x_3 из второго множества, мы должны попытаться сделать денежную ставку, на один из двух (бинарных) исходов: будет ли значение x_3 больше, чем значение x_2, либо не будет. В случае если мы угадаем исход, после того, как станет известным значение x_3, то выиграем денежную сумму в размере сделанной ставки. Если не угадаем, то проиграем денежную сумму в том же самом размере.

Впрочем, мы не будем гадать, а будем строго придерживаться стратегии:

1. Если $x_2 > x_1$, то делаем ставку на $x_3 < x_2$
2. Если $x_2 < x_1$, то делаем ставку на $x_3 > x_2$

Чтобы разобраться, составим таблицу всех возможных (взаимоисключающих) вариантов значений чисел x_1, x_2 и x_3. Но поскольку все числа у нас разные, то одно из них имеет минимальное значение, другое среднее, а ещё одно максимальное, т. е. вполне достаточно и этих категориальных обозначений. Поэтому в таблице мы разместим лишь обозначения, указывающие на принадлежность значений к вышеуказанным категориям. Существует всего шесть возможных (взаимоисключающих) способов последовательного расположения максимального, среднего и минимального значений (красным цветом обозначены варианты в которых соблюдается условие: $x_2 > x_1$):

Вариант	x_1	x_2	x_3	Результат прогноза
1	Минимальное значение	Среднее значение	Максимальное значение	Проигрыш
2	Минимальное значение	Максимальное значение	Среднее значение	Выигрыш
3	Среднее значение	Минимальное значение	Максимальное значение	Выигрыш
4	Среднее значение	Максимальное значение	Минимальное значение	Выигрыш
5	Максимальное значение	Минимальное значение	Среднее значение	Выигрыш
6	Максимальное значение	Среднее значение	Минимальное значение	Проигрыш
			Итого:	Вероятность выигрыша равна 2/3

При равновероятных исходах для вариантов таблицы теорема доказана

Второй случай — ставка на разницу

В прикладных задачах не всегда можно сделать ставку на «больше либо меньше». Гораздо чаще встречается возможность ставки на разницу значений. К тому же, некоторые игры в которых можно найти оптимальную стратегию с целью получения положительного матожидания при ставках на «больше либо меньше», теряют возможность получения преимущества при ставках на разницу и становятся честными. Например, нетранзитивные «парадоксы» теряют свою «парадоксальность», если размер выигрыша и проигрыша привязать к разнице полученных игроками очков.

Поэтому необходимо проверить, сохраниться ли возможность получения преимущества в вышеуказанной игре.

Правила игры остаются прежними, за исключением того, что теперь при расчётах размер ставки умножается на абсолютную разницу между значениями x_2 и x_3. Стратегия также остаётся прежней.

Обозначим разницы:

- Между минимальным и средним значением, как A
- Между максимальным и средним значением, как B
- Между минимальным и максимальным значением, соответственно как A + B

Составим ещё одну таблицу:

Вариант	x_1	x_2	x_3	Размер выигрыша
1	Минимальное значение	Среднее значение	Максимальное значение	-B
2	Минимальное значение	Максимальное значение	Среднее значение	B
3	Среднее значение	Минимальное значение	Максимальное значение	A + B
4	Среднее значение	Максимальное значение	Минимальное значение	A + B
5	Максимальное значение	Минимальное значение	Среднее значение	A
6	Максимальное значение	Среднее значение	Минимальное значение	-A
			Итого:	2 * (A + B)

Как видно по результатам, придерживаясь прежней стратегии, мы получили опять положительное матожидание при условии равновероятности вариантов из таблицы. И в данном случае теорема доказана.

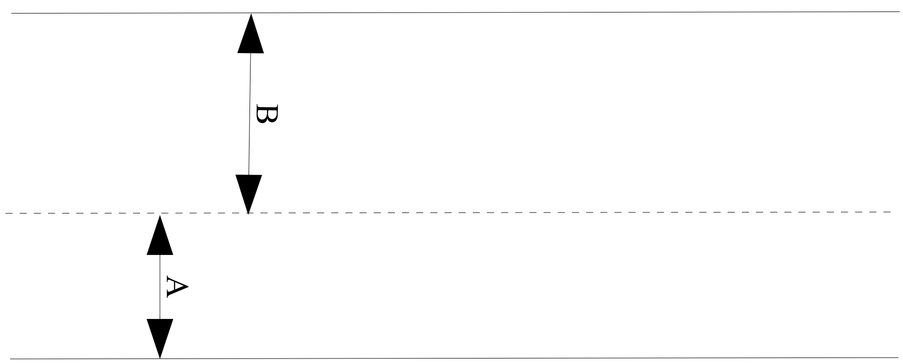
Третий случай — ставка при неравновероятных вариантах

До сих пор мы рассматривали лишь возможности в которых все шесть вариантов перестановок категориальных значений были равновероятны.

Но на практике и такое не всегда возможно. Например, если взять примитивную схему Бернулли, в которой, как известно, за одну единицу времени значение случайной величины может измениться с равными вероятностями на некоторое фиксированное (константное) значение либо в сторону уменьшения, либо в сторону увеличения.

В таком случае, если мы случайным образом будем наблюдать два значения схемы в разное время, то вероятность абсолютной разницы значений между ними будет уменьшаться по мере роста значений самой разницы.

Чтобы проще разобраться с этим вопросом, лучше привести графический пример:



На вышеуказанном рисунке обозначен уровень начального значения величины в схеме Бернулли. Пусть значение может уменьшиться на величину A, либо увеличиться на величину B. В таком случае вероятность того, что значение уменьшится на величину A, раньше чем успеет увеличиться на величину B, произойдёт с вероятностью:

$$p_A = B / (A + B)$$

А вероятность того, что значение увеличиться на величину B, раньше чем успеет уменьшиться на величину A произойдёт с вероятностью:

$$p_B = A / (A + B)$$

Поскольку у нас величины изменений уже известны, то можно приступить к анализу вероятностей вариантов.

Повторим прежную таблицу, чтобы удобнее было разбираться:

Вариант	x_1	x_2	x_3	Размер выигрыша
1	Минимальное значение	Среднее значение	Максимальное значение	-B
2	Минимальное значение	Максимальное значение	Среднее значение	B
3	Среднее значение	Минимальное значение	Максимальное значение	A + B
4	Среднее значение	Максимальное значение	Минимальное значение	A + B
5	Максимальное значение	Минимальное значение	Среднее значение	A
6	Максимальное значение	Среднее значение	Минимальное значение	-A
			Итого:	2 * (A + B)

В первом варианте мы видим, что значение x_2 изменилось по сравнению со значением x_1 на величину A. После чего направление изменения величины осталось прежним, но разница между значением x_3 и x_2 стала равной B.

А теперь смотрим на третий вариант, в котором, также, как и в первом варианте, разница, т. е. изменение между x_2 и x_1 равна A, после чего направление изменения значения стало противоооложным и разница между x_3 и x_2, стала равной величине A + B.

Поскольку первое изменение величины у обоих вариантов одинаково по абсолютному значению, то вероятность такого события у обоих вариантов совершенно одинакова. Но потом в первом варианте направление изменения величины осталось прежним, а в третьем варианте сменилось на противоположное. Соответственно мы можем подсчитать и вероятности, а через них и математическое ожидание выигрыша для первого и третьего вариантов для разниц между x_3 и x_2.

Оно будет равно:

$$(p_3 * (A + B) - p_1 * B) * p_x$$

где:

p_x – вероятность изменения на величину A между x_1 и x_2
p_1 – вероятность изменения на величину B между x_3 и x_2 в первом варианте
p_3 – вероятность изменения на величину A + B между x_3 и x_2 в третьем варианте

Поскольку в первом и в третьем варианте движения разнонаправлены, то очевидно, что вероятности p_1 и p_3 имеют значения:

$$p_1 = (A + B) / (A + 2 * B)$$

$$p_3 = B / (A + 2 * B)$$

В таком случае матожидание для обоих вариантов будет равным:

$$(B * (A + B) – (A + B) * B) \ * p_x / (A + 2 * B) = 0$$

Теперь рассмотрим четвертый и шестой варианты. У них первоначальное изменение между x1 и x2 совпадает и равно значению B. Различаются только второе изменение значений между x2 и x3, причём и по направлению и по знаку к прежнему изменению. Далее можно уже не считать матожидание для этих вариантов, поскольку оно также будет нулевым.

В результате чего у нас осталось только два варианта с ненулевым матожиданием: второй и пятый. У обоих величина выигрыша положительна. А соответственно и совокупное матожидание для всех вариантов таблицы также будет положительным.

Следовательно, и для случаев неравновероятных вариантов мы тоже можем иметь преимущество. Теорема опять доказана.

Выводы

Случайный ряд имеет память при условии всего двух наблюдений прежних чисел ряда с целью предсказать последующее значение в ряду, в том случае, если его матожидание:

$$(p_2 - p_1) * B + (p_3 + p_4) * (A + B) + (p_5 – p_6) * A \neq 0$$

где:

p_i – вероятность появления в ряду i-го варианта из таблицы
A и B - произвольные неотрицательные числа