MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
n^o26/27 – junho/dezembro 1999 – pp. 67-121

Modelos Matemáticos em Finanças: Avaliação de Opções

Sérgio B. Volchan [1]

Resumo

Apresentamos um modelo dinâmico para um mercado financeiro em tempo discreto. Discutimos o problema da avaliação de derivativos através relação entre arbitragem e martingais. Finalmente, examinamos uma aplicação ao chamado modelo binomial multiperiódico, que é a versão em tempo discreto do modelo de Black-Scholes-Merton. O enfoque, de natureza teórico-conceitual, visa ressaltar o uso de idéias e técnicas matemáticas na construção de modelos em finanças, chamando a atenção para as hipóteses simplificadoras, tanto econômicas quanto matemáticas.

1 Introdução

Os últimos vinte anos testemunharam uma revolução sem precedentes na dinâmica e estrutura dos mercados financeiros. Em boa parte, ela adveio dos grandes desequilíbrios da economia mundial no início dos anos 70 e que marcaram o fim da era dourada do capitalismo no século XX [16]. A crise do petróleo, os endividamentos, os déficits, a inflação e as variações das taxas de juros e do câmbio perturbaram grandemente as projeções dos investidores. Por outro lado, o colapso do sistema Bretton-Woods ([28, 30]) para gestão de taxas de câmbio (em 1971 Nixon decretou a não-convertibilidade do dólar e portanto o fim do padrão-ouro) resultou na instabilidade destas taxas e acelerou a drástica desregulamentação do movimento internacional de capitais especulativos.

Paralelamente, a revolução científico-tecnológica, particularmente nas áreas de microeletrônica, informática e telecomunicações, alterou profundamente as relações espaço-temporais entre os diversos mercados financeiros. Estabeleceu-se assim um mercado mundial com movimentação quase instantânea de volumes astronômicos de capitais, no qual as transações são feitas simultaneamente e em tempo real nas bolsas de Nova Iorque, Londres, Tóquio, Paris, Frankfurt, Singapura, São Paulo, etc. Além disso, trata-se de um mercado "vinte e quatro horas" já que as diferenças de fuso horário não são mais um impedimento para a realização de negócios.

O impacto dessas transformações tem sido tremendo. Verificou-se uma verdadeira inversão das relações entre as finanças e a economia como um todo: de um ramo subordinado à microeconomia o setor financeiro passou a ter cada vez mais importância e autonomia. Se por um lado o estabelecimento de mercados financeiros altamente ativos, competitivos e com grande liquidez, envolvendo a participação de diversos agentes, criou grandes oportunidades de investimento, por outro trouxe também grande incerteza e insegurança devido à natureza extremamente volátil destes mercados. Empreendimentos locais e até mesmo economias inteiras tornaram-se vulneráveis às flutuações imprevisíveis do mercado financeiro.

Nesse novo panorama o **risco** é considerado como um aspecto inevitável ou mesmo inerente ao jogo econômico (para uma discussão das implicações disto, ver [4, 13]). Conseqüentemente, o *gerenciamento de riscos* tornou-se vital para os agentes econômicos. É preciso ser capaz de identificar e medir os riscos, decidir quais riscos evitar e em quais apostar de acordo com o retorno desejado, criar estratégias de investimento adaptadas às diversas situações, etc. Isso estimulou a elaboração e o aperfeiçoamento de novos e complexos **instrumentos financeiros** que permitem uma melhor administração de investimentos. De grande importância são os chamados instrumentos **derivativos**, que são ativos cujo valor deriva de outros ativos. Os exemplos mais comuns são os contratos de opção, contratos futuros e "swaps". Ocorre que a análise destes utilizam idéias e técnicas matemáticas bastante sofisticadas, indo muito além da matemática tradicionalmente empregada nos problemas clássicos de finanças. Dessa forma, é cada vez maior a demanda de matemáticos, físicos e engenheiros na formulação e desenvolvimento de modelos e técnicas em finanças , em serviços consultoria ou mesmo seu recrutamento por firmas de investimento. O impacto desta alteração na comunidade matemática mereceria um estudo à parte.

O uso de técnicas matemáticas em Economia não é um fato realmente novo. Já na primeira metade do século XIX, Cournot (1838) e Dupuit (1844) propõem uma formulação matemática para o problema da oferta versus procura em um mercado isolado [15]. A concepção da Economia como a disciplina que estuda de que forma as sociedades alocam os seus recursos *escassos* para a produção de bens e como estes são distribuídos levou, por volta de 1870, à tentativa de descrever como as preferências do consumidor (suas "utilidades") determinam sua procura por bens. O modelo microeconômico mais comum, chamado modelo da utilidade esperada [12], leva naturalmente a um problema de otimização: achar os máximos/mínimos de uma função sob certas restrições. Este modelo, proposto inicialmente por Walras (1874) foi desenvolvido por Pareto (1879), Slutsky (1915), Fisher (1892), Hotelling (1932), Frisch (1932), Hicks e Allen (1934), Samuelson (1947) e von Neumann (1944). De grande importância foi a formulação por Walras (1874-1877) do *problema do equilíbrio geral* de mercados[2], em que a economia como um todo é descrita através da solução de um certo sistema de equações. Entretanto, o primeiro tratamento matemático do problema da existência e unicidade das soluções das equações de Walras, surge quase meio século depois em um trabalho de Wald (1936).

Ao final da segunda guerra mundial a tendência de *matematização da teoria econômica*, caracterizada por uma crescente abstração e rigor analítico, ganhou novo ímpeto [10] sob a liderança das escolas americana e francesa. O ano de 1944 é um marco desta nova fase com a publicação do livro "*The Theory of Games and Economic Behavior*" por John von Neumann e Oskar Morgenstern. É sintomático o fato de von Neumann ter sido um dos mais brilhantes matemáticos de sua geração, tanto na área pura quanto na aplicada[3]. Além da novidade do uso do método axiomático para a formulação de modelos econômicos, a possibilidade de tratar problemas de decisão estocásticos viria a ter grande impacto em economia matemática.

[2] A noção de equilíbrio ótimo de mercados remonta à Adam Smith (1776).

[3] Trabalhou em Lógica matemática, Teoria Ergódica, Mecânica Quântica, Análise Funcional, Teoria dos Grupos e Teoria da Computação. Foi chefe da comissão de energia atômica do governo americano além de coordenar projetos pioneiros de construção dos primeiros computadores eletrônicos.

Outro grande avanço, já nos anos cinqüenta, foi a demonstração completa da existência do equilíbrio em modelos com vários agentes por Arrow e Debreu (1954) (e que lhes valeria o prêmio Nobel de Economia). Esses resultados, assim como desenvolvimentos posteriores, fazem uso de ferramentas matemáticas sofisticadas, incluindo desde a análise clássica, topologia, análise convexa, teoremas de ponto fixo, teoria da medida e integração e análise funcional, até a análise não-standard e a teoria da probabilidade.

Esses desenvolvimentos não puderam deixar de influenciar a área de finanças. Até meados deste século a **Teoria de Finanças** utilizava a matemática adequada aos problemas de atuária e contabilidade: cálculo de juros, pensões e anuidades, com ênfase em administração e incremento de fundos. As ferramentas se limitavam ao conhecimento de cálculo diferencial e integral e estatística básica. Em linhas gerais, na segunda metade do século ocorreram desenvolvimentos em duas vertentes principais, dependendo do modelo econômico envolver ou não condições de incerteza. Isto é, envolvendo ou não técnicas *probabilísticas*.

Por exemplo, Fisher (1930), Modigliani e Miller (1958, 1961, 1963) tratam problemas de otimização para investidores individuais e corporações utilizando técnicas matemáticas para análise de máximos e mínimos de funções de várias variáveis na presença de vínculos. Markowitz (1952), em seu trabalho clássico sobre problemas de decisão sob incerteza para indivíduos, relacionado à composição de carteiras, utiliza noções de estatística (variância e covariância) para estimar o risco versus retorno de ações, estudando o papel da diversificação de carteiras de investimento no célebre modelo CAPM ("Capital Asset Pricing Model").

Em seguida Sharpe[4] (1964) e Lintner desenvolvem as idéias de Markowitz a fim de explicar o comportamento de investidores em um mercado em *equilíbrio*. A noção de equilíbrio é formalizada por Ross (1976) através do conceito de *arbitragem* no modelo APM ("Arbitrage Pricing Model"). Intuitivamente, um mercado em equilíbrio é aquele no qual não existem oportunidades de arbitragem, isto é, de obtenção de ganhos sem riscos ("não existe almoço de graça"). Nesses trabalhos são empre-

[4]Em 1990 Markowitz, Sharpe e Miller dividem o Nobel de Economia, pela primeira vez concedido na área de finanças.

gados conceitos probabilísticos como uma ferramenta básica de análise, controle e estimativa de **riscos**[5].

Entretanto, o ano de 1973 é um marco na teoria e na aplicação de novas idéias na Teoria de Finanças devido tanto a eventos institucionais quanto acadêmicos de grande repercussão. Do ponto de vista institucional, tem-se a inauguração em 19 de abril da CBOE (Chicago Board Option Exchange): a primeira bolsa dedicada à negociação de **contratos de opção**. Operando em sua abertura com 911 opções de compra sobre 16 tipos de ações, em 1987 já movimentava 700.000 contratos por dia envolvendo 70 milhões de cotas. Em duas décadas o mercado mundial de derivativos atingiria dimensões gigantescas: em 1996 negociou-se 796 milhões de contratos de opção. Segundo o BIS (Bank for International Settlements), já em 1992 o montante negociado mundialmente no setor de derivativos era da ordem de 4 trilhões de dólares [6].

Do ponto de vista acadêmico, também em 1973 aparecem duas publicações de enorme impacto para a análise teórica de contratos de opção [3]: o artigo "*The Pricing of Options and Corporate Liabilities*" de Black e Scholes, e "*Theory of Rational Option Pricing*" de Merton, pelos quais receberiam o prêmio Nobel de Economia de 1997. Nestes trabalhos eles procuraram estabelecer o chamado "*preço justo*" ou "*preço racional*" para opções européias obtendo a famosa **fórmula de Black-Scholes** e desenvolvem o conceito correlato de estratégia de *cobertura* ("hedging"). Apesar do seu caráter teórico e acadêmico, estes trabalhos tornaram-se quase que imediatamente parte do arsenal cotidiano das mesas de operações financeiras. Além disso, estimularam uma explosão de outros trabalhos que tratam de tipos mais complicados de contratos de opções e de outros derivativos.

Do ponto de vista das técnicas matemáticas estes desenvolvimentos realçaram definitivamente o papel fundamental da teoria dos *processos estocásticos* em modelos do mercado financeiro. A **Teoria dos Processos Estocásticos** é um tópico central, vasto e complexo da moderna **Teoria da Probabilidade**. Desenvolvida básicamente nesse século [27],

[5] A necessidade de quantificar a noção de risco já existia desde a época das grandes navegações marítimas, empreendimentos bastante incertos e que levantavam problemas ligados aos prêmios de seguros [2].

[6] Este valor é uma fração do valor nominal de todas as ações, bônus, moeda e outros ativos subjacentes aos derivativos negociados mundialmente, estimado em 1995 (pela mesma instituição) ser da ordem de 56 trilhões de dólares.

ela atraiu os esforços de renomados pesquisadores da área. Devido à sua natureza particularmente abstrata e de suas técnicas complexas pode parecer surpreendente que ela tenha qualquer relevância para um campo tão "mundano" como finanças. Entretanto, como se observa em vários ramos da Matemática "pura", o estudo de teorias abstratas freqüentemente se origina de problemas "aplicados" como, por exemplo, em Física. No caso da teoria dos processos estocásticos a conexão com finanças é ainda mais estreita. É um fascinante exemplo das surpreendentes interrelações entre idéias aparentemente estanques. Vale a pena descrever sucintamente essa estória.

No início do século havia grande interesse em resolver o problema de predizer como evoluem os preços de ativos financeiros, por exemplo, bônus e ações. É óbviamente vantajoso para um investidor ser capaz de prever preços pois desta forma poderia escolher os melhores ativos reduzindo seu risco a zero. A crença na possibilidade de previsão era bastante difundida até meados desse século e fez a fortuna de muitos consultores da chamada "análise técnica". Entretanto, no ano de 1900 o francês Louis Bachelier (1870-1947) defendia na Sorbonne sua tese de doutorado intitulada "*Théorie de la Speculation*" na qual estudava as **flutuações** nos preços das ações negociadas na bolsa de valores de Paris (ver [34]). Nesse trabalho pioneiro[7] ele propunha que tal evolução era na verdade um processo **aleatório**, semelhante a um jogo de azar[8].

Mais precisamente, Bachelier sugeria que o preço da ação num instante de tempo t, denotado por S_t, seria, para cada $t \geq 0$, uma *variável aleatória*. Uma variável aleatória é uma grandeza cujos valores ocorrem de acordo com uma certa **distribuição de probabilidade**[9]. A coleção $\{S_t\,,\ t \geq 0\}$ é o que chamamos um **processo estocástico**, ou seja, uma família de variáveis aleatórias indexadas por t. Além disso, Bachelier propôs que tal família satisfazia o "efeito $\sqrt{\Delta t}$", isto é, se definirmos a variação de preço da ação entre os instantes t e $t + \Delta t$ por $\Delta S_t =$

[7] A axiomatização da Teoria da Probabilidade e, em seguida, o estudo rigoroso dos Processos Estocásticos só ocorreria a partir do trabalho do matemático russo Andrei Kolmogorov em 1933.

[8] Isso não significa que os preços variam arbitrariamente mas que obedecem às leis matemáticas da Probabilidade.

[9] Por exemplo, ao lançar um dado honesto a grandeza "número da face virada para cima" é uma variável aleatória com valores possíveis no conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ cada um dos quais com probabilidade de ocorrência de $1/6$.

$S_{t+\Delta t} - S_t$, então

$$\Delta S_t \approx \sqrt{\Delta t},$$

onde a identidade ocorre num certo sentido probabilístico. Em linguagem moderna o que ele efetivamente propôs foi um **modelo matemático** no qual a evolução temporal dos preços é solução de uma **equação diferencial estocástica** [26], a saber

$$dS_t = \mu(t)\, dt \;+\; \sigma(t)\, dW_t.$$

Aqui $\mu(\cdot)$ e $\sigma(\cdot)$ são certas funções usuais enquanto que o processo estocástico $\{W_t,\, t \geq 0\}$, é tal que ΔW_t tem distribuição normal (ou Gaussiana) com esperança $\mathbf{E}[\Delta W_t] = 0$ e variância $\mathbf{E}[(\Delta W_t)^2] = \Delta t$. Este é o chamado **processo de Wiener** em homenagem ao matemático americano Norbert Wiener que foi o primeiro a fazer uma análise matemática rigorosa de suas propriedades em 1923.

Entretanto, Wiener não estava interessado em finanças mas na compreensão de um fenômeno físico conhecido como **Movimento Browniano**. Este fenômeno fora observado em 1827 pelo botânico escocês Robert Brown que constatou ao microscópio que pequenos grãos de pólen em suspensão aquosa eram dotados de um movimento incessante com trajetórias muito irregulares. Várias explicações foram propostas na literatura científica sem que houvesse, contudo, uma solução que fosse definitiva e universalmente aceita. Essa situação perdurou até que os trabalhos de Einstein (1905) e Smoluchowsky (1906), usando argumentos probabilísticos, conseguiram explicar o fenômeno como resultando dos inúmeros choques *aleatórios* das moléculas da suspensão aquosa contra os grãos de polén[10] obtendo também o efeito $\sqrt{\Delta t}$. O processo de Wiener, freqüentemente chamado também de movimento Browniano, é a formulação matemática daquele fenômeno físico. Portanto, o que Bachelier havia proposto era que os preços das ações evoluíam de uma forma extremamente errática e imprevisível de maneira análoga ao movimento Browniano.

O trabalho de Bachelier permaneceu esquecido por quase sessenta anos, em boa parte devido ao veredito dado por seu supervisor, o grande matemático francês Henri Poincaré [3, 6]. Em um resumo sobre a dissertação de seu estudante, Poincaré comenta que o assunto era "um tanto

[10] A propósito, com esse trabalho Einstein forneceu uma prova convincente para a existência de moléculas invisíveis ao olho nu.

quanto remoto em relação aos tópicos que nossos candidatos usualmente abordam". A banca de tese lhe concedeu "*mention honorable*" ao invés do grau máximo de "*mention très honorable*". Acontece que receber o grau máximo era na época a pré-condição para obter-se um bom emprego no meio acadêmico. Assim, Bachelier trabalhou em instituições de segundo escalão o que, junto com o fato de sua tese não ter sido traduzida para outras línguas, contribuiu para a sua obscuridade [34].

Somente em 1959 surge uma publicação, assinada pelo físico Osborne, propondo, sem conhecimento do trabalho de Bachelier, que os preços de ativos no mercado financeiro evoluem como um movimento Browniano. Pouco depois o probabilista americano Savage redescobre a tese de Bachelier chamando para ela a atenção do economista Paul Samuelson (que viria a ser o primeiro americano a receber o prêmio Nobel de Economia). Este por sua vez difundiu-a entre outros economistas e matemáticos. Já havia algum tempo que se suspeitava, entre alguns economistas, de que os preços de ações variavam de forma aleatória devido à **hipótese do mercado eficiente** segundo a qual, num dado instante, o movimento seguinte dos preços depende somente do preço neste instante e não na história prévia das variações de preço. Em outras palavras, somente o valor presente do ativo tem importância para sua evolução futura. Esta "*ausência de memória*" é chamada de **propriedade Markoviana** e é uma das características essenciais do movimento Browniano. A interpretação econômica é de que um mercado eficiente **reage imediatamente à novas informações**, ajustando-se às novas realidades independentemente do que ocorreu no passado.

Samuelson (1965) percebeu um defeito básico do modelo de Bachelier: a hipótese de que o preço das ações evoluem segundo um movimento Browniano dito "aritmético", isto é, de acordo com a equação acima, implica que os preços das ações podiam ser negativos. Isso não é possível devido ao chamado "*princípio de responsabilidade limitada*". Este reza que um acionista pode no máximo perder o montante que investiu inicialmente e portanto o preço das ações não pode ser negativo. Além disso, observou que não é tanto o preço absoluto S_t que importa estudar, mas o chamado **retorno** $\Delta S_t/S_t$, ou seja, a variação **relativa** de preços. De fato, uma variação de 1 ponto é muito mais significativa quando o ativo vale 20 pontos do que se valesse 200 pontos. Samuelson propôs então que o processo estocástico $\{S_t, t \geq 0\}$, agora chamado "movimento Browniano geométrico", seja solução da equação diferencial estocástica

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu(t)\,dt + \sigma(t)\,dW_t.$$

Note que no caso particular em que $\sigma \equiv 0$ a equação estocástica acima passa a ser uma equação diferencial ordinária,

$$\frac{dS_t}{dt} = \mu(t)S_t$$

cuja solução é obtida por integração usual:

$$S_t = S_0\, e^{\int_{t_0}^{t} \mu(\tau)\,d\tau}.$$

Em particular, quando $\mu(t) = \mu$ é constante, obtém-se

$$S_t = S_0\, e^{\mu\,(t-t_0)}.$$

Uma equação de evolução do tipo $dS_t/S_t = \mu dt$ descreve a evolução no tempo de um montante ou depósito que rende juros compostos contínuamente a uma taxa constante μ. Por outro lado, para resolver equações diferenciais estocásticas foi preciso desenvolver um novo ramo da Teoria da Probabilidade: o **Cálculo Estocástico** [11]. Comparando as equações acima pode-se interpretar a presença do termo estocástico $dW_t \approx \sqrt{dt}$ como indicando a existência de **flutuações rápidas** dos preços: informalmente, $\sqrt{dt} > dt$ para dt pequeno e portanto o termo estocástico predomina em intervalos de de tempo curtos. Uma lei de evolução desse tipo é uma das hipóteses básicas do **modelo de Black-Scholes-Merton**.

Na discussão acima, o índice t era associado ao tempo e portanto variava continuamente: $t \in [0, +\infty)$. Diz-se que o processo evolui em *tempo contínuo*. Por outro lado, o formalismo matemático fica bem mais simples (porém não trivial) quando se trabalha com modelos análogos em *tempo discreto* no qual os preços formam uma **sequência** $\{S_n\}_{n\geq 0}$ de variáveis aleatórias indexadas por um número natural $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$.

O análogo da lei de evolução dos preços no modelo discreto assume a forma

$$\frac{\Delta S_n}{S_n} = \rho_n$$

[11] Criado nos anos quarenta pelo matemático japonês Kiyosi Itô.

ou

$$S_{n+1} = S_n(1 + \rho_n).$$

Aqui $\{\rho_n\}_{n\geq 0}$ é uma sequência de variáveis aleatórias a ser escolhida de acordo com a conveniência. Por exemplo, no modelo de **Cox-Ross-Rubinstein** (ou **modelo binomial**), que discutiremos com detalhes mais adiante, as ρ_n são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com dois valores possíveis, correspondendo a subida ou descida de preços com certas probabilidades.

Nesse artigo faremos uma exposição de uma versão simples deste tipo de modelo que, além do interesse teórico, é muito utilizado na prática, em particular como aproximação discreta de modelos em tempo contínuo. Para mais detalhes ver [19].

2 Alguns Conceitos Fundamentais em Finanças

2.1 Estruturas Financeiras

A *Teoria de Finanças* investiga de que forma "indivíduos" e "companhias" (ou firmas) dispõem de seus recursos financeiros levando em consideração o fator *tempo* (discreto ou contínuo) e a *natureza* (aleatória ou não) das condições (ou estados) do "mundo". Grosso modo, podemos distinguir as seguintes **estruturas-chave** no estudo de finanças:

- **indivíduos**: investidores, proprietários, etc.;
- **companhias**: firmas, corporações, empresas, etc.;
- **mercados**: mercados monetários, de capitais, de mercadorias, etc.
- **intermediários**: bancos, seguradoras, corretoras, etc.

Essas estruturas interagem entre si, tendo o mercado um papel central. Examinemos resumidamente o papel de cada uma delas, isto é, suas atividades financeiras.

Indivíduos tem como meta solucionar o chamado "problema do consumo/investimento", isto é, a competição entre duas estratégias possíveis: *consumir já* ou *poupar/investir* para consumir no futuro. Esse conflito é o reflexo da dicotomia "risco/retorno" por sua vez associado à oposição "incerteza/segurança". A formulação matemática desse dilema conduz a problemas de otimização.

Corporações são proprietárias de terras, fábricas e equipamentos assim como de estruturas burocrático-organizacionais, patentes, etc. Suas atividades principais são a administração do processo produtivo e a realização da produção propriamente dita. Seu objetivo é satisfazer ao máximo os interesses dos proprietários e acionistas.

Intermediários são os bancos comerciais e de investimento, seguradoras, corretoras, etc. Sua função principal é a de tomar emprestado recursos de unidades superavitárias da economia e canalizá-los para as unidades deficitárias. São também responsáveis pela realização de pagamentos diversos, transferências e serviços bancários (transações com depósitos, empréstimos, operações de crédito, contratos de seguro, etc.)

Mercados são os locais organizados para operar com apólices, contratos, e outros títulos estandardizados (ações, bônus, contratos futuros e à termo, opções , etc.) e também com mercadorias (ativos reais). A função principal dos mercados é de servir como local onde os diversos agentes econômicos se reúnem para a negociação regulamentada de ativos financeiros. Por exemplo, é onde as companhias procuram aumentar seu capital lançando ações ou bônus, indivíduos investem afim de obter lucros, etc. Além disso, os mercados são a principal **fonte de informação** usada nas diversas áreas da economia e que auxiliam na decisão de estratégias de investimento. Por exemplo, fornecendo cotações de preços e de vários índicadores além de sinais psicológicos (confiança, credibilidade, otimismo, expectativas).

2.2 Instrumentos financeiros

São os produtos negociados nos mercados. Existem dois tipo básicos:

- **Subjacentes** (ou primários): mercadorias, bônus, ações, índices, moedas estrangeiras, taxas de câmbio, etc;
- **Derivativos** (ou secundários): contratos futuros e à termo, contratos de opção, "swaps", etc.

Devido à importância das ações e bônus para os modelos que analisaremos mais adiante, faremos um resumo rápido de suas características principais.

2.2.1 Dois subjacentes: ações e bônus

(a) **Bônus** ou obrigações são *dívidas* emitidas por governos, bancos ou empresas privadas (ou outras instituições financeiras) com intuito de acumular capital para futuros investimentos. É o exemplo prototípico de título de renda fixa, geralmente de longo prazo e pagando juros.

Exemplos: títulos do tesouro nacional, bônus de empresas, certificados de depósito bancário, etc.

Os **títulos do Tesouro Americano** (os "treasuries") são considerados os bônus mais seguros do mercado sendo a melhor aproximação, no mundo real, de um investimento *sem risco* [12].

(b) **Ações** são títulos que representam *frações do capital de uma empresa* e são lançadas no mercado afim de acumular fundos para atividades produtivas subseqüentes. Ao contrário dos bônus, cujo titular é *credor* do emitente, o portador de ações é em parte proprietário da corporação emitente e têm direito a receber *dividendos e bonificações.*

O preço das ações é influenciado por vários fatores: performance produtiva e lucratividade da empresa, situação do mercado, da política econômica do momento, além de outras variáveis psicológicas ("credibilidade", "expectativas", etc.). São portanto ativos de risco.

2.2.2 Derivativos

São contratos financeiros cujo valor "deriva" de (ou baseia-se em) outros ativos ditos subjacentes (ou ativos-objeto). Esses últimos podem ser desde mercadorias e metais preciosos até ações, taxas de câmbio, taxas de juros e outros índices [13].

[12] A existência de um ativo livre-de-risco é importante pois serve como padrão de comparação/referência com outros ativos.

[13] Já existem derivativos cujo subjacente é a acumulação de chuva, granizo ou neve num certo período ou a flutuação da temperatura. Estes contratos permitem, por exemplo, que fazendeiros e agricultores se protejam contra os riscos climáticos ou de outras catástrofes naturais [33, 3].

Uma definição mais precisa, devida à Ingersoll (1987):

Definição 2.1 *Um instrumento derivativo é um contrato financeiro tal que seu valor na data de vencimento T é completamente determinado pelo preço de mercado do seu ativo-objeto.*

Em outras palavras, se S_T denota o preço do ativo-objeto (por exemplo, uma ação) no vencimento, então o valor F_T do derivativo, na data de vencimento, é uma função da forma geral $F_T = F(T, S_T)$. Após o instante T o contrato expira.

Neste artigo discutiremos apenas um tipo de derivativo: as *opções*. Mais detalhes sobre estes outros derivativos pode ser encontrada nas referências [17, 26, 36, 32, 7].

Um **contrato de opção** (ou simplesmente uma **opção**) é um acordo que dá ao seu possuidor o **direito**, *mas não a obrigação*, de comprar (ou vender, conforme o caso) uma certa quantidade de um ativo (chamado **ativo-objeto** ou subjacente) dentro de um certo prazo e por um preço pré-estabelecido.

Numa opção **de compra** ("call option") o seu titular tem o direito de comprar o ativo-objeto estipulado pelo contrato. Numa opção **de venda** ("put option") seu titular tem o direito de vender o ativo-objeto.

Os parâmetros básicos dos contratos de opção são:

- **ativo-objeto**: é o ativo (real ou financeiro) sobre o qual o contrato se baseia, e.g., ações, bônus, etc...
- **o titular** da opção: é o agente econômico que **compra** o contrato e que portanto possui o *direito* de exercer a opção, isto é, de comprar o ativo-objeto (no caso de uma opção de compra) ou de vendê-lo (no caso de uma opção de venda);
- **o lançador** da opção: é o agente econômico que **vende** a opção e portanto tem a *obrigação* de vender (respectivamente, comprar) o ativo-objeto se, e quando, o titular exercer a opção de compra (respectivamente, de venda);
- **preço de exercício**: é o preço fixo pelo qual o lançador se obriga a vender (comprar) o ativo-objeto;

- **vencimento**: é data na qual o contrato expira;
- **prêmio**: é o preço que o titular paga ao lançador afim de adquirir o direito de exercer a opção; é pago no ato da aquisição da opção e não é reembolsável mesmo se o titular não exercer a opção; em outras palavras é o preço que o comprador paga para entrar no jogo e que visa compensar o risco do vendedor.

Note que existem quatro posições possíveis para os participantes num contrato de opção. A tabela a seguir resume os direitos e obrigações em cada posição.

	Opções de Compra	Opções de Venda
Comprador (titular)	direito de comprar o ativo-objeto	direito de vender o ativo-objeto
Vendedor (lançador)	obrigação de vender o ativo-objeto	obrigação de comprar o ativo-objeto

Quanto à data de exercício há dois tipos básicos de opções. Uma opção **européia** é aquela em que o titular somente pode exercer sua opção na data do vencimento. Já para uma opção **americana** ela pode ser exercida em qualquer data até o vencimento[14]. Iremos nos restringir ao tipo mais simples de contratos de opções: opções européias sobre ações que não pagam dividendos. Para uma análise detalhada de opções americanas, ver [20, 24, 31]; para uma discussão de opções "híbridas" ou exóticas, o leitor pode consultar [17, 36, 26, 7].

A título de precisão, formulamos a seguinte

Definição 2.2 *Uma Opção de Compra Européia sobre um ativo-objeto cujo preço no instante t é S_t, é um contrato financeiro que dá ao seu titular o* **direito** *de comprar este ativo pelo preço pré-estabelecido K. Esse direito somente poderá ser exercido* **no vencimento** T, *quando o*

[14]Uma opção "Bermuda" pode ser exercida apenas em algumas datas até o vencimento

contrato expira. O preço C_t pago para adquirir uma opção de compra no instante t é chamado prêmio.

Iremos analisar com detalhe mais adiante o problema de avaliar um contrato de opção, isto é, de saber o quanto se deve pagar por ele. Idealmente gostaríamos de obter uma fórmula que expresse o seu preço em função do preço do ativo-objeto e de outros parâmetros relevantes. Note que o valor de uma opção dependerá do retorno que o contrato pode oferecer e, portanto, do preço que o ativo-objeto virá a ter *no futuro*, isto é, no vencimento.

Por hora, observamos que não é difícil encontrar o valor de uma opção *no instante do vencimento*. De fato, seja K o preço de exercício, S_T o preço do ativo-objeto no vencimento e C_T o valor de uma opção de compra no vencimento. Então, *na ausência de custos de transação, comissões e taxas*, C_T só pode assumir dois valores:

(i) se $S_T \leq K$ (opção "out-of-money"), é vantajoso comprar o ativo diretamente no mercado à vista; o titular, sendo um investidor racional, não exerce a opção e portanto seu valor é $C_T = 0$;

(ii) se $S_T > K$ (opção "in-the-money") é vantajoso que o titular exerça a opção comprando o ativo por K e revendendo no mercado ao preço superior S_T obtendo assim um retorno $S_T - K$; logo o valor da opção é $C_T = S_T - K$.

Em suma,

$$C_T = \begin{cases} 0 & \text{se } S_T \leq K \\ S_T - K & \text{se } S_T > K \end{cases}$$

Ou ainda, em notação mais compacta,

$$C_T = \max(S_T - K, 0)$$

onde $\max(a, b)$ é o maior dentre os números a e b. É claro que, do ponto de vista do lançador da mesma opção, o seu retorno é dado por $-C_T = \min(K - S_T, 0)$ (onde $\min(a, b)$ é o menor dentre os números a e b).

Um raciocínio análogo mostra que o valor de uma de uma opção de *venda* no vencimento é dado por

$$P_T = \begin{cases} K - S_T & \text{se } S_T < K \\ 0 & \text{se } S_T \geq K \end{cases}$$

Isto é, $P_T = \max(K - S_T, 0)$.

Há três tipos de atores nos mercados de opções classificados de acordo com seus objetivos:

- **arbitradores:** tiram partido de eventuais disparidades de preços que surgem localmente no mercado afim de obter ganhos sem assumir riscos (sua ação tende a eliminar tais disparidades). Um **arbitrador** pode, por exemplo, comprar opções quando desconfia que o prêmio está desvalorizado afim de revendê-las posteriormente a um preço mais elevado.

- **especuladores:** assumem posições de risco afim de realizar ganhos caso os preços evoluam de acordo com suas expectativas; O **especulador** pode, por exemplo, comprar opções de compra apostando na alta dos preços do ativo-objeto; ou pode vender opções de compra apostando na baixa.

- **"hedgers"**: usam o mercado para cobrir (proteger) sua posição vulnerável a riscos. Um **"hedger"** pode garantir um retorno mínimo construindo uma carteira mista de ações e opções sobre estas ações. Vale a pena analisar com detalhe essa estratégia já que ilustra a importante noção de **transferência do risco** através da **diversificação** de investimentos. Suponhamos que um investidor queira investir em ações afim de juntar dinheiro numa data futura T. Ele poderia comprar n ações de forma que no instante T elas valem nS_T. Caso o preço tenha subido, há um ganho. Porém o investidor não pode garantir que não haja uma queda acentuada, o que lhe traria prejuízo. Uma forma de proteção contra esse risco consiste em diversificar os investimento. Por exemplo, poderia comprar n' ações, $n' < n$, e uma mesma quantidade de opções de venda com preço de exercício K e vencimento T. Assim, no instante T o valor total de seus investimentos é

$$n'S_T + n'\max(K - S_T, 0) = n'\max(K, S_T) \geq n'K$$

garantindo um retorno[15] de pelo menos $n'K$.

[15] Descontando o prêmio pago pelas opções.

3 Avaliação de Derivativos

3.1 Preliminares

Entrar em um contrato de opção (de compra) consiste essencialmente em adquirir **hoje**, por um certo preço (o *prêmio*), a quantia $C_T = \max(S_T - K, 0)$, cujo valor depende do estado do mercado num instante **futuro** T. O fato de não podermos predizer o estado futuro do mercado é a razão de ser da existência de opções, que não teriam sentido num mundo sem incerteza. O caráter imprevisível dos preços dos ativos, em conseqüência da desregulamentação dos mercados financeiros, sugere a hipótese de que eles evoluem de forma *aleatória*, ou seja, segundo as Leis da Probabilidade. Assim, C_T é considerada como uma variável aleatória que é função do preço S_T do ativo-objeto (uma ação, uma taxa de câmbio, um índice, o preço de um título, etc.). Vários fatores afetam o preço de um contrato de opção, entre os quais: o preço do ativo-objeto, o preço de exercício, o prazo de vencimento (duração do contrato), a "volatilidade" do ativo-objeto, as taxas de juros e os dividendos (se houver) pagos pelo ativo-objeto durante a vigência da opção.

Por vários motivos seria útil que investidores e negociadores pudessem *estimar* o valor da opção em função do preço do ativo-objeto, antes mesmo de assinar o contrato. Pois assim poderiam:

- saber se o preço de mercado da opção está super/subavaliado, e de quanto;
- avaliar a cotação diária dos contratos;
- avaliar os riscos;
- avaliar oportunidades de arbitragem.

Ou seja,

> *é desejável sermos capazes de avaliar uma opção, se possível através de uma* **fórmula matemática** *que expresse o seu valor em função do preço do ativo subjacente.*

O valor de uma opção é chamado *prêmio*. A questão, portanto, é: como determinar o prêmio? Este é o **problema da avaliação** de ativos, que é um dos objetivos centrais da Teoria de Finanças. **Avaliar** (ou precificar) significa *estimar o quanto vale um ativo hoje dado os seus* possíveis *valores futuros.*

Um exemplo clássico: quanto valeria **hoje** a quantia de R$ 1,00 obtida investindo à juros compostos (com taxa constante r por período) durante t períodos? A resposta é baseada no conceito de juros como valor temporal do dinheiro [22, 35, 25]. Neste exemplo simples, a resposta é $\frac{1}{(1+r)^t}$ reais pois essa quantia, se aplicada hoje, resulta daqui à t períodos num montante de R$ 1,00. Ou seja, nesse caso, para "transladar" até o presente um certo valor de um montante no futuro, basta multiplicar pelo fator de desconto ou *deságio* $\frac{1}{(1+r)^t}$.

Infelizmente, a avaliação de opções não é tão simples. Como então avaliá-las? Na falta de outro método o prêmio é determinado *pelo mercado*, isto é, pela oferta e procura. Mas, não haveria uma maneira mais "objetiva" de avaliação, que nos informasse o valor "justo" ou "legítimo" de uma opção, dadas as regras do jogo do mercado?

A teoria de avaliação ou "precificação" de opções procura determinar o **valor justo** (ou racional ou teórico) de uma opção que em geral difere do prêmio como cotado no mercado. Este último é o que efetivamente se paga pelo contrato quando é negociado *no mercado* e portante embute um valor adicional que é o análogo ao "custo de produção" ou "mais-valia" com o qual o lançador tem de arcar e espera ser recompensado. Para compreender melhor estas idéias é útil considerar a seguinte *analogia*:

Imaginemos o seguinte jogo elementar entre dois adversários denominados A e B. O jogador A lança uma moeda *honesta*. Se sair

$$\begin{cases} \text{cara,} & \text{A paga R\$ 1,00 para B} \\ \text{coroa,} & \text{A não paga nada para B} \end{cases}$$

Questão:

Quanto vale a aposta, isto é, quanto o jogador B deve pagar para entrar no jogo?

Uma solução:

Como a moeda é honesta, há uma probabilidade de 1/2 de sair cara ou coroa; logo, em **média**, B ganha (1/2) R$ 1,00 = 50 centavos, dinheiro que é desembolsado por A. Assim, A exige que B pague pelo menos 50 centavos para entrar no jogo pois dessa forma A terá garantido em *média* um ganho idêntico à sua perda. Em outras palavras, a fim de que em média nem A nem B tenham ganhos ou perdas (ou seja, que a média dos lucros e prejuízos seja zero) o valor da aposta deve ser 50 centavos: este é o seu valor justo. Em outras palavras o valor justo é o valor da aposta que faz do trato um jogo de soma-zero.

Resumindo:

> **A teoria de avaliação** ("precificação") **de opções** visa identificar o **valor justo** do contrato independentemente dos preços de negociação (de mercado).

No caso que vamos estudar (opções européias sobre ações) isso envolve dois problemas interligados:

1. **precificação**: Qual é o valor justo de um contrato de opção no instante inicial, dado que, no vencimento, vale $\max(S_T - K, 0)$?

2. **cobertura**: como o lançador, que recebe o prêmio no instante inicial, deve investir esse recurso afim de gerar pelo menos o valor $\max(S_T - K, 0)$ no instante T?

Na seção seguinte discutimos a base conceitual dos métodos para achar o preço justo de ativos financeiros.

3.2 Arbitragem

O conceito econômico fundamental em todos os métodos teóricos de avaliação de derivativos é o de **arbitragem**. Informalmente, arbitragem significa **especulação sem risco**. Ou seja, uma **oportunidade de arbitragem** é uma oportunidade que um agente econômico encontra no mercado de obter ganhos[16] *sem correr riscos*.

Tipicamente, estas oportunidades aparecem devido à uma flutuação ou discrepância localizada nos preços de um mesmo ativo em mercados diferentes.

Exemplos:

(i) Uma ação é negociada simultaneamente nas bolsas de Nova Iorque e Londres por \$172 e £100, respectivamente. Suponha que a taxa

[16] Possivelmente maiores que os obtidos investindo em letras do tesouro americano.

de câmbio seja de \$1.75/ £. Um arbitrador compra 100 ações em Nova Iorque e as revende em Londres obtendo (desprezando custos de transação) um lucro líquido de

$$100 \times (\$1.75 \times 100 - \$172) = \$300$$

sem correr riscos. Ele usou o fato de que, dada a taxa de câmbio atual, o preço da ação em Nova Iorque era inferior ao de Londres.

(ii) Um exemplo semelhante mostra que o arbitrador nem mesmo precisa ter capital inicial para fazer sua operação. Suponha que se possa obter um empréstimo por um período à taxa de juros R e que exista um título com taxa de rendimento $R' > R$ no mesmo período. No instante 0 capta-se R\$ 1,00 que é imediatamente investido neste título. Ao final do período, o título, que rendeu $(1 + R')$, é vendido e paga-se a dívida $(1 + R)$ do empréstimo. O ganho líquido (desprezando custos de transação) é de $R' - R > 0$, sem incorrer em riscos.

Note que, em mercados competitivos, uma oportunidade de arbitragem tende a desaparecer no momento em que é percebida. Realmente, à medida que outros agentes econômicos tentam explorá-la, a discrepância original tende a sumir levando à eliminação da oportunidade. Nesse sentido o arbitrador age de forma a eliminar as oportunidades de arbitragem o que, em tese, tende a manter o **equilíbrio** do mercado.

Podemos então enunciar a hipótese central da teoria de avaliação de derivativos, isto é, a hipótese de que *é impossível de obter ganhos sem correr riscos.*

Hipótese de Ausência de Arbitragem:

Não existe possibilidade de selecionar ativos cujos preços são tais que alguma compra e/ou venda simultânea deles resulte em ganhos sem risco.

Observações:

(i) essa é uma hipótese teórica que pode ser (e é freqüentemente) violada na realidade; por outro lado certas discrepâncias de preços que teoricamente geram uma oportunidade de arbitragem, não o são na realidade, pois os custos de transação e taxas pagas para fazer as operações necessárias para explorá-la fazem com que ela não seja compensadora[17];

(ii) é um princípio que serve como um **método de precificação,** como veremos adiante; também pode ser proposto como condição de equilíbrio de preços do mercado.

Diz-se que os preços de ativos estão em "nível justo" ou que estão "corretamente avaliados", quando não há oportunidades de arbitragem; isto é, **a ausência de arbitragem define o "preço justo"**.

Além da ausência de arbitragem, outras **hipóteses simplificadoras** são geralmente utilizadas afim de que o modelo possa ser analisado matematicamente. Apesar disto implicar o sacrifício da realidade em prol da simplicidade este é o passo *inicial* na construção de qualquer **modelo matemático**. Posteriormente, o modelo pode ser refinado para adequar-se mais fielmente à realidade a ser modelada.

Hipótese de Mercado sem Atrito:

(I) não há custos de transação [18] nem taxas para a venda/compra de ativos;

(II) são permitidas vendas a descoberto (isto é, vender ativos que não se possui realmente no momento, como por exemplo a obtenção de um empréstimo em dinheiro) em princípio ilimitadas; além disso os ativos são indefinidamente fraccionáveis;

(III) não há pagamento de dividendos;

(IV) sempre há liquidez, ou seja, a cada momento existem compradores e vendedores para todos os ativos considerados.

[17]Pode-se definir uma "banda de arbitragem" dentro da qual a arbitragem não compensa.

[18]Assumimos que as negociações são feitas instantâneamente.

Além destas hipóteses, supõe-se a existência de um ativo livre de risco que rende juros a uma taxa constante (e.g., letras do tesouro americano). Esta última, assim como as **(I)-(III)** são fundamentalmente hipóteses simplificadoras e podem ser relaxadas mais ou menos facilmente, ao custo de uma complicação crescente do modelo. A hipótese de liquidez é bastante forte e pode não ser válida em um dado mercado em um dado instante.

3.3 Um exemplo: o Modelo Binomial Uniperiódico

Para exemplificar as idéias expostas na seção anterior, vamos considerar um modelo bastante simples de um mercado financeiro.

Suponhamos que existam dois ativos negociáveis:

I Um ativo **sem risco** (por exemplo, dinheiro em espécie ou letras do tesouro americano) que rende juros a *taxa constante* e igual a r por período. Assim, se este ativo vale uma unidade no instante inicial $t = 0$, então no instante final $t = 1$ (final do período) valerá $(1 + r)$ unidades.

II Um ativo **de risco** (por exemplo, uma ação), cujo preço evolui *estocásticamente* da seguinte forma. Se $S_0 > 0$ é o seu preço em $t = 0$ então, em $t = 1$ seu valor será:

$$S_1 = \begin{cases} S_0\, a, & \text{com probabilidade } q \ \ \text{(alta)} \\ S_0\, b, & \text{com probabilidade } 1-q \ \ \text{(baixa)}. \end{cases}$$

onde $0 \leq q \leq 1$ e $a > b > 0$ (chamadas razões de alta e baixa).

Note que existem apenas dois instantes relevantes e que o ativo de risco pode assumir apenas dois valores. É o **modelo binomial uniperiódico**.

A proposição seguinte é um exemplo de avaliação de ativos através da hipótese de ausência de arbitragem.

Proposição 3.1 *Sob ausência de oportunidade de arbitragem,*

(i) $b \leq 1 + r \leq a$*;*

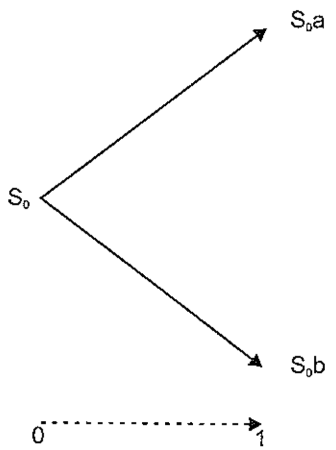

Figura 1: Modelo binomial de um período

(ii) se $b < a$ *e se* $p = \dfrac{1+r-b}{a-b}$ *for a probabilidade de alta, então:*

$$S_0 = \frac{1}{1+r}\,\mathbf{E}^*[S_1]$$

onde $\mathbf{E}^*[S_1] = S_0 a\, p + S_0 b\,(1-p)$ *é o valor esperado da ação em* $t = 1$.

Demonstração:

(i) Se tivéssemos $1 + r < b$, então em $t = 0$ vende-se um bônus no valor S_0 e compra-se uma ação. O saldo inicial é $S_0 - S_0 = 0$. Em $t = 1$, revende-se a ação, que vale *pelo menos* $S_0 b$, e paga-se o bônus por $(1 + r)S_0$. O salvo final é maior ou igual a

$$S_0 b - (1+r)S_0 = [b - (1+r)]S_0 > 0.$$

Ou seja, existiria oportunidade de arbitragem. Portanto, $1+r \geq b$.

Análogamente, suponha que $1 + r > a$. Então, em $t = 0$ vende-se (a descoberto) uma ação por S_0 e compra-se um bônus ao mesmo preço: saldo inicial é nulo. Em $t = 1$ resgata-se o bônus por $(1+r)S_0$ e compra-se a ação, que vale *no máximo* $S_0 a$, que é devolvida. O saldo resultante é maior ou igual a

$$(1+r)S_0 - S_0 a = [(1+r) - a]\, S_0 > 0,$$

ou seja, temos uma arbitragem. Logo, $1 + r \leq a$.

(ii) Se $a > b$ (no caso $a = b$ a ação se comporta como um bônus) então, de (i) segue que $0 \leq p \leq 1$. Podemos então definir uma distribuição de probabilidade $\mathbf{P}^*$ tal que

$$\mathbf{P}^*[S_1 = S_0 a] = p = 1 - \mathbf{P}^*[S_1 = S_0 b].$$

O valor esperado de S_1 sob esta distribuição é

$$\mathbf{E}^*[S_1] = S_0 a\, p + S_0 b\,(1-p) = S_0\,[(a-b)p + b] = S_0(1+r).$$

$\square$

Suponhamos agora que o mercado negocie com opções européias sobre ações, com vencimento em $t = 1$ e preço de exercício K. Se C_0 é o valor da opção em $t = 0$, então, em $t = 1$ seu valor será:

$$C_1 = \max(S_1 - K, 0) = \begin{cases} C_a\,, & \text{com probabilidade } q \\ C_b\,, & \text{com probabilidade } 1-q\,. \end{cases}$$

Uma **carteira** (ou "portfólio") é uma combinação dos ativos de base disponíveis no mercado, no caso, bônus e ações. Podemos imaginar uma carteira como um par (α, β), indicado as quantidades dos ativos possuídos pelo investidor. O **valor** V_t da carteira dado por $\alpha \times$ [preço do bônus] + $\beta \times$ [preço do bônus]. Verifica-se facilmente que existe uma carteira que *simula* o comportamento da opção (um derivativo), isto é, tal que em $t = 1$ seu valor coincide com o valor da opção. Basta impor a condição:

$$V_1 = \alpha\,(1+r) + \beta\, S_1 = C_1.$$

Ou seja,

$$\begin{cases} \alpha\,(1+r) + \beta\, S_0 a &= C_a \\ \\ \alpha\,(1+r) + \beta\, S_0 b &= C_b. \end{cases}$$

Resulta que

$$\begin{cases} \alpha &= \dfrac{C_a - \beta S_0 a}{1+r} \\ \beta &= \dfrac{C_a - C_b}{S_0(a-b)}. \end{cases}$$

Daí, um cálculo simples fornece para o valor inicial da carteira replicadora:

$$V_0 = \alpha + \beta S_0 = \frac{1}{1+r}\,[p\,C_a + (1-p)\,C_b] = \frac{1}{1+r}\,\mathbf{E}^*[C_1]$$

supondo ausência de arbitragem. Podemos então obter uma fórmula de avaliação de opções de compra européias.

Proposição 3.2 *Sob ausência de oportunidades de arbitragem,*

$$C_0 = \frac{1}{1+r}\,\mathbf{E}^*[C_1],$$

isto é, o **valor justo** *(ou "prêmio") de uma opção de compra européia sobre ações no modelo binomial uniperiódico é dado pelo seu retorno esperado, com respeito à distribuição* $\mathbf{P}^*$*, atualizado à taxa* r*.*

Demonstração: Suponha que fosse $C_0 \neq V_0$ e mostremos que isso gera uma oportunidade de arbitragem. Por exemplo, seja $C_0 > V_0$. Em $t = 0$ vende-se a opção por C_0 (mesmo não tendo a ação) e compra-se uma carteira replicadora por V_0. Com a diferença $C_0 - V_0$ restante, compra-se bônus. O saldo inicial é

$$C_0 - V_0 - (C_0 - V_0) = 0.$$

Em $t = 1$, temos duas possibilidades de interesse:

(a) $S_a > K$: o titular da opção vai exercê-la; o vendedor compra então a ação no mercado por S_a e a entrega ao titular pelo preço K; finalmente resgata-se os bônus. Lembrando que a carteira replicadora vale nessa situação $C_a = S_a - K$, o saldo final é:

$$(C_0 - V_0)(1+r) + (K - S_a) + C_a = (C_0 - V_0)(1+r) > 0.$$

(b) $S_b \leq K$: o titular da opção não irá exercê-la; resgata-se os bônus. Lembrado que a carteira replicadora vale agora $C_b = 0$, o saldo final fica:

$$(C_0 - V_0)(1+r) + C_b = (C_0 - V_0)(1+r) > 0.$$

Em qualquer caso, temos uma oportunidade de arbitragem. Logo, $C_0 \leq V_0$. Um raciocínio análogo para a hipótese $C_0 < S_0$ finaliza a proposição. □

Observações 1 • *Supomos acima que $S_b \leq K < S_a$, que é a situação de interesse. Note que se $S_a \leq K$, o titular da opção* nunca *a exerceria e recaímos no caso (b). Por outro lado, se $S_b > K$ o titular* sempre *exerceria a opção e recaímos no caso (a).*

- *Note que, como $V_0 = C_0$ e $V_1 = C_1$, um vendedor de uma opção de compra pode investir o prêmio em uma carteira replicadora de tal forma que, no vencimento, ele terá o montante necessário para satisfazer o titular caso este venha a exercer a opção. Daí que tal carteira é chamada* **carteira de cobertura** *(* "hedging portfolio" *).*

O leitor deve ter notado que nas fórmulas de avaliação que obtivemos, aparecem certas médias ou valores esperados com respeito a uma distribuição $\mathbf{P}^* = (p, 1-p)$ cujo peso é p ao invés da distribuição **real** $\mathbf{P} = (q, 1-q)$ que aparecia nas hipóteses do modelo. A compreensão deste ponto é muito importante.

Vejamos, então. O retorno *real* de investimentos de risco é dado pelo valor esperado (ou média) do preço destes investimentos no instante final da aplicação. Assim, lembrando que $\mathbf{P} = (q, 1-q)$ é a distribuição *real* de probabilidade de ocorrência dos valores dos ativos, teremos:

$$\mathbf{E}[S_1] = qS_a + (1-q)S_b$$

e

$$\mathbf{E}[C_1] = qC_a + (1-q)C_b.$$

Por serem ativos de risco, deve-se ter em geral que esses valores médios, desagiados à taxa livre-de-risco r, satisfaçam:

$$S_0 < \frac{1}{1+r}\,\mathbf{E}[S_1]$$

e

$$C_0 < \frac{1}{1+r}\,\mathbf{E}[C_1].$$

Realmente, suponha que valessem as identidades, por exemplo:

$$C_0 = \frac{1}{1+r}\,\mathbf{E}[C_1].$$

Ou, reescrevendo:

$$(1+r)C_0 = \mathbf{E}[C_1].$$

Isso significa que o retorno médio *real* de um investimento **de risco** (no caso, uma ação ou uma opção sobre esta ação) seria idêntico ao retorno obtido caso aplicássemos o valor em dinheiro do ativo no instante inicial à taxa de juros *livre-de-risco* r. Isso é uma contradição do ponto de vista econômico, desde que aceitemos a hipótese de que os investidores geralmente têm **aversão ao risco**. Por que aplicar recursos num ativo de risco que oferece um retorno médio igual ao valor que se obteria aplicando os mesmos recursos à taxa de juros livre de risco?

Portanto, afim de atrair investidores aversos ao risco, o ativo de risco deve oferecer uma compensação ou **prêmio**. Ou seja, em geral teremos:

$$(1+k)C_0 = \mathbf{E}[C_1]$$

onde a nova taxa de juros $k = r + \lambda$ inclui uma "taxa de risco" λ.

Note que a **hipótese de aversão ao risco** serve como método de avaliação de ativos de risco. Assim, o preço atual do ativo é dado pela sua esperança futura desagiada com taxa k. Por exemplo, para uma opção:

$$C_0 = \frac{1}{1+k}\,\mathbf{E}[C_1] = \frac{1}{1+k}\,[q\,C_a + (1-q)\,C_b].$$

A questão agora é a seguinte: é possível achar valores p e $1-p$ tais que, substituídos no lugar de q e $1-q$, nos permita trocar a taxa (de risco) k pela taxa livre de risco r? A resposta é afirmativa, caso **não haja oportunidade de arbitragem**. Em outras palavras, a hipótese de ausência de arbitragem garante, pelo teorema de arbitragem, a existência de uma distribuição "sintética" $\mathbf{P}^*$ (ou artificial, em contraste com a distribuição real $\mathbf{P}$) , tal que:

$$S_0 = \frac{1}{1+r}\,[S_a\,p + S_b\,(1-p)] = \frac{1}{1+r}\,\mathbf{E}^*[S_1]$$

e

$$C_0 = \frac{1}{1+r}\,[C_a\,p + C_b\,(1-p)] = \frac{1}{1+r}\,\mathbf{E}^*[C_1]$$

Vemos então que esta fórmula de avaliação de preços em termos da distribuição "sintética" $\mathbf{P}^*$ evita ter de conhecer a taxa de risco λ, que é difícil de estimar, e permite uma estimativa do prêmio que pode então ser confrontado com sua cotação no mercado.

Por outro lado, como na fórmula aparece apenas a taxa livre de risco r (que é em geral conhecida) tudo se passa *como se* a avaliação fosse feita num mundo *indiferente ao risco*: este é o **princípio de avaliação neutra ao risco.** Claro que na realidade o risco continua existindo e está "embutido" na distribuição "sintética" $\mathbf{P}^*$.

Finalmente, a proposição anterior fornece uma fórmula para o prêmio da opção em termos dos parâmetros r, a, b, K e S_0:

$$C_0 = \frac{1}{1+r}\Big[\; (\frac{1+r-b}{a-b})\max(S_0a-K,0) + (\frac{a-1-r}{a-b})\max(S_0b-K,0)\Big].$$

4 Modelos Dinâmicos em Tempo Discreto

Nas seções anteriores vimos conceitos e noções gerais relacionadas aos mercados financeiros. Desenvolvemos algumas hipóteses básicas sobre o funcionamento desses mercados e fomos capazes de obter alguns resultados interessantes, por exemplo, a respeito do preço justo de alguns ativos.

Nesta seção procederemos a um patamar de abstração matemática bem mais sofisticado objetivando, entre outras coisas, unificar e clarificar vários conceitos já discutidos. Uma vez que tivermos formulado com exatidão certas idéias fundamentais, seremos capazes de enunciar dois teoremas fundamentais da Teoria de Finanças: o **teorema de arbitragem o teorema da completude**. Poderemos então resolver, nesse contexto, o problema da avaliação de derivativos, por exemplo, para opções européias referidas à uma ação.

4.1 O Modelo

O modelo que analisaremos evolui em **tempo discreto** e com **horizonte finito**, isto é, os instantes relevantes são $0, 1, 2, \ldots, N$, onde o número N chama-se o horizonte (tipicamente interpretado como uma data de vencimento de certos títulos).

Além da hipótese de mercado sem atrito vamos propor a hipótese de **evolução estocástica** para os preços dos ativos de risco. Isto é formalizado postulando um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ onde:

- Ω é um conjunto finito representando os possíveis "estados do mundo";
- $\mathcal{F}$, chamada álgebra [19] de "eventos", representando a estrutura da informação globalmente disponível no mercado;
- $\mathbf{P}$ é a probabilidade *objetiva* sobre Ω, onde supomos que $\mathbf{P}(\{\omega\}) > 0,\ \forall \omega \in \Omega$.

A informação em $\mathcal{F}$ é organizada através de uma **filtro** $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0}^{N}$, isto é, uma família crescente de sub-álgebras:

$$\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{F}_N = \mathcal{F},$$

onde geralmente escolhe-se $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ e $\mathcal{F}$ a coleção de todos os subconjuntos de Ω. A $\mathcal{F}_n$, chamada de álgebra dos eventos até o instante n, é interpretada como contendo "a informação disponível no instante n". A monotonicidade dessas álgebras equivale à idéia de que não há "perda de informação".

O **mercado** consiste em $d+1$ ativos financeiros cujos preços no instante n são dados pelo chamado **vetor de preços**:

$$S_n = (S_n^0, S_n^1, S_n^2, \ldots S_n^d) \in \mathbb{R}_+^{d+1},$$

[19] I.e., uma coleção de subconjuntos de Ω fechada sob complementos e uniões finitas de subconjuntos. Uma sigma-álgebra é uma álgebra fechada sob uniões enumeráveis.

sendo S_n^i o preço do i-ésimo ativo no instante n. A hipótese de evolução estocástica se traduz pela suposição de que $\{S_n\}_{n=0}^N$ seja um processo estocástico. Assim, cada S_n é um vetor aleatório $d+1$-dimensional, ou seja, cada S_n^i, para $i = 1, 2, \ldots, d$ é uma variável aleatória.

Supomos também que este processo seja **adaptado** ao filtro, isto é, que

$$S_n \in \mathcal{F}_n$$

para $n = 0, 1, \ldots N$. (intuitivamente: os investidores conhecem os preços passados e presentes, mas não os futuros). Quando $\mathcal{F}_n$ for a sigma-álgebra gerada por S_0 , $S_1, \ldots, S_n$, denotada por $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, S_1, \ldots, S_n)$, o filtro é dito natural. Intuitivamente, $\mathcal{F}_n$ contém a informação disponível até o instante n (i.e., a "história" do processo até o instante n).

Os ativos $i = 1, 2, \ldots, d$ são ativos de risco enquanto que para $i = 0$ temos um ativo sem risco (por exemplo, letras do tesouro americano) que rendem juros à taxa constante r (para simplificar):

$$S_n^0 = (1+r)^n S_0^0,$$

e escolhemos $S_0^0 = 1$.

A atividade do investidor consiste em **administrar uma carteira de títulos**, ou seja, em comprar e vender ativos objetivando lucros ou proteção contra riscos. Isso é feito por meio de uma **estratégia** de investimento.

Definição 4.1 *Uma* **estratégia** *de investimento é um processo estocástico $\theta = \{\theta_n\}_{n=0}^N$ de vetores*

$$\theta_n = (\theta_n^0, \theta_n^1, \ldots, \theta_n^d) \in \mathbb{R}^{d+1}$$

e que é **predizível**, *isto é, para $i = 0, 1, \ldots, d$*

$$\begin{cases} \theta_0^i \in \mathcal{F}_0 \\ \\ \theta_n^i \in \mathcal{F}_{n-1} \end{cases}$$

Observações:

(I) o vetor θ_n chama-se **carteira** (ou "portfolio") do investidor no instante n; θ_n^i é a quantidade de ativos do tipo i que o investidor possui no instante n; no jargão financeiro, é a "posição tomada no i-ésimo ativo neste instante". Note que $\theta_n^i \in \mathbb{R}$, podendo portanto ser positiva (o investidor possui aquela quantidade do ativo), negativa (o investidor pediu emprestado aquela quantidade do ativo) ou nula (ativo ausente);

(II) a condição $\theta_n \in \mathcal{F}_{n-1}$ significa que as posições na carteira são reajustadas baseando-se na informação disponível no instante $n-1$, sendo então mantidas até que as novas cotações sejam anunciadas no instante n.

Definição 4.2 *O* **valor** *da carteira θ no instante n, $0 \leq n \leq N$ é dada por*

$$V_n(\theta) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{d} \theta_n^i S_n^i = <\theta_n, S_n>, & se\ 1 \leq n \leq N \\ <\theta_1, S_0>, & se\ n = 0 \end{cases}$$

Note que $V_n(\theta)$ é um processo estocástico adaptado.

Dentre todas as possíveis estratégias, vamos admitir somente aquelas que são **auto-financiáveis**, isto é, tais que

$$<\theta_n, S_{n-1}> = <\theta_{n-1}, S_{n-1}> \tag{4.1}$$

para $2 \leq n \leq N$. Esta condição diz que não há nem entrada de capital (e.g., dividendos) nem saída de capital (e.g., consumo, custos de transação) durante o processo [20]. De fato, calculando a variação $\Delta V_n(\theta)$ no valor da carteira entre os instantes $n-1$ e n, obtemos:

$$\begin{aligned} \Delta V_n(\theta) &= <\theta_n, S_n> - <\theta_{n-1}, S_{n-1}> \\ &= <\theta_n, S_n - S_{n-1}> + <\theta_n - \theta_{n-1}, S_{n-1}>. \end{aligned}$$

Mas a equação (4.1) afirma que último termo da identidade acima é nulo, indicando que a variação no valor da carteira é devida somente à variação dos preços dos ativos.

Intuitivamente, podemos imaginar que imediatamente antes do instante n, ou seja, antes das novas cotações serem anunciadas, o investidor

[20] Essa hipótese simplificadora pode ser relaxada para incluir um fluxo de capital no sistema

pode *redistribuir* as posições da carteira através apenas da compra e venda dos ativos disponíveis no mercado. Assim sua nova carteira, θ_n, tem o mesmo valor $V_{n-1}(\theta)$ que antes, já que não há fluxo de capital. Assim que as novas cotações são anunciadas no instante n a carteira tem um novo valor $V_n(\theta)$ devido apenas aos novos preços dos ativos.

Observe que, da iteração da fórmula acima, obtemos uma versão equivalente da condição de auto-financiamento:

$$\begin{aligned} V_n(\theta) &= V_{n-1}(\theta) + < \theta_n, \Delta S_n > \\ &= V_{n-2}(\theta) + < \theta_{n-1}, \Delta S_{n-1} > + < \theta_n, \Delta S_n > \\ &= \ldots = V_0(\theta) + \sum_{k=1}^{n} < \theta_k, \Delta S_k >, \end{aligned}$$

para $0 \leq n \leq N$.

Finalmente, introduzimos o vetor de preços **atualizado** (ou descontado ou desagiado)

$$\hat{S}_n \equiv \frac{1}{\hat{S}_n^0} = \frac{1}{(1+r)^n} S_n,$$

onde $(1+r)^{-n}$ é chamado *fator de desconto ou deságio.* Observe que $\hat{S}_n^i$ é o montante que, se aplicado no instante inicial a taxa de juros constante r, renderia no instante n o montante S_n^i (note que, $\hat{S}_0 = S_0$). De forma análoga definimos o valor atualizado,

$$\hat{V}_n(\theta) \equiv \frac{1}{\hat{S}_n^0} V_n(\theta)$$

para o qual deduz-se fórmulas análogas da condição de auto-financiamento, por exemplo

$$\hat{V}_n(\theta) = V_0(\theta) + \sum_{k=1}^{n} < \theta_k, \Delta \hat{S}_k >, \tag{4.2}$$

para $0 \leq n \leq N$ (note que $\hat{V}_0(\theta) = V_0(\theta)$).

4.2 Arbitragem e Mercados Viáveis

Vimos que a noção de arbitragem é fundamental na teoria de avaliação de ativos. A definição informal que vimos na seção anterior é a de que uma oportunidade de arbitragem permite obter um ganho sem incorrer em risco. Iremos agora propor uma formulação matemática dessa noção no contexto do modelo que estamos desenvolvendo.

Definição 4.3 *Uma* **oportunidade de arbitragem** *(ou simplesmente, uma arbitragem) é uma estratégia auto-financiadora θ tal que*

(i) $\mathbf{P}(V_0(\theta) = 0) = 1$;

(ii) $\mathbf{P}(V_N(\theta) \geq 0) = 1$; $\mathbf{P}(V_N(\theta) > 0) > 0$.

Em outras palavras, sem arriscar capital algum o investidor tem uma chance de obter lucros. Note que tais oportunidades são as mesmas para os processos $\{S_n\}$ e $\{\hat{S}_n\}$.

Argumentos de ordem econômica sugerem a hipótese fundamental de que para mercado "em equilíbrio" não existem oportunidades de arbitragem: "não há almoço de graça".

Agora estamos em posição de dar-lhe uma formulação matemática precisa:

> Hipótese de Ausência de Oportunidade de Arbitragem (AOA)
>
> Para toda estratégia auto-financiadora θ, se $\mathbf{P}(V_0(\theta) = 0) = 1$ e $\mathbf{P}(V_N(\theta) \geq 0) = 1$, então $\mathbf{P}(V_N(\theta) = 0) = 1$.

Definição 4.4 *Um mercado é dito* **viável** *quando não existe oportunidade de arbitragem.*

O resultado seguinte, conhecido como o **Teorema Fundamental da Matemática Financeira**, proposto nos trabalhos pioneiros de Harrison e Pliska (1979,1981) (ver [21]), fornece uma caracterização dos mercados viáveis através de *medidas de martingal equivalentes* (para noções sobre martingais, ver apêndice A).

Definição 4.5 *Uma medida de probabilidade* $\mathbf{P}^*$ *é dita* equivalente *a* $\mathbf{P}$ *se, para todo evento* $A \in \mathcal{F}$, $\mathbf{P}(A) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{P}^*(A) = 0$.

Em outras palavras, medidas equivalentes associam probabilidade positiva aos mesmos eventos. No nosso caso, $\mathbf{P}^*$ é equivalente a $\mathbf{P}$ se $\mathbf{P}^*(\{\omega\}) > 0$ para todo $\omega \in \Omega$.

Teorema 1 *Um mercado é viável se e somente se existir uma medida de probabilidade* $\mathbf{P}^*$ *equivalente à* $\mathbf{P}$ *tal que os preços atualizados dos ativos sejam* $\mathbf{P}^*$*-martingais.*

Demonstração: Suficiência: Se o processo $\{\hat{S}_n\}$ é um $\mathbf{P}^*$-martingal, então para toda estratégia auto-financiadora θ, $\hat{V}_n(\theta)$ também é um $\mathbf{P}^*$-martingal. Então, lembrando que $\hat{V}_0(\theta) = V_0(\theta)$:

$$\mathbf{E}^*[\hat{V}_n(\theta)] = \mathbf{E}^*[\hat{V}_0(\theta)] = \mathbf{E}^*[V_0(\theta)].$$

Portanto, pela equivalência de $\mathbf{P}$ e $\mathbf{P}^*$ e supondo $\mathbf{P}^*(\hat{V}_N(\theta) \geq 0) = 1$, temos que:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(V_0(\theta) = 0) = 1 \;\Rightarrow\; \mathbf{P}^*(V_0(\theta) = 0) = 1 \;\Rightarrow\; \mathbf{E}^*[V_0(\theta)] = 0 \\
&\Rightarrow \mathbf{E}^*[\hat{V}_N(\theta)] = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{P}^*(\hat{V}_N(\theta) = 0) = 1 \;\Rightarrow\; \mathbf{P}(\hat{V}_N(\theta) = 0) = 1,
\end{aligned}$$

donde θ não é uma arbitragem.

Necessidade:

A demonstração aqui é mais delicada. Primeiramente observamos que, como estamos considerando um espaço amostral finito, $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$, então cada variável aleatória X sobre Ω pode ser representada por um vetor m-dimensional dos seus valores: $X \sim (X(\omega_1), \ldots, X(\omega_m))$. Assim, o espaço $\mathcal{W}$ de todas as variáveis aleatórias sobre Ω é identificada com o espaço $\mathbb{R}^m$.

Considere agora os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^m$:

$$\mathcal{V} = \{X \in \mathcal{W} : \exists\, \theta \text{ auto-financiadora}, V_0(\theta) = 0 \text{ e } X = \hat{V}_N(\theta)\}$$

e

$$\mathcal{K} = \{X \in \mathcal{W} : \forall \omega\; X(\omega) \geq 0 \text{ e } \mathbf{E}[X] = 1\}.$$

Não é difícil checar que $\mathcal{K}$ é compacto convexo e $\mathcal{V}$ é subespaço vetorial. Além disso, se o mercado é viável, então $\mathcal{K} \cap \mathcal{V} = \emptyset$.

Portanto, pelo **Teorema de Minkowsky** (ver apêndice B), existe um funcional linear $L(\cdot)$ sobre $\mathcal{W}$ tal que

$$\forall X \in \mathcal{V}, \quad L(X) = 0$$
$$e$$
$$\forall X \in \mathcal{K}, \quad L(X) > 0.$$

Isto é, existe uma seqüência $\{\lambda(\omega)\}_{\omega \in \Omega}$ de números reais, tal que:

$$\forall X \in \mathcal{K}, \quad \sum_{\omega \in \Omega} \lambda(\omega)\, X(\omega) > 0 \tag{4.3}$$
$$e$$
$$\forall X = \hat{V}_N(\theta) \in \mathcal{V}, \quad \sum_{\omega \in \Omega} \lambda(\omega) X(\omega) = 0 \tag{4.4}$$

Da desigualdade acima, segue que $\forall \omega \in \Omega$, temos $\lambda(\omega) > 0$: basta escolher $X(\omega) = \dfrac{1}{p_i}\mathbf{1}_{\{\omega=\omega_i\}}$, onde $p_i = \mathbf{P}(\{\omega_i\})$ com $i = 1, 2, \ldots, m$. Então, $\mathbf{P}^*$ definida por:

$$\mathbf{P}^*(\{\omega\}) = \frac{\lambda(\omega)}{\sum_{\bar{\omega} \in \Omega} \lambda(\bar{\omega})} > 0,$$

é uma medida de probabilidade equivalente a $\mathbf{P}$. Resta verificar que $\mathbf{P}^*$ é uma medida de martingal. Para usarmos a proposição **A.4**, precisamos do seguinte fato:

> Para todo processo predizível $\{(\theta_n^1, \ldots, \theta_n^d)\}_{n=0}^N$ pode-se construir um processo $\{\theta_n^0\}_{n=0}^N$ tal que $\theta = \{(\theta_n^0, \theta_n^1, \ldots, \theta_n^d)\}_{n=0}^N$ seja uma estratégia auto-financiadora com valor inicial nulo.

Realmente, basta escolher $\theta_0^0 = 0$ $(\in \mathcal{F}_0)$ e para $n \geq 1$ define-se θ_n^0 de tal forma que seja válida a condição de auto-financiamento (4.1) com valor inicial nulo:

$$\hat{V}_n(\theta) = \theta_n^0 + \theta_n^1 \hat{S}_n^1 + \ldots + \theta_n^d \hat{S}_n^d = \sum_{j=1}^{n} (\theta_j^1 \Delta \hat{S}_j^1 + \ldots + \theta_j^d \Delta \hat{S}_j^d).$$

Obtemos,

$$\theta_n^0 = \sum_{j=1}^{n-1} (\theta_j^1 \Delta\hat{S}_j^1 + \ldots + \theta_j^d \Delta\hat{S}_j^d) + [-\theta_n^1 \hat{S}_{n-1}^1 - \ldots - \theta_n^d \hat{S}_{n-1}^d],$$

de onde se conclui que $\theta_n^0 \in \mathcal{F}_{n-1}$.

Ora, a identidade (4.2) é válida para toda estratégia auto-financiadora, em particular para as do tipo que acabamos de construir. Portanto, por (4.4),

$$0 = \mathbf{E}^*[\hat{V}_N(\theta)] = \mathbf{E}^*[\sum_{j=1}^{N} < \theta_j, \Delta\hat{S}_j >]$$

para todo processo predizível $\{(\theta_n^1, \ldots, \theta_n^d)\}_{n=0}^N$. Em particular, vale para o processo:

$$\theta_j^k = \begin{cases} 0, & \text{se } k \neq i \\ \phi_j^i, & \text{se } k = i \end{cases}$$

onde escolhe-se $\phi_j^i \in \mathcal{F}_{j-1}$. Então, para $i = 1, 2, \ldots, d$ e toda seqüência predizível $\{\phi_n^i\}_{n=0}^N$, temos que

$$\mathbf{E}^*[\sum_{j=1}^{N} \phi_n^i \Delta\hat{S}_j^i] = 0,$$

que, pela proposição **A.4**, implica que $\{\hat{S}_n^i\}_{n=0}^N$ é um $\mathbf{P}^*$-martingal. □

4.3 Mercados Completos

Ao contrário da hipótese de ausência de oportunidade de arbitragem, que possui uma justificativa econômica bastante evidente, a completude de um mercado é uma hipótese restritiva e difícil de justificar, descontando o fato de ela permitir a obtenção de fórmulas relativamente simples para preços de ativos

Definição 4.6 *Uma variável aleatória $X \in \mathcal{F}_N$ é dita* **duplicável**[21] *se existir uma estratégia auto-financiadora θ tal que*

$$V_N(\theta) = X.$$

[21] em inglês, "hedgeable" ou "attainable"

Definição 4.7 *Um mercado é dito* **completo** *se* toda *variável aleatória* $X \in \mathcal{F}_N$ *for duplicável.*

Em outras palavras, em um mercado completo toda v.a. mensurável é da forma

$$X = \sum_{i=0}^{d} \theta_N^i S_N^i = < \theta_N, S_N >$$

para alguma estratégia auto-financiadora θ. Ou equivalentemente,

$$\frac{X}{S_N^0} = \hat{V}_N(\theta) = \hat{V}_0(\theta) + \sum_{n=1}^{N} < \theta_n, \Delta\hat{S}_n > .$$

O teorema seguinte fornece uma caracterização de mercados viáveis completos.

Teorema 2 *Um mercado viável é completo se, e somente se, exitir uma* única *medida de probabilidade* $\mathbf{P}^*$, *equivalente a* $\mathbf{P}$, *com repeito à qual os preços atualizados são martingais.*

Demonstração: Primeiro a necessidade: Suponhamos que o mercado é completo. Sejam $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$ probabilidades equivalentes a $\mathbf{P}$ e com respeito às quais os preços atualizados sejam martingais. Pelo corolário **A.3**, $\{\hat{V}_n(\theta)\}_{n=0}^N$ também é um martingal. Pela completude, dado $X \in \mathcal{F}_N$, existe θ auto-financiadora tal que

$$\frac{X}{S_N^0} = \hat{V}_N(\theta).$$

Então, pela propriedade de martingal resulta que

$$\mathbf{E}_i[\hat{V}_N(\theta)] = \mathbf{E}_i[\hat{V}_0(\theta)] = \hat{V}_0(\theta) = V_0(\theta),$$

onde $\mathbf{E}_i[\cdot]$ denota a esperança com respeito à distribuição $\mathbf{P}_i$, $i = 1, 2$. Note que usamos o fato de que toda v.a. mensurável com respeito a $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ é uma constante. Então,

$$\mathbf{E}_1[X/S_N^0(\theta)] = \mathbf{E}_2[X/S_N^0(\theta)],$$

para toda $X \in \mathcal{F}_N$. Em particular, para $X(\omega) = \mathbf{1}_A(\omega)$, com $A \in \mathcal{F}_N$, teremos que

$$\mathbf{P}_1(A) = \mathbf{P}_2(A),$$

$\forall A \in \mathcal{F}_N$. Conseqüentemente

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2$$

sobre $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}$.

Para mostrar a suficiência, consideremos um mercado viável e incompleto e mostremos que não vale a unicidade.

Pela incompletude, sabemos que existe pelo menos uma v.a. $\mathcal{F}_N$-mensurável que não é duplicável. Isto é, se $\mathcal{W}$ é o conjunto de todas as v.a.'s em $(\Omega, \mathcal{F})$, então o conjunto

$$\mathcal{E} = \{X \in \mathcal{F}_N \,:\, X = U_0 + \sum_{n=1}^{N} < \theta_n, \Delta\hat{S}_n >; \\ U_0 \in \mathcal{F}_0\,,\, \theta_n \in \mathcal{F}_{n-1},\, n \geq 1\}$$

é um subespaço *estrito* de $\mathcal{W}$.

Dada uma é uma probabilidade $\mathbf{P}^*$ em $(\Omega, \mathcal{F})$, consideremos o produto interno em $\mathcal{W}$ definido por

$$(X;Y) = \mathbf{E}^*(XY).$$

Então, sabemos que existe uma v.a. X que não é identicamente nula e que é ortogonal (com respeito ao produto escalar acima) ao subespaço $\mathcal{E}$. Observando que a v.a. identidade pertence a $\mathcal{E}$ obtemos

$$\mathbf{E}^*(X) = 0.$$

Considere agora a função de conjunto sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ definida por

$$\mathbf{P}^{**}(\{\omega\}) = \left(1 + \frac{X(\omega)}{2||X||_\infty}\right)\mathbf{P}^*(\{\omega\}),$$

onde $||X||_\infty = \max_{\omega\in\Omega} |X(\omega)| > 0$.

Afirmamos que $\mathbf{P}^{**}$ é uma probabilidade sobre $(\Omega, \mathcal{F})$. De fato, como

$$1 + \frac{X(\omega)}{2||X||_\infty} \geq \frac{1}{2} > 0,$$

segue que $\mathbf{P}^{**}(\{\omega\}) > 0$. Além disso,

$$\mathbf{P}^{**}(\Omega) = \sum_{\omega\in\Omega} \mathbf{P}^{**}(\{\omega\}) = \sum_{\omega\in\Omega} \Big(1 + \frac{X(\omega)}{2\|X\|_\infty}\Big)\,\mathbf{P}^{*}(\{\omega\})$$
$$= 1 + \frac{1}{2\|X\|_\infty}\mathbf{E}^{*}(X) = 1.$$

Ora, $\mathbf{P}^{**}$ é , por construção, equivalente mas distinta de $\mathbf{P}^{*}$. Portanto, nos resta mostrar que, se $\mathbf{P}^{*}$ é uma probabilidade equivalente a $\mathbf{P}$ e tal que $\{\hat{S}_n\}_{n=0}^{N}$ é um $\mathbf{P}^{*}$-martingal, então $\{\hat{S}_n\}_{n=0}^{N}$ também é um $\mathbf{P}^{**}$-martingal. Temos, para qualquer $\{\theta_n\}_{n=0}^{N}$ previsível,

$$\mathbf{E}^{**}[\sum_{n=1}^{N} < \theta_n, \Delta\hat{S}_n >] =$$
$$\mathbf{E}^{*}[\sum_{n=1}^{N} < \theta_n, \Delta\hat{S}_n >] + \frac{1}{2\|X\|_\infty}\mathbf{E}^{*}[X\sum_{n=1}^{N} < \theta_n, \Delta\hat{S}_n >] = 0,$$

onde o primeiro termo é nulo pois $\{\hat{S}_n\}_{n=0}^{N}$ é um $\mathbf{P}^{*}$-martingal, e o segundo se anula pois X é ortogonal a $\mathcal{E}$. Portanto, pela proposição **A.4**, $\{\hat{S}_n\}_{n=0}^{N}$ é um $\mathbf{P}^{**}$-martingal. □

4.4 Avaliação de Ativos

Em um mercado viável e completo qualquer ativo $X \in \mathcal{F}_N$ pode ser avaliado (ou "precificado"). De fato, X é duplicável e portanto existe uma estratégia auto-financiadora θ tal que

$$X = V_N(\theta)$$

ou ainda

$$\frac{X}{S_N^0} = \hat{V}_N(\theta). \tag{4.5}$$

Seja então $\mathbf{P}^{*}$ a medida de martigal equivalente. Vimos que $\hat{V}_n(\theta)$, $0 \le n \le N$ é um $\mathbf{P}^{*}$-martingal. Então tomando o valor esperado na equação (4.4),

$$\mathbf{E}^{*}\Big[\frac{X}{S_N^0}\Big] = \mathbf{E}^{*}[\hat{V}_N(\theta)] = V_0(\theta),$$

onde usamos a propriedade de martingal. Assim, $V_0(\theta)$ é identificado como o preço do ativo X no instante $n = 0$. Ou seja, o preço de X é o que se paga *hoje* para comprar uma carteira (composta dos ativos de base do mercado) que permite duplicar o preço de X *no futuro.*

Mais geralmente, decorre da propriedade de martingal que

$$\hat{V}_n(\theta) = \mathbf{E}^*[\hat{V}_N(\theta) \mid \mathcal{F}_n],$$

ou seja,

$$V_n(\theta) = S_n^0 \, \mathbf{E}^*\Big[\frac{X}{S_N^0} \mid \mathcal{F}_n\Big]$$

e $V_n(\theta)$ é chamado de preço do ativo X no instante n.

Portanto, afim de obter o preço C_n de uma opção de compra européia sobre o ativo de risco S_n^1 basta aplicar a fórmula acima para $X = \max(S_N^1 - K, 0) = (S_N^1 - K)^+$, onde a notação $(Z)^+$ indica a parte positiva de Z. Temos então:

$$C_n = (1+r)^n \, \mathbf{E}^*\Big[\frac{(S_N^1 - K)^+}{(1+r)^N} \mid \mathcal{F}_n\Big] = \frac{1}{(1+r)^{N-n}} \, \mathbf{E}^*[(S_N^1 - K)^+ \mid \mathcal{F}_n], \tag{4.6}$$

e análogamente para o preço P_n de uma opção de venda européia:

$$P_n = \frac{1}{(1+r)^{N-n}} \, \mathbf{E}^*[(K - S_N^1)^+ \mid \mathcal{F}_n].$$

Em ambos os casos θ é uma estratégia de cobertura para o lançador da opção.

Note que como $(S_n^1 - K)^+ = S_n^1 - K + (K - S_n^1)^+$, aplicando valores esperados obtemos a chamada "**paridade call-put**":

$$C_n - P_n = S_n^1 - \frac{1}{(1+r)^{N-n}} K,$$

relacionando os preços dos dois tipos de opção. Em particular isso mostra que basta avaliar, digamos C_n, para obtermos P_n. Na seção seguinte iremos avaliar C_n no caso de um modelo específico bastante importante.

4.5 O Modelo Binomial

Vamos agora aplicar os resultados da seção anterior a um modelo específico, o chamado **modelo binomial multiperiódico** ou modelo de Cox-Ross-Rubinstein [8]. É a generalização do modelo uniperiódico discutido na seção 3.3.

O mercado consiste em dois ativos. O primeiro é um ativo livre de risco rendendo juros a taxa constante $r > 0$; seu valor no instante $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$ é $S_n^0 = (1+r)^n$. O segundo é um ativo de risco, e seu valor no instante $n+1$ é obtido do seu valor no instante n da forma:

$$S_{n+1} = \begin{cases} S_n\, a \\ \\ S_n\, b \end{cases}$$

onde $0 < b < a$ e $S_0 > 0$. Isto é, no instante seguinte a um instante dado seu valor pode ou ter uma alta ou ter uma baixa, o que ocorre aleatóriamente de acordo com uma certa distribuição. O preço atualizado é dado por $\hat{S}_n = \dfrac{1}{(1+r)^n}$.

O espaço de estados $\Omega = \{b, a\}^N$ consiste em $N-$*uplas* representando os valores sucessivos de S_{n+1}/S_n, onde $n = 0, 1, \ldots, N-1$, ou seja as altas e baixas sucessivas a partir do valor inicial ao final. Note que $\sharp\Omega = 2^N$. Por exemplo, um dado $\omega \in \Omega$ pode ser

$$\omega = (a, a, b, a, b, b, b, a, \ldots, a, b, b).$$

Podemos pensar cada $\omega \in \Omega$ como uma possível realização do processo (ou evolução) dos preços do instante $n = 0$ até $n = N$. Ou ainda, como uma "trajetória" ligando o nodo inicial a um dos nodos finais de uma árvore binomial recombinante (ver figura).

Por exemplo, um ω com j a's e $N-j$ b's corresponde a uma única trajetória conectando o nodo 0 ao no nodo (N, j), com exatamente j altas e $N-j$ baixas na ordem especificada pelo vetor ω, e reciprocamente. Além disso, o preço final do ativo nesta realização é $S_N(\omega) = S_0 a^{N-j} b^j$.

Escolhemos $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, e o filtro natural $\mathcal{F}_n = \sigma(S_1, \ldots, S_n)$ ($\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$). Assim a base probabilística do modelo é dada por $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n, 0 \leq n \leq N\}, \mathbf{P})$, com $\mathbf{P}(\{\omega\}) > 0$ para todo $\omega \in \Omega$ (logo, $\mathbf{P}$ é única a menos de equivalências).

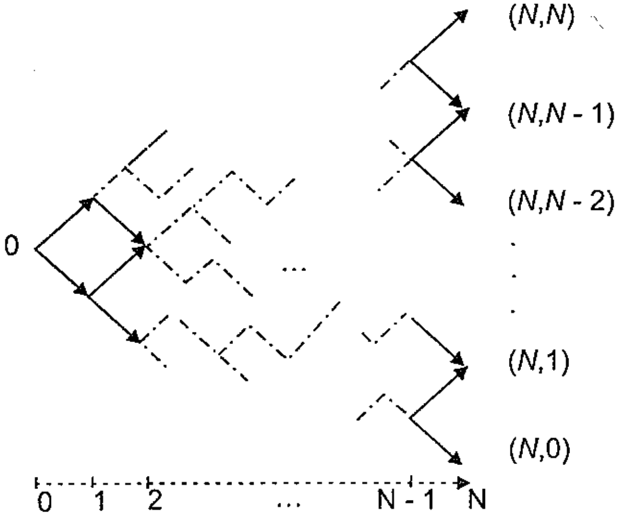

Figura 2: Árvore de N períodos

Consideremos agora a coleção de v.a.'s $\{T_n\}_{n=1}^N$, onde $T_n = S_n/S_{n-1}$. Note então que dado $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_N)$ temos

$$\mathbf{P}(\{\omega\}) = \mathbf{P}(T_1 = \omega_1, \ldots, T_N = \omega_N).$$

Em palavras: a medida $\mathbf{P}$ fica completamente determinada pela distribuição do vetor aleatório $(T_1, \ldots, T_N)$. Além disso, $\mathcal{F}_n = \sigma(T_1, \ldots, T_n)$.

O objetivo dessa seção é obter uma fórmula para o valor no instante n de uma opção européia, referida ao ativo de risco, com preço de exercício K e data de vencimento N.

Lema 4.8 *O processo* $(\hat{S}_n)_{n=0}^N$ *é um* $\mathbf{P}$*-martingal se, e somente se* $\mathbf{E}[T_{n+1}|\mathcal{F}_n] = 1 + r$, *para* $n = 0, 1, \ldots, N-1$.

Demonstração: Basta seguir as equivalências:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[\hat{S}_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \hat{S}_n \quad &\Leftrightarrow \quad \mathbf{E}[\hat{S}_{n+1}/\hat{S}_n \mid \mathcal{F}_n] = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \mathbf{E}[T_{n+1}/(1+r) \mid \mathcal{F}_n] = 1.\end{aligned}$$

□

Lema 4.9 *Se o mercado é viável, então* $b < 1 + r < a$.

Demonstração: Pelo Teorema 1 da seção 4.2, se o mercado é viável existe $\mathbf{P}^*$ equivalente a $\mathbf{P}$ tal que $(\hat{S}_n)_{n=0}^N$ é um $\mathbf{P}^*$-martingal. Pelo Lema 4.7,

$$\mathbf{E}^*[T_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = 1 + r$$

e portanto

$$\mathbf{E}^*[T_{n+1}] = 1 + r.$$

Como T_{n+1} só assume os valores a ou b com probabilidade não nula, segue que

$$b < \mathbf{E}^*[T_{n+1}] < a.$$

$\square$

Daqui em diante supomos que $b < 1 + r < a$ e definimos $p = \dfrac{1 + r - b}{a - b}$.

Lema 4.10 *O processo* $(\hat{S}_n)_{n=0}^N$ *é um* $\mathbf{P}$*-martingal se, e somente se as variáveis aleatórias* $T_1, \ldots, T_N$ *são independentes e identicamente distribuídas (IID) com* $\mathbf{P}(T_1 = a) = p = 1 - \mathbf{P}(T_1 = b)$.

Demonstração: Suponha que $T_1, \ldots, T_N$ sejam IID's com $\mathbf{P}(T_i = a) = p = 1 - \mathbf{P}(T_i = b)$, $i = 1, \ldots, N$. Temos então

$$\mathbf{E}[T_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \mathbf{E}[T_{n+1}] = p\,a + (1-p)\,b = b + p(a-b) = 1 + r.$$

Por outro lado, suponha que $\mathbf{E}[T_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = 1 + r$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$. Como

$$T_{n+1} = a\,\mathbf{1}_{\{T_{n+1}=a\}} + b\,\mathbf{1}_{\{T_{n+1}=b\}}$$

obtemos

$$a\,\mathbf{E}[\mathbf{1}_{\{T_{n+1}=a\}} \mid \mathcal{F}_n] + b\,\mathbf{E}[\mathbf{1}_{\{T_{n+1}=b\}} \mid \mathcal{F}_n] = 1 + r.$$

Por outro lado

$$\mathbf{E}[\mathbf{1}_{\{T_{n+1}=a\}} \mid \mathcal{F}_n] + \mathbf{E}[\mathbf{1}_{\{T_{n+1}=b\}} \mid \mathcal{F}_n] = 1.$$

Das duas identidades acima obtemos facilmente que

$$\mathbf{E}[\mathbf{1}_{\{T_{n+1}=a\}} \mid \mathcal{F}_n] = p \quad \text{e} \quad \mathbf{E}[\mathbf{1}_{\{T_{n+1}=b\}} \mid \mathcal{F}_n] = 1 - p.$$

Finalmente, aplicando indução prova-se que, para todo $\omega_i \in \{b, a\}$,

$$\mathbf{P}(\{\omega\}) = \mathbf{P}(T_1 = \omega_1, \ldots, T_n = \omega_n) = \prod_{i=1}^{n} p_i,$$

onde $p_i = p$ (resp. $1 - p$) se $\omega_i = a$ (resp. b). Isto é, as T_i, para $i = 1, \ldots, N$ são IID com $\mathbf{P}(T_i = a) = p$. □

Podemos concluir que o mercado é viável e completo neste modelo. De fato, escolhendo $\mathbf{P}^*$ tal que $T_1, \ldots, T_N$ sejam IID com peso p, segue que $(\hat{S}_n)_{n=0}^N$ é um $\mathbf{P}^*$-martingal (viabilidade). Por outro lado, uma vez escolhida a distribuição de $(T_1, \ldots, T_N)$, $\mathbf{P}^*$ está completamente determinada (completude).

Proposição 4.11 *Seja $\mathbf{P}^*$ a medida de martingal equivalente a $\mathbf{P}$ e com respeito a qual $(\hat{S}_n)_{n=0}^N$ é um martingal. Então, no instante n o valor de uma opção de compra européia com preço de exercício K e vencimento em N é da do por:*

$$C_n = \frac{1}{(1+r)^{N-n}} \sum_{j=0}^{N-n} \frac{(N-n)!}{(N-n-j)!j!} \times$$
$$\times\, p^j\,(1-p)^{N-n-j}\,(S_n\, a^j\, b^{N-n-j} - K)^+.$$

Demonstração: Notemos que

$$S_N = S_n\,(\frac{S_{n+1}}{S_n}) \ldots (\frac{S_N}{S_{N-1}}) = S_n \prod_{i=n+1}^{N} T_i.$$

Note que $S_n \in \mathcal{F}_n$ e $\prod_{i=n+1}^{N} T_i$ é independente de $\mathcal{F}_n$. Usando a representação $S_n = \sum_x x\,\mathbf{1}_{\{S_n = x\}}$, onde x varia sobre o conjunto (finito) de valores da v.a. S_n, temos, aplicando a fórmula (4.5):

$$C_n = \frac{1}{(1+r)^{N-n}}\,\mathbf{E}^*[(S_n \prod_{i=n+1}^{N} T_i - K)^+ \mid \mathcal{F}_n]$$

$$= \frac{1}{(1+r)^{N-n}} \mathbf{E}^*[(\sum_x x\,\mathbf{1}_{\{S_n=x\}} \prod_{i=n+1}^{N} T_i - K)^+]$$

$$= \frac{1}{(1+r)^{N-n}} \sum_x \mathbf{1}_{\{S_n=x\}}\, \mathbf{E}^*[(x \prod_{i=n+1}^{N} T_i - K)^+].$$

Para calcular o valor esperado, notamos que a v.a. $Y = \prod_{i=n+1}^{N} T_i$ tem distribuição binomial:

$$\mathbf{P}^*[Y = a^{N-n-j} b^j] = \frac{(N-n)!}{(N-n-j)!j!} p^{N-n-j}(1-p)^j,$$

para $j = 0, 1, \ldots, N-n$. Portanto,

$$\mathbf{E}^*[(x \prod_{i=n+1}^{N} T_i - K)^+] =$$
$$\sum_{j=0}^{N-n} \frac{(N-n)!}{(N-n-j)!j!} p^{N-n-j}(1-p)^j \,(x\, a^{N-n-j} b^j - K)^+.$$

A fórmula acima define uma função $f(x)$. Finalmente, obtemos que:

$$C_n = \frac{1}{(1+r)^{N-n}} \sum_x \mathbf{1}_{\{S_n=x\}}\, f(x) = \frac{1}{(1+r)^{N-n}} f(S_n)$$

□

Note que, em particular, o prêmio é dado por

$$C_0 = \frac{1}{(1+r)^N} \sum_{j=0}^{N} \frac{N!}{(N-j)!j!} p^j\,(1-p)^{N-j}\,(S_0\, a^j\, b^{N-j} - K)^+,$$

que é uma função do preço inicial S_0 da ação, da taxa de juros r, do preço de exercício K, da duração N do contrato, e das razões a, b de alta e baixa da ação.

Apêndices

A Martingais

Considere o seguinte jogo bastante simples. Uma moeda, não necessáriamente honesta, é lançada sucessivamente e observa-se a face resultante. Se der cara, o jogador ganha a aposta (que é, digamos, paga pela banca de um cassino) e se der coroa ele perde (e paga à banca).

Supondo que os lançamentos sucessivos da mesma moeda sejam completamente independentes, podemos modelar a evolução do jogo através de uma seqüência de variáveis aleatórias $\{X_n\}_{n\geq 0}$ independentes e com distribuição dita de Bernoulli:

$$\mathbf{P}(X_n = 1) = p \quad \text{e} \quad \mathbf{P}(X_n = -1) = q,$$

onde $p + q = 1$ e associamos o valor 1 (resp. -1) quando der cara (resp. coroa). Isto é $\{X_n\}_{n\geq 0}$ é um processo estocástico em tempo discreto. Seja $\mathcal{F}_n$ a coleção dos eventos que dependem da "história do processo" até o instante n, isto é, a álgebra de eventos gerada pelas possíveis realizações da seqüência aleatória $\{X_0, X_1, \ldots, X_n\}$. A família $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$, onde $\mathcal{F}_{n-1} \subset \mathcal{F}_n$ é chamada de *filtro*.

No instante $n-1$ (já feito o lançamento correspondente) não sabemos o resultado do lançamento seguinte. Portanto, se H_n é o valor apostado sobre o resultado do instante n, H_n deve depender somente da informação disponível até o instante imediatamente anterior, $n-1$. Isto é,

$$H_n = H_n(X_0, X_1, \ldots, X_{n-1})$$

é função mensurável com respeito à $\mathcal{F}_{n-1}$, para todo $n \geq 1$. Um processo $\{H_n\}_{n\geq 1}$ tal que $H_n \in \mathcal{F}_{n-1}$ é dito *predizível*. No nosso exemplo $\{H_n\}_{n\geq 1}$ pode ser pensado como uma *estratégia de aposta*.

Ora, se V_{n-1} é o montante que o apostador possui no instante $n-1$, então, seguindo sua estratégia, o seu saldo no instante n será

$$V_n = V_{n-1} + H_n X_n = V_0 + \sum_{k=1}^{n} H_k X_k,$$

e o seu ganho esperado na n-ésima jogada é

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[V_n - V_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbf{E}[H_n X_n | X_0, X_1, ..., X_{n-1}] \\ &= H_n \mathbf{E}[X_n|X_0, X_1, ..., X_{n-1}] = H_n \mathbf{E}[X_n] = H_n(p - q).\end{aligned}$$

Note então que para $p = q = 1/2$, correspondendo a um jogo "honesto", tem-se

$$\mathbf{E}[V_n|\mathcal{F}_{n-1}] = V_{n-1},$$

e o processo $\{V_n\}_{n\geq 0}$ é chamado de **martingal**. Quando $p \leq q$ (resp. $p \geq q$), correspondendo a um jogo "desfavorável" (resp. "favorável") tem-se $\mathbf{E}[V_n|\mathcal{F}_{n-1}] \leq V_{n-1}$, (resp. $\mathbf{E}[V_n|\mathcal{F}_{n-1}] \geq V_{n-1}$) o processo é chamado de **super**martingal (resp. **sub**martingal). Mais formalmente:

Definição A.1 *Seja* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *um espaço de probabilidade munido de um filtro* $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$. *Uma seqüência de variáveis aleatórias* $\{M_n\}_{n\geq 0}$, *adaptada ao filtro e com* $\mathbf{E}[|M_n|] < \infty$ *é um* **martingal** *quando, para todo* $n \geq 0$

$$\mathbf{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] = M_n \qquad \mathbf{P} - q.c.$$

O processo será um super*martingal (resp.* sub*martingal) se o sinal de igualdade for substituído por* $\leq$ *(resp.* $\geq$*).*

Estes processos são de grande importância em Teoria dos Processos Estocásticos, aparecendo em diversas aplicações.

Algumas propriedades básicas de martingais (existem análogos para super/sub martingais):

(a) A soma de martingais é um martingal;

(b) $\{M_n\}_{n\geq 0}$ é um martingal se e somente se $\mathbf{E}[M_{n+j}|\mathcal{F}_n] = M_n \quad \mathbf{P} - q.c, \ \forall n \geq 0$;

(c) $\mathbf{E}[M_n] = \mathbf{E}[M_0], \ \forall j \geq 0$

Lembramos que a esperança condicional $\mathbf{E}[X|\mathcal{F}]$ fornece a melhor estimativa para a variável aleatória X dada a informação contida em $\mathcal{F}$. Em particular, $\mathbf{E}[X|\mathcal{F}] = X$, se $X \in \mathcal{F}$, e $\mathbf{E}[X|\mathcal{F}] = \mathbf{E}[X]$, se X é independente de $\mathcal{F}$. Assim, da propriedade (b) segue que a característica distintiva de um martingal é que a melhor estimativa de seu valor num instante futuro $k > m$, isto é, $\mathbf{E}[M_k|\mathcal{F}_m]$, é dada pelo seu último valor observado, M_m.

Os seguintes resultados são usados nas seções 4.2 e 4.3.

Proposição A.2 *Sejam* $\{M_n\}_{n=0}^N$ *um martingal e* $\{H_n\}_{n=0}^N$ *uma seqüência predizível com respeito ao filtro* $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0}^N$. *Então a seqüência* $\{X_n\}_{n=0}^N$ *definida por*

$$X_0 = H_0 M_0 \quad (H_0 \in \mathcal{F}_0),$$

e para $n \geq 1$

$$X_n = H_0 M_0 + \sum_{k=1}^{n} H_k \Delta M_k,$$

(onde $\Delta M_n = M_n - M_{n-1}$*) é um martingal.*

Demonstração: Claramente $X_n \in \mathcal{F}_n$ e para $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n] &= \mathbf{E}[H_{n+1}(M_{n+1} - M_n)|\mathcal{F}_n] \\ &= H_{n+1}\,\mathbf{E}[M_{n+1} - M_n|\mathcal{F}_n] = 0.\end{aligned}$$

□

A seqüência $\{X_n\}_{n=0}^N$ chama-se *transformada de martingal* de $\{M_n, 0 \leq n \leq N\}$ por $\{H_n\}_{n=0}^N$.

Corolário A.3 *Se o vetor de preços atualizado* $\{\hat{S}_n\}_{n=0}^N$ *é um martingal, então o valor atualizado* $\{\hat{V}_n(\theta)\}_{n=0}^N$ *é um martingal. Em particular, o valor esperado do ganho obtido ao seguir uma estratégia auto-financiadora é igual ao capital inicial.*

Demonstração: Basta observar que dada uma estratégia auto-financiadora θ, temos, para $n > 0$:

$$\hat{V}_n(\theta) = \hat{V}_0(\theta) + \sum_{k=0}^{n} < \theta_k, \Delta\hat{S}_k >,$$

e

$$\hat{V}_0(\theta) = V_0(\theta) = < \theta_1, \hat{S}_0 > .$$

Ou seja,

$$\hat{V}_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} V_k,$$

onde

$$V_k = \sum_{i=0}^{d} \theta_k^i \, \Delta \hat{S}_k^i$$

são transformadas de martingal e portanto martingais, para $k = 1, 2, \ldots, d$. Assim $\hat{V}_n(\theta)$ é um martingal. □

Finalmente, temos a seguinte caracterização de martingais:

Proposição A.4 *Uma seqüência $\{M_n\}$ de variáveis aleatórias integráveis e adaptadas é um martingal se, e somente se, para toda seqüência predizível $\{H_n\}$ tivermos*

$$\mathbf{E}\Big[\sum_{k=1}^{n} H_k \, \Delta M_k\Big] = 0$$

para todo $n \geq 1$.

Demonstração: Necessidade: Se $\{M_n\}$ é martingal, então a seqüência $\{X_n\}$ definida por

$$X_0 = 0$$

e, para $n \geq 1$,

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} H_k \, \Delta M_k,$$

é um martingal, pelo teorema anterior. Logo,

$$\mathbf{E}[X_n] = \mathbf{E}[X_0] = 0.$$

Suficiência: Para $j = 1, 2, \ldots, n$, considere a seqüência $\{H_k\}$ dada por:

$$H_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq j+1 \\ \mathbf{1}_A & \text{se } k = j+1, \ A \in \mathcal{F}_j \end{cases}$$

é predizível. Temos,

$$\mathbf{E}\Big[\sum_{k=1}^{n} H_k \, \Delta M_k\Big] = \mathbf{E}[\mathbf{1}_A \, (M_{j+1} - M_j)] = 0.$$

Portanto, $\forall A \in \mathcal{F}_j$,

$$\int_A M_{j+1} \, d\mathbf{P} = \int_A M_j \, d\mathbf{P}$$

ou seja,

$$\mathbf{E}[M_{j+1}|\mathcal{F}_j] = M_j \quad \mathbf{P} - q.c.$$

□

B O Teorema de Minkowsky

Lema B.1 *Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ fechado, convexo e não contendo a origem. Então, existe um funcional linear ℓ em $\mathbb{R}^n$ e um número real $\alpha > 0$ tais que*

$$\forall x \in C \;\; \ell(x) \geq \alpha.$$

Em particular, o hiperplano $\ell(x) = 0$ não intercepta C.

Demonstração: Seja $B(O;R) = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x||^2 \leq R^2\}$ a bola de raio $R > 0$ centrada na origem. Escolhemos R tal que $B(O;R) \cap C \neq \emptyset$. Como $B(O;R) \cap C$ é compacto (i.e., fechado e limitado), a função norma $||\cdot||$, sendo contínua, tem um mínimo global num ponto $x_0 \in B(O;R) \cap C$. Segue que

$$\forall x \in C, \;\; ||x|| \geq ||x_0||,$$

como ilustrado na figura para o caso plano.

Da convexidade de C temos que $\forall t \in [0,1]$ e para todo $x \in C$:

$$(1-t)x_0 + tx = x_0 + t(x - x_0) \in C.$$

Logo, pela desigualdade anterior, $\forall t \in [0,1]$:

$$||x_0 + t(x - x_0)||^2 \geq ||x_0||^2,$$

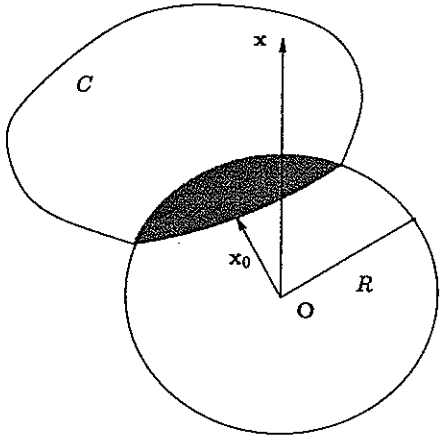

Figura 3: Achando x_0

ou seja,

$$||x_0||^2 + t^2||x - x_0||^2 + 2t < x_0, x - x_0 > \geq ||x_0||^2,$$

ou ainda,

$$t^2||x - x_0||^2 + 2t < x_0, x - x_0 > \geq 0.$$

Ora, a função quadrática $g(t) = at^2 + 2bt$, com $a = ||x - x_0||^2 > 0$, $b = < x_0, x - x_0 >$ será não negativa para $0 \leq t \leq 1$ se e somente se $b \geq 0$. Isto é,

$$< x_0, x - x_0 > \geq 0 \Rightarrow < x_0, x > \geq ||x_0||^2.$$

Então, escolhendo $\ell(x) = < x_0, x >$ e $\alpha = ||x_0||^2$, o lema fica demonstrado. $\square$

Teorema 3 *Em $\mathbb{R}^n$, sejam K um convexo compacto, V um subespaço vetorial. Se $V \cap K = \emptyset$, então existe um funcional linear $\ell(\cdot)$ em $\mathbb{R}^n$ tal que:*

1. $\forall x \in K, \ \ell(x) > 0;$

2. $\forall x \in V,\ \ell(x) = 0$.

Portanto, V está contido num hiperplano que não intercepta K.

Demonstração: Considere o conjunto $C = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists (y,z) \in K \times V, x = y - z\}$. Afirmamos que C é convexo e fechado.

Convexidade: sejam $x_1 = y_1 - z_1$ e $x_2 = y_2 - z_2$, com $y_1, y_2 \in K$ e $z_1, z_2 \in V$. Então, $\forall t \in [0,1]$:

$$(1-t)x_1 + tx_2 = [(1-t)y_1 + ty_2] - [(1-t)z_1 + tz_2] \in C.$$

Fechamento: considere uma seqüência $\{x_n = y_n - z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em C tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. A seqüência $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, pois K é limitado; logo possui uma subseqüência $\{y_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ convergente:

$$\lim_{j\to\infty} y_{n_j} = y,$$

onde $y \in K$, pois K é fechado. Assim,

$$z = \lim_{j\to\infty} z_{n_j} = \lim_{j\to\infty} (y_{n_j} - x_{n_j}) = y - x \in V,$$

pois V é subespaço, logo fechado. Portanto $x = y - z$, com $y \in K$ e $z \in V$, isto é $x \in C$, ou seja C é fechado.

Além disso, C não contém a origem pois $K \cap V = \emptyset$. Pelo lema anterior existe um funcional linear $\ell(\cdot)$ em $\mathbb{R}^n$ e um número real $\alpha > 0$, de forma que

$$\forall x \in C,\ \ell(x) \geq \alpha.$$

Logo,

$$\forall y \in K, \forall z \in V,\ \ell(y) - \ell(z) \geq \alpha > 0.$$

Fixando y e z e aplicando a desigualdade acima para γz, $\gamma \in \mathbb{R}$, arbitrário, concluímos que $\ell(z) = 0$, $\forall z \in V$ e portanto $\ell(y) \geq \alpha > 0$, $\forall y \in K$. □

Referências

[1] Andreasen, J., Jensen, B. and Poulsen, R. (1998) *Eight Valuation Methods in Financial Mathematics: The Black-Scholes Formula as an Example*, Math. Scientist, **23**, 18-40.

[2] Bernstein, P. (1992) *Capital Ideas*, The Free Press, New York.

[3] Bernstein, P. (1998) *Against the Gods: the remarkable story of risk*, John Wiley & Sons.

[4] Bouleau, N. (1998) *Martingales et marchés financiers*, Odile-Jacob.

[5] Baxter, M. and Rennie, A. (1996) *Financial Calculus*, Cambridge University Press.

[6] Chance, D. M. and Peterson, P. P. (1999) *The New Science of Finance*, American Scientist, vol. 97, 256-263.

[7] Chris, N. A. (1997) *Black-Scholes and Beyond*, Irwin.

[8] Cox, J. C. and Rubinstein, M. (1985) *Option Markets*, Prentice-Hall.

[9] Dana, R.A. et Jeanblanc-Picqué, M. (1998) *Marchés Financiers en Temps Continu*, Economica, 2e édition.

[10] Debreu, G. (1991) *The mathematization of economic theory*, The American Economic Review, march , 1-7.

[11] Duffie, D. (1996) *Dynamic Asset Pricing Theory*, Princeton University Press, 2nd edition.

[12] Ekeland, I. (1997) *La Modélisation Mathématique en Économie*, Gazette des Mathématiciens.

[13] Galland, J.-P. (1995) *Risque, Probabilités et Assurance*, Annales des Ponts et Chaussées, no. **76**.

[14] Grimmett, G. R. and Stirzaker, D. R. (1997) *Probability and Random Processes*, Oxford University Press.

[15] Guesnerie, R. (1997) *En passant par Dupuit: L'économie de marché et la théorie économique*, Annales des Ponts et Chaussées, no. **84**.

[16] Hobsbawm, E. (1994) *A era dos extremos*, Companhia das Letras.

[17] Hull, J. (1997) *Options, Futures and Other Derivatives*, 3rd. editions, Prentice Hall.

[18] James, B. (1996) *Probabilidade: um curso em nível intermediário*, Projeto Euclides, segunda edição.

[19] Jarrow, R. A., Maksimovic, V. and Ziemba, W. T. (eds.) (1995) *Finance*, Handbooks in Operations Research and Management Science, Vol. 9, North-Holland.

[20] Jarrow, A. J. and Rudd, A. (1983) *Option Pricing*, Dow Jones-Irwin.

[21] Kabanov, Yu. M. and Kramkov, D. O. (1994) *No-arbitrage and equivalent martingale measures: an elementary proof of the Harrison-Pliska theorem*, Theory Prob. Appl., **39**, No.1, 523-527.

[22] Kellison, S. G. (1991) *The Theory of Interest*, Irwin, second edition.

[23] Klein, L. R. (1971) *The Role of Mathematics in Economics*, The Mathematical Sciences: a Collection of Essays, MIT Press.

[24] Lamberton,D. and Lapeyre, B. (1997) *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*, Chapman & Hall.

[25] Luenberger, D. G. (1998) *Investment Science*, Cambridge University Press.

[26] Neftci, S. N. (1996) *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*, Academic Press.

[27] von Plato, J. (1998) *Creating Modern Probability*, Cambridge University Press.

[28] Samuelson, P. e Nordhaus, W. D. (1993) *Economia*, McGraw-Hill, 14a. edição.

[29] Sanford Jr., C. S. and Borge, D. (1997) *The Risk Management Revolution*, Proceedings of Symposia in Pure and Applied Mathematics, vol. **60**, AMS.

[30] Sant'Ana, J. A. (1997) *Economia Monetária*, Editora Universidade de Brasília.

[31] Shiryaev, A. N., Kabanov, Yu. M., Kramkov, O. D. and Mel'nikov, A. V. (1994) *Toward the theory of pricing of options of both european and american types. I. Discrete time*, Theory Prob. Appl., **39**, No.1, 14-60.

[32] Silva, A. N. da (1993) *Matemática das Finanças*, Vols. I e II, McGraw Hill.

[33] Stix, G. (1998) *A Calculus of Risk*, Scientific American, May, 70-75.

[34] Sullivan, E. J. and Weithers, T. M. (1991) *Louis Bachelier: The Father of Modern Option Pricing Theory* , Journal of Economic Education, **22**, 165-171.

[35] Trowbridge, C. L. *Fundamental Concepts of Actuarial Science* (1989), AERF (revised edition).

[36] Wilmott, P., Howison, S. and Dewynne, J. (1998) *The Mathematics of Financial Derivatives*, Cambridge University Press.

Departamento de Matemática
PUC - Pontifícia Universidade Católica
Rua Marquês de São Vicente, 225 - Gávea
22543-900 - Rio de Janeiro