С.Л. Василенко

ПЕРИОДИЧНОСТЬ ТЕОСОФСКОЙ РЕДУКЦИИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ВОЗВРАТНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

В ряде работ [1, с. 47–48; 2; 3], надо полагать независимо друг от друга, в разное время, группа авторов пришла к описанию одного довольно необычного свойства чисел Фибоначчи, связанного с их периодичностью в 24 шага, которая проявляется в адекватном нумерологическом ряде, построенном по этим числам согласно схеме Пифагора.

Напомним, что числа Фибоначчи образуются в результате двухзвенной аддитивно-рекуррентной процедуры и являются родоначальником построения целого класса (теории) линейных возвратных однородных уравнений и соответствующих им числовых последовательностей.

В этой связи безусловный интерес представляет исследование упомянутого свойства на других типах разностных уравнениях в зависимости от их порядка, значений коэффициентов, принятия тех или иных начальных условий и др.

Ну, и конечно, за «налетом сакральности и эзотерии» такой периодичности в иррациональных числах, а именно это характеризует ряд Фибоначчи при его приближении к своему аттрактору (иррациональному числу Ф), несомненной важным является объяснение смысла и физической природы данной нумерологической периодичности (НП).

Не фетишизируя утверждение Пифагора, что «мир построен на силе чисел», равно как и эзотерические представления, попытаемся посмотреть на это с точки зрения знаменитого афоризма Козьмы Пруткова: «Зри в корень».

Существуют полярные отношения к нумерологии, но то, что в данном случае она привела ряд исследователей к выявлению фиксированной периодичности, пусть до конца неясной природы, становится четко проверяемым и установленным математическим фактом.

Это дает полное основание без излишних наслоений митраизма и магии заглянуть в глубину этого вопроса с надеждой расширить горизонты наших знаний и ближе подойти к пониманию внутренних механизмов возникновения НП.

Например, нас не удивляют периодичности, которые наблюдаются при разложении многих чисел в цепные дроби.

Сегодня также никто не изумляется появлению периодичности в представлении рациональных дробей в виде их десятичного аналога, например,

$$1/7=0{,}142857\;142857\;142857\;142857\;\ldots$$

Это не исключение из правил, а проявление определенных закономерностей, вполне объяснимых математически.

Точно так и в описанном выше случае не следует искусственно завышать степень уникальности чисел Фибоначчи или связанного с ними золотого сечения, которые уже давно заняли свое достойное место в копилке человеческих знаний.

Поэтому оставим сакральное начало нумерологии с ее характерными особенностями трактовки самых разных чисел, и сосредоточим главное внимание на поисках и интерпретации похожих проявлений в иных последовательностях, благо на сегодня их теория глубоко разработана.

Математическая формализация.

Для изложения материала и обоснованности принятых процедур анализа и исследования нумерологических свойств числовых рядов следует выполнить минимально необходимый объем предварительных математических выкладок.

Как известно, десятичная система счисления (с основанием 10) относится к позиционным системам счисления[1], в которых один и тот же числовой знак (цифра) в записи числа имеет различные значения в зависимости от того места (разряда), где он расположен.

Произвольное целое число $B = b_n b_{n-1} ... b_1 b_0$ в 10-ричной системе счисления представим в виде конечной линейной комбинации степеней числа 10 (10^j – разряд или позиция)

$$B = b_n 10^n + b_{n-1} 10^{n-1} + ... + b_1 10 + b_0 = \sum\nolimits_{j=0}^{n} b_j 10^j \tag{1}$$

и вычислим сумму

$$C = \sum\nolimits_{j=0}^{n} b_j , \tag{2}$$

которая дает нам новое число C в виде суммы цифр b_j числа B.

```
Num(x) := | while  x ≥ 10
          |   | s ← 0
          |   | while  x ≥ 1
          |   |   | s ← s + mod(x, 10)
          |   |   | x ← trunc(x·10^(−1))
          |   | x ← s
          | x
```

Рис. 1. Программа в MathCad, реализующая теософскую редукцию

Последовательно-алгоритмическое выполнение операций (1)–(2) сначала с числом B, потом C с его аналогичным представлением в форме (1) и т.д., в конечном счете, приводит нас к некоторой итоговой цифре, равной или меньшей 9 (рис. 1).

Такое поочередное преобразование исходного числа B с его единственной и однозначной сводимостью к заключительной десятичной цифре (кроме нуля) обозначим как операнд (функцию) $\mathrm{N}(B) = B'$, где $0 < B' \le 9$ – натуральное число (цифра).

Описанная формализованная процедура отражает известные со времен Пифагора символические действие с цифрами и является распространенным в нумерологии приемом *теософской редукции* [4].

Теософская редукция (сложение) подразумевает преобразование исходного числа путем сложения всех его цифр до последнего, минимально возможного значения, пока не получится одна итоговая цифра [2].

Отметим некоторые важные особенности целочисленной арифметической функции $0 < \mathrm{N}(B) \le 9$, зависящей одного аргумента:

– функция является *вполне мультипликативной*, то есть для произвольных двух натуральных чисел α и β, не обязательно взаимно простых, выполняется условие

$$\mathrm{N}(\alpha \cdot \beta) = \mathrm{N}\ \{\mathrm{N}(\alpha) \cdot \mathrm{N}(\beta)\}; \tag{3}$$

– функция удовлетворяет свойству *аддитивности*

$$\mathrm{N}(\alpha + \beta) = \mathrm{N}\ \{\mathrm{N}(\alpha) + \mathrm{N}(\beta)\}. \tag{4}$$

Соотношения (3)–(4) дополняются еще двумя формулами (условно 1/2-аддитивности и 1/2-мультипликативности):

$$\mathrm{N}(\alpha + \beta) = \mathrm{N}\ \{\mathrm{N}(\alpha) + \beta\}, \tag{5}$$

[1] Отправным моментом данной статьи стали числа Фибоначчи, поэтому уместно напомнить тот факт, что именно итальянским математиком Фибоначчи была предложена позиционно-целочисленная симметричная троичная система счисления (СС), которая обладает наибольшей плотностью записи чисел (кодов, информации) из всех СС с целочисленными основаниями, а потом уже двоичная, 4-ричная и т.д. Но максимальную (логарифмическую) плотность имеет все-таки СС с нецелочисленным основанием, равным числу Эйлера e [http://ru.wikipedia.org].

$$N(\alpha \cdot \beta) = N\ \{N(\alpha) \cdot \beta\}. \qquad (6)$$

Операция двойного применения операнда $N(\cdot)$ в правой части соотношений (3)–(6) не является какой-либо новой интерпретацией привычных аддитивно-мультипликативных свойств. Она логически вытекает из редукции типа (1)–(2), когда при сложении или умножении чисел в виде десятичных цифр могут образовываться более сложные числа, требующие их повторного "свертывания" до одной цифры.

<u>*Свойства последней цифры в позиционной системе счисления.*</u> В десятичном представлении чисел цифра 9 является последней, поэтому она имеет ряд характерных особенностей. При сложении чисел в позиционных системах счисления для устранения последствий переполнения младшего разряда выполняется перенос единицы в старший разряд.

Так, при сложении с другой цифрой m происходит перенос 1 в старший разряд, а в младшем, естественно, остается $m-1$. Если их просуммировать, то опять получается m, то есть единичка сначала вычитается из m, а затем складывается с результатом вычитания.

Особо подчеркнем, что это общее свойство не самой цифры 9, а любой другой цифры или знака $c-1$, где c – основание системы счисления.

Подобные свойства проявляются и при перемножении чисел.

Исходя из этого, для цифры 9 в десятичной системе счисления справедливы формулы:

$$N(9+\alpha) = N(\alpha), \qquad N(9..9+\alpha) = N(\alpha),$$

$$N(9 \cdot \alpha) = 9, \qquad N(9..9 \cdot \alpha) = 9,$$

$$N(9..9) = 9, \qquad N\left(9^n\right) = 9.$$

где запись $9..9$ означает любое число, составленное из цифр 9.

В общем случае для последней цифры (знака) $\xi = c-1$ в позиционной системе счисления с основанием c верны соотношения ($\xi..\xi$ есть число, составленное из цифры ξ)

$$N(\xi+\alpha) = N(\alpha), \qquad N(\xi..\xi+\alpha) = N(\alpha),$$

$$N(\xi \cdot \alpha) = \xi, \qquad N(\xi..\xi \cdot \alpha) = \xi,$$

$$N(\xi..\xi) = \xi, \qquad N\left(\xi^n\right) = \xi.$$

Данные свойства последней цифры ξ в позиционной системе счисления являются одними из ключевых в порождении периодических свойств в нумерологических рядах.

Для самого основания c и целых чисел k, m выполняются также равенства

$$N\left(c^k\right) = 1, \qquad N\left(c^k - m\right) = c - m,\ \ m < c.$$

Перевод числа x из 10-ричной системы счисления в адекватное число x_c в системе счисления с основанием c можно выполнить по следующей формуле

$$x_c = \sum_{k=0}^{\lceil \lg_c x \rceil} c\left(\mathrm{mod}\, xc^{-k}\right) \cdot 10^k,$$

где $\lceil v \rceil$ – целая часть от v;

$c(\mathrm{mod}\, m)$ сравнимость чисел по модулю [5, с. 41]: $a = c(\mathrm{mod}\, m)$ – числа a и c при делении на m дают один и тот же остаток, что равносильно делимости разности $a-c$ на m и возможности представления c в форме $a = c + mk$, где k – целое.

Соответственно незначительно, но все же изменяется алгоритм редукции, который целесообразно привести (для воспроизведения машинных экспериментов), вследствие неочевидной смены оснований c и 10 (рис. 2).

Теорема 1. Если алгебраическое уравнение $x^n - \sum_{j=1}^{n} a_j x^{n-j} = 0$ имеет максимальный по модулю действительный положительный корень, то линейная рекуррентная (возвратная) последовательность $x_{n+t} = \sum_{j=1}^{n} a_j x_{n+t-j}$ порядка n, начиная с исходной точки $t = 0$, единственным образом формирует нумерологический ряд $t = 0, 1, 2, \ldots$

$$\mathrm{N}(x_{n+t}) = \mathrm{N}\left(\sum_{j=1}^{n} a_j x_{n+t-j}\right) = \mathrm{N}\left(\sum_{j=1}^{n} \mathrm{N}\left(a_j x_{n+t-j} + 9\ldots9\right)\right). \qquad (7)$$

```
Nm(x, c) := | while x ≥ c
            |   | s ← 0
            |   | while x ≥ 1
            |   |   | s ← s + mod(x, 10)
            |   |   | x ← trunc(x·10^(−1))
            |   | m ← trunc(log(|s|, c))
            |   |            m
            |   | x ←        Σ   mod(trunc(s·c^(−k)), c)·10^k
            |   |          k = 0
            | x
```

Рис. 2. Программа в MathCad, реализующая теософскую редукцию в системе счисления с основанием $c \le 10$

Прибавление в (7) числа 9…9 необходимо исключительно в тех случаях, когда за счет отрицательных значений некоторых коэффициентов НП "сбивается" в область отрицательных значений.

Условие максимальности по модулю корня алгебраического уравнения вытекает из теоремы Бернулли [6, 7], согласно которой отношение двух соседних членов возвратной последовательности практически для любого набора начальных данных $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ в пределе стремится к значению этого положительно корня (аналогично, как числа Фибоначчи – к золотому сечению).

Теорема 1 достаточно несложно доказывается на основе принципа суперпозиции линейных систем с учетом свойств (3)–(4) и приводит к очень важным свойствам-следствиям при исследовании нумерологических аддитивных последовательностей:

√ аддитивный характер последовательности чисел не нарушается даже в их нумерологическом сжатии, когда каждый последующий член по-прежнему равен сумме предыдущих с их весовыми коэффициентами a_j, $j = \overline{1, n}$;

√ сами числа ряда x_{n+t} с ростом дискретного параметра t могут достигать порядка 10^{100} и значительно больше, построение же НП сводится к операциям с числами, существенно меньшего порядка (обычно < 100), определяемого величинами a_j, что существенно облегчает формирование чисел и изучение их особенностей.

В этом смысле нумерологические ряды можно рассматривать как фиксированные коды-сжатия чисел рекуррентных последовательностей, производя с ними определенные операции, особенно на больших удалениях от начальной точки, не зная или не вычисляя при этом сами исходные числа с их сотнями и миллионами значащих цифр.

Весь вопрос, что же конкретно "скрывается" за этими кодами?

Чтобы подойти вплотную и разносторонне к проблеме объяснения НП в числах Фибоначчи, вполне логично исследовать на наличие подобных периодичностей и другие, наиболее часто встречающиеся (типовые) ряды.

Расширение таких представлений преследует три задачи:

– исключить или наоборот доказать особую исключительность чисел Фибоначчи в образовании ими НП;

– получить дополнительный материал для последующего анализа;

– дать общие направления последующим исследованиям, если таковые окажутся перспективными для науки.

Определение нумерологических периодов.

Согласно теореме 1 и свойствам (3)–(4), для алгебраического уравнения $x^n - \sum_{j=1}^{n} a_j x^{n-j} = 0$ и соответствующего возвратного ряда (разностного уравнения) $x_{n+t} = \sum_{j=1}^{n} a_j x_{n-j+t}$ можно сформировать адекватную НП по формуле

$$X_{n+t} = \mathrm{N}\left(\sum_{j=1}^{n} \mathrm{N}\left(a_j X_{n-j+t}\right)\right). \qquad (8)$$

Для нахождения возможной периодичности в новом ряде X достаточно положить единице все начальные значения $x_i = X_i = 1,\ i = \overline{0, n-1}$ и осуществить в нем поиск такой следующей последовательности n элементов, сумма которых равна n (рис. 3).

```
Per(X,n,t) := for Tr ∈ n..t
                 | s ← 0
                 | for j ∈ Tr..Tr + n − 1
                 |   s ← s + X_j
                 | return Tr if s = n
                 | Tr
```

Рис. 3. Простая программа в MathCad для определения периода теософской редукции Tr в заданном нумерологическом ряде X длиной t , соотвествующем линейному возвратному уравнению n-го порядка

Обнаруженные таким способом n подряд идущие единицы станут прообразом новой точки отсчета (начала) следующего периода.

Дополнительная проверка на совпадение всех чисел в соседних периодах чаще всего не требуется по следующим обстоятельствам:

– согласно теореме 1 и аддитивным свойствам (4)–(5) все последующие числа после найденной "единичной группы" и до следующего периода полностью воспроизведут первый период;

– нумерологический ряд не содержит нулей, поэтому сумма n единиц, равная n, является минимально возможной среди всех сумм, которые составлены из n любых последовательных элементов этого ряда.

В ряде случаев, когда при единичных начальных условиях образуется тривиальная последовательность НП (например, состоящая только из 1), для обнаружения реальной теософской редукции следует изменить "затравочные числа".

При этом незначительно преобразуется и критерий поиска редукции, например, по совпадению той или иной группы последовательных чисел в соседних периодах.

Этот режим полезно применять наравне с программой (рис. 1), которая хотя и экономична по времени, но в частных случаях может выявлять не сам период, а его половину.

Алгоритм нахождения нумерологических периодов в числовых аддитивно-рекуррентных последовательностях.

1. Выбор алгебраического уравнения порядка n и проверка условия что, максимальный по модулю его корень является действительным положительным.

2. Присвоение единичных начальных условий $\left(X_0,\, X_1,\, ...,\, X_{n-1}\right)=1$.

3. Формирование нумерологического цифрового ряда $X_{n+t} = \mathrm{N}\left(\sum_{j=1}^{n} \mathrm{N}\left(a_j X_{n+t-j}\right)\right)$.

4. Последовательный поиск возможной n-единичной комбинации, положение которой дает искомое значение Tr периода теософской редукции

$$Tr = \underset{t\,\in\,1,\,\infty}{Arg} \left(\sum_{j=1}^{n} X_{n+t-j} = n\right).$$

5. Дополнительная проверка с другими начальными условиями $(X_0,\, X_1,\, ...,\, X_{n-1}) \neq 1$

$$Tr = \underset{t\,>\,n}{Arg} \ (X_{t+k} = X_{t+k+Tr}),$$

где $k = \overline{1,\, K}$; $K > 10$ – длина проверяемых векторов на их идентичность

Описанный алгоритм проверен на большом количестве разнообразных рядов, порождаемых линейными разностными уравнениями, и работает без сбоев.

Большинство выявленных периодов числовых последовательностей достаточно длинные, поэтому ограничимся демонстрацией их периодичности только для чисел Трибоначчи (табл. 1).

Таблица 1

Теософская редукция последовательностей Трибоначчи с разными начальными условиями (желтый цвет) и одинаковым периодом $T = 39$

										1										2										3										4		
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	…
1	1	1	3	5	9	8	4	3	6	4	4	5	4	4	4	3	2	9	5	7	3	6	7	7	2	7	7	7	3	8	9	2	1	3	6	1	1	8	1	1	1	…
2	1	3	6	1	1	8	1	1	1	3	5	9	8	4	3	6	4	4	5	4	4	4	3	2	9	5	7	3	6	7	7	2	7	7	7	3	8	9	2	1	3	…
3	2	1	6	9	7	4	2	4	1	7	3	2	3	8	4	6	9	1	7	8	7	4	1	3	8	3	5	7	6	9	4	1	5	1	7	4	3	5	3	2	1	…
4	7	3	5	6	5	7	9	3	1	4	8	4	7	1	3	2	6	2	1	9	3	4	7	5	7	1	4	3	8	6	8	4	9	3	7	1	2	1	4	7	3	…
5	3	1	9	4	5	9	9	5	5	1	2	8	2	3	4	9	7	2	9	9	2	2	4	8	5	8	3	7	9	1	8	9	9	8	8	7	5	2	5	3	1	…
6	7	8	3	9	2	5	7	5	8	2	6	7	6	1	5	3	9	8	2	1	2	5	8	6	1	6	4	2	3	9	5	8	4	8	2	5	6	4	6	7	8	…
7	1	2	1	4	7	3	5	6	5	7	9	3	1	4	8	4	7	1	3	2	6	2	1	9	3	4	7	5	7	1	4	3	8	6	8	4	9	3	7	1	2	…
8	3	5	7	6	9	4	1	5	1	7	4	3	5	3	2	1	6	9	7	4	2	4	1	7	3	2	3	8	4	6	9	1	7	8	7	4	1	3	8	3	5	…
9	3	4	7	5	7	1	4	3	8	6	8	4	9	3	7	1	2	1	4	7	3	5	6	5	7	9	3	1	4	8	4	7	1	3	2	6	2	1	9	3	4	…

Часть результатов по установлению периодичностей оформлена в табл. 2.

Примечательно, что сумма элементов нумерологических рядов

$$S_{\mathrm{N}} = \mathrm{N}\left(\sum_{j=k}^{Tr-1+k} X_j\right), \tag{9}$$

представленных в табл. 2, в пределах периода почти во всех случаях равна 9, за исключением уравнения Трибоначчи, где: $n = 4 \;\rightarrow\; S_{\mathrm{N}} = 6$ и $n = 7 \;\rightarrow\; S_{\mathrm{N}} = 3$.

В табл. 3 представлены результаты расчета периодов для обобщенного уравнения гармонической пропорции [8] (см. 6 строку табл. 2), которое запишем в несколько ином эквивалентном представлении $(m = 1, 2, 3\ \ldots)$

$$x^{2m} = x^{2m-1} + x^{2m-3} + ... + x + 1,$$

где $m=1$ соответствует обычному уравнению золотого сечения $x^2=x+1$.

Таблица 2

Нумерологические периодичности
в некоторых линейных однородных разностных уравнениях

	Алгебраическое уравнение	Порядок уравнения n										
		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	$x^n-x^{n-1}-x=1$	24	39	24	363 33·11	168 24·7	3120 24·130	156 39·4	29523 39·757	240 24·10	265719 69·3851	984 24·41
2	$x^n-x^{n-2}-x=1$	18	24	72 24·3	240 24·10	78 39·2	2184 24·9	6552 24·273	9438 39·242	720 24·30	4920 24·205	26232 24·1093
3[1]	$x^n-\sum_{j=1}^{n-1}x^j=1$	24	39	78 39·2	312 24·13	2184 24·9	1092 39·28	240 24·10	273 39·7	–[2]	11553 3·3851	9840 24·410
4[3]	$x^n-x^{n-1}=1$	24	24	240 24·10	78 39·2	2184 24·91	2184 24·91	9438 39·242	240 24·10	4920 24·205	26232 24·1093	19680 24·820
5	$x^n-x=1$	24	39	240	363 33·11	2184 24·91	2904 24·121	9438 39·242	2184 24·9	4920 24·205	127920 24·5330	19680 24·820
6[4]	$x^{2n}-\sum_{j=1}^{n}x^{2j-1}=1$	24	24	72 24·3	120 24·5	24	168 24·7	144 24·6	–[2]	120 24·5	264 24·11	72 24·3
7[5]	$x^{2n}-x^n=1$	48	72	96	120	144	168	192	216	240	264	288

Примечание:
[1] – аддитивный ряд "n-боначчи" ($n=2$ – Фибоначчи, $n=3$ – Трибоначчи и т.д.);
[2] – формируется нумерологический ряд, состоящий из одних единиц;
[3] – можно найти в ряде работ А. Стахова, как p-сечения;
[4] – обобщенное уравнение "золотого" сечения, С. Василенко [8];
[5] – подстановкой $y=x^n$ уравнение, хотя и приводится к квадратному уравнению $y^2-y=1$, порождает самостоятельные последовательности с периодами, равными $Tr=24n$.

Таблица 3

Периодичности нумерологических последовательностей,
построенных для обобщенного уравнения гармонической пропорции

n	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40
m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Tr	24	24	24	72	120	24	168	144	72[1]	120	264	216[2]	312	168	120	288	408	72[1]	456	360
$Tr/24$	1	1	1	3	5	1	7	6	3	5	11	9	13	7	5	12	17	3	19	15

Примечание:
[1] – при одинаковых (равных друг другу) n начальных условиях период не выявляется;
[2] – при n единичных начальных условиях алгоритм выходит на 1/3 периода.

Вполне естественно, что с увеличением степени уравнения $n=2m$ период несколько увеличивается, поскольку необходимо некоторое время на его "раскрутку" (проявление).

Во всех случаях значение периода кратно 24 и удовлетворяет неравенству $Tr/24\le m$.

Объяснение физического смысла периодичностей НП.

1. Для начала рассмотрим обычные числа Фибоначчи.

Хорошо известно их свойство $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{F_{t+1}}{F_t}=\Phi$, когда по мере увеличения дискретного t, отношение соседних чисел все точнее приближается к иррациональному значению величины Ф.

Оценим точность такого приближения по модулю $\left|\frac{F_{t+1}}{F_t}-\Phi\right|=10^{-s}$ или с учетом аналитической формулы Бине

$$10^s\left|\frac{\Phi^{t+1}-(-1)^{t+1}\Phi^{-t-1}}{\Phi^t-(-1)^t\Phi^{-t}}-\Phi\right|=1.$$

Умножив данное равенство на знаменатель, получаем

$$10^s\left|(-1)^t\Phi^{-t-1}+(-1)^t\Phi^{-t+1}\right|=\Phi^t-(-1)^t\Phi^{-t}.$$

Учитывая, что $\left|(-1)^t\right|=1$, а при больших значениях t: $\Phi^t>>\Phi^{-t}$, после умножения на Φ^t запишем $10^s\left(\Phi^{-1}+\Phi\right)\approx\Phi^{2t}$ или через логарифмы $2t\lg\Phi\approx s+\lg\left(\Phi^{-1}+\Phi\right)$.

Выбирая приемлемую степень $s\ge10$ аппроксимации числа Ф через числа Фибоначчи досточно большой по сравнению с $\lg\left(\Phi^{-1}+\Phi\right)\approx0{,}35$, находим параметр $t\approx\frac{s}{2\lg\Phi}$.

Пусть s кратно десяти $s=10k$, тогда имеем $t=\frac{5k}{\lg\Phi}\approx24k$.

Это и есть периоды теософской редукции $Tr=24$ для чисел Фибоначчи, которые соответствуют количеству последовательных шагов рекурсии, после которых порядок точности приближения к числу Φ составляет около $10^{-10\cdot k}$, где k – число периодов Tr.

Введя обозначение $\langle z\rangle$, как ближайшего целого к z, запишем окончательную формулу для периода теософской редукции чисел Фибоначчи

$$Tr=\left\langle\frac{5}{\lg\Phi}\right\rangle=24.$$

Точность приближения золотого сечения числами Фибоначчи в точках, кратных периодам теософской редукции можно оценить по формуле (табл. 4), $k=1, 2, 3, ...$

$$\Delta_k=\left|\frac{F_{24\cdot k+1}}{F_{24\cdot k}}-\Phi\right|=10^{-10\cdot k}$$

Таблица 4

Оценка аппроксимации Φ числами Фибоначчи по периодам теософской редукции

$k=s/10$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Δ_k	$2{,}1\cdot10^{-10}$	$1{,}9\cdot10^{-20}$	$1{,}8\cdot10^{-30}$	$1{,}7\cdot10^{-40}$	$1{,}6\cdot10^{-50}$	$1{,}4\cdot10^{-60}$	$1{,}3\cdot10^{-70}$	$1{,}3\cdot10^{-80}$	$1{,}2\cdot10^{-90}$	$1{,}1\cdot10^{-100}$

Итак, мы приходим к важному результату:

Утверждение 1. Нумерологический период $Tr=5/\lg\Phi\approx24$ для чисел Фибоначчи соответствует количеству последовательных шагов возвратной рекурсии, после которых точность приближения к числу Ф увеличивается на порядок $\sim10^{-10}$.

Другими словами, период теософской редукции для квадратного уравнения $x^2 = x + 1$ с положительным корнем $\lambda = \Phi$ соответствует последовательному приближению линейной возвратной рекурсии (решения однородного разностного уравнения) $x_{t+2} = x_{t+1} + x_t$ к своему аттрактору Φ с точностью 10^{-10}:

$$\left| \frac{x_{Tr\cdot k+1}}{x_{Tr\cdot k}} - \Phi \right| \sim 10^{-10\cdot k},$$

$$\frac{x_{Tr\cdot k+1}}{x_{Tr\cdot k}\cdot\Phi} \sim 0{,}\underbrace{999\,...\,999}_{10\cdot k}\,c\ldots, \qquad \frac{x_{Tr\cdot k}}{x_{Tr\cdot k-1}\cdot\Phi} \sim 1{,}\underbrace{00\,...\,00}_{10\cdot k}\,d\ldots\;,$$

где почти во всех случаях цифры $c \neq 9$, $d \neq 0$; $k = 1, 2, 3, \ldots$.

2. Исследуем аналогичным образом числа Трибоначчи [9].

Характеристическое алгебраическое уравнение $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ имеет действительный корень $\lambda = \frac{1}{3}\left(c + \frac{4}{c} + 1\right) \approx 1{,}839$, где $c = \sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}}$, и при заданных начальных условиях, например $(x_0, x_1, x_2) = (1, 1, 1)$, порождает известную последовательность $x_{3+t} = x_{2+t} + x_{1+t} + x_t$ такую, что

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x_{t+1}}{x_t} = \lim_{t\to\infty} \frac{x_{t-1} + x_t + x_{t+1}}{x_{t+1}} = \lambda .$$

Выше показано, что период теософской редукции для чисел Трибоначи составляет $Tr = 39$.

Поскольку понятие целочисленного полупериода в этом случае становится двусмысленным, а точки его исчисления для трех заданных условий также нарушают симметрию периодичности, для анализа выберем четное число $Tr = 38$.

Методом машинного эксперимента на ЭВМ установлено, что точность приближения корня λ числами Трибоначчи в точках, кратных периодам теософской редукции, оценивается по формуле (табл. 5), $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$\Delta_k = \left| \frac{T_{38\cdot k+1}}{T_{38\cdot k}} - \Phi \right| = 10^{-15\cdot k}.$$

Таблица 5

Оценка сходимости чисел Трибоначчи по периодам теософской редукции

$k = s/15$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Δ_k	$4{,}0\cdot10^{-15}$	$2{,}2\cdot10^{-30}$	$0{,}8\cdot10^{-45}$	$2{,}2\cdot10^{-60}$	$1{,}3\cdot10^{-75}$	$0{,}3\cdot10^{-90}$	$1{,}2\cdot10^{-105}$	$0{,}8\cdot10^{-120}$	$0{,}1\cdot10^{-135}$	$0{,}6\cdot10^{-150}$

Другие многозвенные последовательности (см. табл. 2), похожие на числа Фибоначчи и Трибоначи, таким способом проверить не удается в виду отсутствия аналитических решений, поэтому решение численной задачи для порядка уравнений $n \geq 4$ оставим в качестве непростого упражнения заинтересованным исследователям.

В частности, уже для порядка $n = 4$ с периодом теософской редукции $Tr = 78$ и возможной степенью исчисления 10^{-10} для полной проверки $k = \overline{1, 10}$ периодов могут понадобиться 78·10·10=7800 значащих цифр корня уравнения 4-й степени, что весьма проблематично. Ниже будет предложен несколько иной подход.

Утверждение 2. Нумерологический период $Tr = 39\,(38)$ для чисел Трибоначчи соответствует количеству последовательных шагов возвратной рекурсии, после которых точность приближения к аттрактору увеличивается на порядок $\sim 10^{-15}$.

Итак, период Tr и точность сходимости Δ_k для чисел Фибоначчи и Трибоначчи соответственно составляют: 24 – 10^{-10}, 38 – 10^{-15}.

Поскольку $\frac{24 \cdot 3}{2} = 36 < 38$, то последовательность Трибоначчи незначительно медленнее сходится к своему аттрактору, чем числа Фибоначчи – к золотому сечению.

Многочисленные исследования показали, что периодичность остается прежней при изменении начальных условий.

В некоторых случая происходит "попадание" не в целые периоды, а полупериоды, что не является принципиальным

В то же время введение неединичных коэффициентов $a_j \geq 2$ в уравнение $x^4 = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ приводит к изменению периодов.

Изложенное позволяет сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 3. Возникновение теософской редукции является общим свойством линейных разностных (возвратных) уравнений и соответствующих им линейных алгебраических уравнений с максимальным положительным корнем, а в их рекурсивном представлении слабо зависит от начальных условий в виде натуральных чисел.

Определение сходимости редукции для уравнений, не имеющих аналитических корней

Для алгебраических уравнений, не разрешимых в радикалах, можно предложить следующий способ определения соответствия между периодом теософской редукции Tr и точностью сходимости Δ_k возвратной последовательности к максимальному корню уравнения.

Достаточно подсчитать с высокой точностью (представление чисел с плавающей запятой) значения ряда в трех точках, отстоящих друг от друга на кратное число периода Tr.

Тогда по совпадению совокупности цифр можно судить о том, насколько увеличивается точность Δ_k при прохождении последовательности Tr шагов в рассматриваемом периоде.

Способ наглядно демонстрируется примером для уравнения "4-боначчи" с периодом $Tr = 78$ (табл. 6), который соответствует $\Delta_k = 10^{-30}$, то есть сходимость практически такая же, как и у чисел Трибоначчи.

Таблица 6

Определение скорости сходимости ряда за нумерологический период на примере 4-х элементной аддитивной рекурсии ("4-боначчи")

x_{38+0}/x_{37+0}	1,9275619754831069583600232376044835658394760342
x_{38+76}/x_{37+76}	1,9275619754**8**292530426190586173662216869855**5**35455
$x_{38+2\cdot76}/x_{37+2\cdot76}$	1,9275619754**8**292530426190586173662216869855**5**42551

30 одинаковых цифр

Довольно интересно выглядит динамика повышения точности приближения на примере уравнения $x^4 - x^3 = 1$ с периодом редукции $Tr = 240 = 24 \cdot 10$ (табл. 7).

Сначала усредненная равномерность схождения (по четверкам) как бы "сбивается" на 5 и 3, но потом подравнивается и в конце периода дает три "устойчивые" четверки.

Таблица 7

k	Приближение значения максимального по модулю корня уравнения
1	1,38037 $x^4 - x^3 = 1$
2	1,3802775678
3	1,3802775690964
4	1,3802775690976139
5	1,380277569097614115656
6	1,3802775690976141156733007
7	1,380277569097614115673301691837
8	1,3802775690976141156733016918227 43
9	1,380277569097614115673301691822731 8795
10	1,380277569097614115673301691822731877816 79
11	1,38027756909761411567330169182273187781662671 0
12	1.38027756909761411567330169182273187781662670155859
13	1.3802775690976141156733016918227318778166267015587631 0
14	1.38027756909761411567330169182273187781662670155876302539
15	1.38027756909761411567330169182273187781662670155876302541
	5 3 3 5 4 5 3 4 4 4 5 3 3

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{40}$

Таблица 8

Точность приближения чисел Фибоначчи к ЗС

t	z_t	t	z_t
2	0,**23**606797749979	96	$1{,}0\cdot10^{-40}$
4	0,0**30**05664791649	98	$1{,}5\cdot10^{-41}$
6	0,00**43**0523171858	100	$2{,}2\cdot10^{-42}$
8	0,000**62**645797602	102	$3{,}2\cdot10^{-43}$
10	0,0000**91**36361347	104	$4{,}7\cdot10^{-44}$
12	0,0000**13**32901893	106	$6{,}8\cdot10^{-45}$
14	0,00000**19**4466163	108	$1{,}0\cdot10^{-45}$
16	0,000000**28**372197	110	$1{,}5\cdot10^{-46}$
18	0,0000000**41**39447	112	$2{,}1\cdot10^{-47}$
20	0,00000000**60**3937	114	$3{,}1\cdot10^{-48}$
22	0,000000000**88**113	116	$4{,}5\cdot10^{-49}$
24	0,000000000**12**856	118	$6{,}6\cdot10^{-50}$
26	0,0000000000**18**76	120	$9{,}6\cdot10^{-51}$
28	0,00000000000**27**4	122	$1{,}4\cdot10^{-51}$
30	0,000000000000**40**	124	$2{,}0\cdot10^{-52}$

Функция $f(z_t) = \left[z_t \cdot 10^{\lceil -\lg z_t \rceil + 2} \right] \bmod 100$ позволяет выделить первые две значащие цифры

$$z_t = \frac{F_t}{F_{t-1}\Phi} - 1.$$

В табл. 8 эти цифры выделены жирным шрифтом.

Наглядно видно (рис. 4), что минимальные значения данной функции приходятся на точки, кратные полупериоду теософской редукции.

По истечению трех периодов происходит сдвиг на один шаг вследствие появления у функции z_t в пределах полупериода еще одного 7-го значения $z_{120} = 9{,}6 \cdot 10^{-51}$.

После этого в узловых точках, кратных полупериоду, величины функции z_t становятся уже максимальными.

Так или иначе, но в этих основных точках z_t принимает экстремальные значения.

Следовательно, в позиционной 10-ричной системе счисления на данных участках происходят характерные изменения с переносом 1 в старшие разряды чисел, что, в конечном счете (через ту же цифру 9), и порождает нумерологическую периодичность.

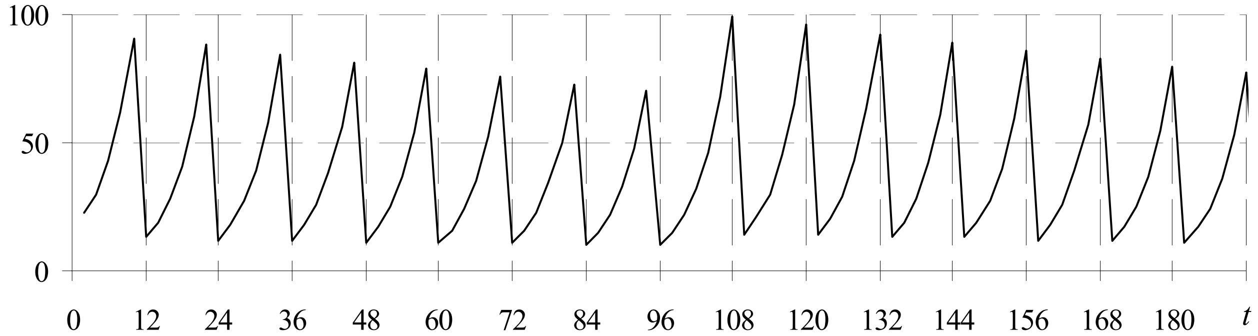

Рис. 4. График изменения функции $f(z_t)$, характеризующей приближение чисел Фибоначчи к золотому сечению (по первым двум значащим цифрам фактического отклонения)

Рекуррентные последовательности в других позиционных системах счисления.

Чтобы еще раз убедиться, что НП – это характерное свойство позиционной системы счисления, проведем аналогичные исследования, например, для чисел Фибоначчи и Трибоначчи в других системах счисления.

Результаты расчетов представлены в табл. 9 и табл. 10.

Изменение периода теософской редукции *Tr*, на первый взгляд носит спорадический (нерегулярный) характер, хотя определенные закономерности все же существуют.

Прежде всего, все периоды меньше 24. То есть за счет более быстрого переполнения (смены) разрядов, в процессе формирования чисел система быстрее выходит на свою периодичность.

Сумма элементов S_N нуменорологических рядов, определяемая соотношением (9), равна последней цифре основания системы только для оснований $c = 2, 3, 4, 10$, в остальных случаях она носит сравнительно произвольный характер.

Таблица 9

Нумерологические ряды чисел Фибоначчи в разных позиционных системах счисления с основанием *c*

C	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	*Tr*	S_N
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	2	1	1	2	1	1	2	1	1	2	1	1	2	1	1	2	1	1	2	1	1	2	1	3	2
4	1	1	2	3	2	2	1	3	1	1	2	3	2	2	1	3	1	1	2	3	2	2	1	3	1	8	3
5	1	1	2	3	1	4	1	1	2	3	1	4	1	1	2	3	1	4	1	1	2	3	1	4	1	6	3
6	1	1	2	3	5	3	3	1	4	5	4	4	3	2	5	2	2	4	1	5	1	1	2	3	5	20	1
7	1	1	2	3	5	2	1	3	4	1	5	6	5	5	4	3	1	4	5	3	2	5	1	6	1	24	3
8	1	1	2	3	5	1	6	7	6	6	5	4	2	6	1	7	1	1	2	3	5	1	6	7	6	16	2
9	1	1	2	3	5	8	5	5	2	7	1	8	1	1	2	3	5	8	5	5	2	7	1	8	1	12	4
10	1	1	2	3	5	8	4	3	7	1	8	9	8	8	7	6	4	1	5	6	2	8	1	9	1	24	9

В работе [10] утверждается, что «число 9 является "нумерологической сущностью" ряда Фибоначчи, то есть оно выражает некоторые "сакральные" свойства ряда Фибоначчи».

С этим можно согласиться, но только в 10-ричной системе счисления, чему есть достаточно убедительное обоснование, связанное с точностью 10^{-10}.

В других позиционных системах счисления такие переходы могут происходить в иные моменты времени и обусловлено своими закономерностями, например, $\mathrm{N}_4\left(10^4 - 1_{10}\right) = 3$, $\mathrm{N}_5\left(10^5 - 1_{10}\right) = 3$, $\mathrm{N}_6\left(10^6 - 1_{10}\right) = 1$, $\mathrm{N}_8\left(10^7 - 1_{10}\right) = \mathrm{N}_8\left(10^9 - 1_{10}\right) = 2$ и т.п., где нижний индекс обозначает основание системы счисления.

Таблица 10

Нумерологические ряды чисел Трибоначчи
в позиционных системах счисления с основанием *c*

c										1										2										3										4										5	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	*Tr*
3	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	4
4	1	1	1	3	2	3	2	1	3	3	1	1	2	1	1	1	3	2	3	2	1	3	3	1	1	2	1	1	1	3	2	3	2	1	3	3	1	1	2	1	1	1	3	2	3	2	1	3	3	1	13
5	1	1	2	4	3	1	4	4	1	1	2	4	3	1	4	4	1	1	2	4	3	1	4	4	1	1	2	4	3	1	4	4	1	1	2	4	3	1	4	4	1	1	2	4	3	1	4	4	1	1	8
6	1	1	1	3	5	4	2	1	2	5	3	5	3	1	4	3	3	5	1	4	5	5	4	4	3	1	3	2	1	1	4	1	1	1	3	5	4	2	1	2	5	3	5	3	1	4	3	3	5	1	31
7	1	1	1	3	5	3	5	1	3	3	1	1	5	1	1	1	3	5	3	5	1	3	3	1	1	5	1	1	1	3	5	3	5	1	3	3	1	1	5	1	1	1	3	5	3	5	1	3	3	1	13
7	1	2	1	4	1	6	5	6	5	4	3	6	1	4	5	4	1	4	3	2	3	2	1	6	3	4	1	2	1	4	1	6	5	6	5	4	3	6	1	4	5	4	1	4	3	2	3	2	1	6	26
8	1	1	1	3	5	2	3	3	1	7	4	5	2	4	4	3	4	4	4	5	6	1	5	5	4	7	2	6	1	2	2	5	2	2	2	6	3	4	6	6	2	7	1	3	4	1	1	6	1	1	48
9	1	1	1	3	5	1	1	7	1	1	1	3	5	1	1	7	1	1	1	3	5	1	1	7	1	1	1	3	5	1	1	7	1	1	1	3	5	1	1	7	1	1	1	3	5	1	1	7	1	1	8
9	1	1	2	4	7	5	8	4	1	5	2	8	7	1	8	8	1	1	2	4	7	5	8	4	1	5	2	8	7	1	8	8	1	1	2	4	7	5	8	4	1	5	2	8	7	1	8	8	1	1	16
10	1	1	1	3	5	9	8	4	3	6	4	4	5	4	4	4	3	2	9	5	7	3	6	7	7	2	7	7	7	3	8	9	2	1	3	6	1	1	8	1	1	1	3	5	9	8	4	3	6	4	39

В числах Трибоначчи мы уже видим, что при $c = 8$ рекуррентный ряд выходит за пределы периода $Tr = 39$, характерного для десятичной системы счисления.

То, что 10-система не является в этом смысле предельной для теософского периода, наглядно демонстрируется и на примере возвратных рядов "*n*-боначчи" (табл. 2, табл. 11).

Таблица 11

Нумерологические ряды чисел "*n*-боначчи"
в позиционных системах счисления с основанием *c*

Рекуррентная последовательность	Основание системы счисления *c*						
	4	5	6	7	8	9	10
Фибоначчи	8	6	20	24	16	12	24
Трибоначчи	13	8	31	26	48	16	39
4-боначчи	26	10	312	130	342	20	78
5-боначчи	104	12	781	312	2801	24	312
6-боначчи	728	14	208	728	342	28	2184
7-боначчи	364	16	9372	728	137257	32	1092
8-боначчи	80	18	195312	720	13680	36	240
9-боначчи	91	20	488281	910	–	40	273

Последующие расчеты теряют особый смысл, поскольку становится очевидным, что теософская редукция является фактическим "заложником" системы счисления.

Поиск каких-либо четких закономерностей в численных значениях таких периодов – также весьма сомнителен и вряд ли имеет практическое значение.

Заметим, что в отдельных случаях единичные начальные условия приводит к тривиальным рядам, поэтому для нахождения периода приходится видоизменять начальные условия.

Исследование редукций для квадратного уравнения.

Вполне естественно проверить описанные подходы на других последовательностях, прежде всего таких, характеристические корни которых могут быть вычислены аналитически с любой заданной точностью.

Рассмотрим квадратное уравнение $x^2 - mx - q = 0$ с положительным корнем

$$\lambda = \frac{m + \sqrt{m^2 + 4q}}{2}.$$

Рекуррентную последовательность Фибоначчи $x_{2+t} = mx_{1+t} + qx_t$ в этом случае можно представить аналитически в виде обобщенной формулы Бине, полученной в работе [11]:

$$x_t = \frac{\lambda^t - (-q)^t \lambda^{-t}}{\sqrt{m^2 + 4q}}.$$

Применяя описанный выше подход к числам Фибоначчи, получим уравнение, связывающее точность приближения по мудулю $\left|\frac{x_{t+1}}{x_t} - \lambda\right| = 10^{-s}$ с параметрами квадратного уравнения λ, q (коэффициент m присутствует в неявном виде через корень λ)

$$10^s\left(q\lambda^{-1} + \lambda\right) + (-1)^t = \left(\frac{\lambda^2}{q}\right)^t. \tag{10}$$

Сумма $q\lambda^{-1} + \lambda \geq \Phi^{-1} + \Phi \approx 2{,}24$, а степень s обычно принимается не менее 3, поэтому величиной $(-1)^t$ можно пренебречь. Тогда выражение (10) легко разрешается относительно t

$$t = \frac{s + \lg\left(q\lambda^{-1} + \lambda\right)}{2\lg\lambda - \lg q}. \tag{11}$$

Соотношение (11) позволяет определить порядковый номер числовой последовательности x_t, который дает приближение к корню λ квадратного уравнения с точностью порядка 10^{-s}.

Таблица 12

Периоды теософской редукции для квадратного уравнения общего вида

$x^2 - mx - q = 0$

$q' = \mathrm{N}(q)$	$m' = \mathrm{N}(m)$								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	24	24	6	8	8	6	24	24	2
2	18	9	12	6	3	12	18	9	12
3	3	2	1	3	6	1	1	6	1
4	24	24	6	24	24	6	24	24	6
5	18	3	12	18	9	12	6	9	12
6	3	6	1	1	2	1	3	6	1
7	24	24	6	24	24	6	24	24	6
8	6	9	12	18	9	12	18	3	4
9	1	6	1	3	6	1	3	2	1

Примечание: цветом выделены случаи, когда для выявления нетривиального периода начальные условия $x_0, x_1 > 1$

И наоборот, задавая степень точности s, из (11) легко определяется местоположение t элемента ряда x_t.

Установлено (табл. 12), что все периоды меньше либо равны 24. Это вполне естественно, поскольку сходимость разностных уравнений при $m > 1, q > 1$ гораздо быстрее, чем у обычных чисел Фибоначчи, что наглядно видно из представления λ в виде их рекурсивного радикала и цепной дроби (многократного повторения корня λ – "через самого себя"):

$$\lambda = \sqrt{q + m\lambda} \approx \sqrt{q + m\cdot\sqrt{q + m\cdot\sqrt{q + m\cdot\sqrt{q + \ldots}}}},$$

$$\lambda = m + \frac{q}{\lambda} \approx m + \cfrac{q}{m + \cfrac{q}{m + \cfrac{q}{m + \ldots}}}$$

Для двухзначных значений коэффициентов m и q периоды начинают повторяться, то есть

$$Tr(m,q) = Tr(\mathrm{N}(m), \mathrm{N}(q)).$$

Заключение.

Периодичность нумерологических последовательностей (НП) – в ряде случаев хороший и независимый от других методов индикатор (мера) сходимости рекуррентных числовых рядов.

Как правило, чем лучше и быстрее сходимость последовательностей к своему аттрактору, тем меньше период НП.

Конкретные значения периодов зависят от порядка разностного уравнения, входящих в него коэффициентов и принятой системы счисления, но практически не зависят или слабо зависят от начальных условий ("затравочных чисел").

При широком разнообразии значений периодов какие-либо их экзотерические свойства носят нерегулярный, часто спонтанный, характер, что не позволяет утверждать об их системном проявлении.

Нумерологический период $Tr = 5/\lg\Phi \approx 24$ для чисел Фибоначчи соответствует количеству последовательных шагов возвратной рекурсии, после которых точность приближения к числу Ф увеличивается на порядок $\sim 10^{-10}$.

Нумерологический период $Tr = 39\ (38)$ для чисел Трибоначчи соответствует количеству последовательных шагов возвратной рекурсии, после которых точность приближения к аттрактору увеличивается на порядок $\sim 10^{-15}$.

Можно, конечно, под вышеизложенное подвести и более строгую математическую теорию. Возможно, появятся обобщающие и практически полезные результаты.

Но главное уже понятно. Теософская редукция – это общее свойство большинства линейных разностных уравнений, которая отражает характерные моменты изменения ("фазовые переходы") разрядности чисел в процессе их движения к своему аттрактору – максимальному по модулю положительному корню характеристического алгебраического уравнения, – в зависимости от основания принятой позиционной системы счисления.

Литература.

1. *Сергиенко П.Я.* Триалектика. Святая Троица как символ знания. – Пущино, 1999. – 82 с.
2. *Каменская В.Г.*, *Зверева С.В.* Ряд Фибоначчи и его странные свойства: фрактальные и нумерологические характеристики // Сознание и физическая реальность. – 2001.– № 5. – С. 17–30. – http://www.numbernautics.ru/content/view/314/35/.
3. *Корнеев А.А.* Структурные тайны золотого ряда // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.14359, 21.04.2007. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321047.htm.
4. *Папюс А.Ж.* Наука о числах: Пер. с фр. – М.:АСТ, 1999. – 384 с.
5. *Виноградов И.М.* Основы теории чисел: 10-е изд., стер. – Спб.: Лань, 2004. – 180 с.
6. *Утешев А.Ю.* Разностное уравнение и рекуррентная последовательность. – http://pmpu.ru/vf4/recurr.
7. *Василенко С.Л.* Гармоническая пропорция в линейных разностных уравнениях // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15330, 09.06.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321111.htm.
8. *Василенко С.Л.* Обобщенное уравнение гармонической пропорции. Теория и приложения. – Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15325, 06.06.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321110.htm.
9. *Feinberg M.* Fibonacci-Tribonacci. Fibonacci Quart. 1. – 1963. – P. 71–74.
10. *Стахов А.П.* Удивительное математическое свойство рядов Фибоначчи (комментарий к статье А. Корнеева "Структурные тайны золотого ряда") // Академия Тринитаризма, М.: Эл. № 77-6567, публ.14385, 06.05.2007. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321050.htm.
11. *Василенко С.Л.* Аналитика "золотых" пропорций // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 14795 от 12.05.2008. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321085.htm.