А. Н. Колмогоров, Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1941, том 5, выпуск 1, 3–14

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 5 (1941), 3—14 Série mathématique

А. Н. КОЛМОГОРОВ

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ И ЭКСТРАПОЛИРОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Устанавливаются спектральные условия для возможности экстраполировать и интерполировать стационарные случайные последовательности по достаточно большому числу членов с любой заданной точностью.

Введение

Пусть каждому целому t $(-\infty < t < +\infty)$ соответствует действительная случайная величина $x(t)$ с конечным математическим ожиданием квадрата. Последовательность $\{x(t)\}$ случайных величин $x(t)$ будем называть *стационарной*, если математические ожидания *

$$m = \mathrm{M}\,x(t)$$

и

$$B(k) = \mathrm{M}\,[(x(t+k)-m)(x(t)-m)]$$

не зависят от t. Без ограничения общности можно положить

$$m = \mathrm{M}\,x(t) = 0. \tag{1}$$

Тогда

$$B(k) = \mathrm{M}\,[x(t+k)\,x(t)]. \tag{2}$$

Так как

$$B(-k) = B(k), \tag{3}$$

то достаточно рассматривать вторые моменты $B(k)$ лишь для $k \geqslant 0$.

Задача линейного экстраполирования стационарной последовательности, удовлетворяющей условию (1), заключается в подборе при заданных $n > 0$ и $m \geqslant 0$ таких действительных коэффициентов a_s, при которых линейная комбинация

$$L = a_1 x(t-1) + a_2 x(t-2) + \ldots + a_n x(t-n)$$

случайных величин

$$x(t-1),\ x(t-2),\ \ldots,\ x(t-n)$$

---

* Математическое ожидание случайной величины y обозначается далее через $\mathrm{M}\,y$.

доставляет возможно более точное приближение к случайной величине $x(t+m)$. За меру точности такого приближения естественно принять математическое ожидание

$$\sigma^2 = \mathrm{M}(x(t+m)-L)^2 =$$
$$= B(0) - 2\sum_{s=1}^{n} B(m+s)\,a_s + \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} B(p-q)\,a_p a_q.$$

Если вторые моменты $B(k)$ известны, то легко решается задача разыскания таких значений коэффициентов a_s, при которых σ^2 достигает наименьшего значения. Это наименьшее значение σ^2 будем обозначать через $\sigma_E^2(n, m)$.

Очевидно, при увеличении n величина $\sigma_E^2(n, m)$ не может возрастать. Поэтому существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_E^2(n, m) = \sigma_E^2(m). \tag{4}$$

Определение этого предела и является первой из решаемых в настоящей работе задач.

Что касается задачи интерполирования, то мы рассмотрим лишь случай оценки $x(t)$ по величинам

$$x(t+1),\ x(t+2),\ \ldots,\ x(t+n),$$
$$x(t-1),\ x(t-2),\ \ldots,\ x(t-n).$$

Для этого случая обозначим через $\sigma_I^2(n)$ минимальное значение математического ожидания

$$\sigma^2 = \mathrm{M}(x(t)-Q)^2,$$

где Q есть линейная форма:

$$Q = a_1 x\ (t+1) + a_2 x\ (t+2) + \ldots + a_n x\ (t+n) +$$
$$+ a_{-1} x(t-1) + a_{-2} x(t-2) + \ldots + a_{-n} x(t-n)$$

с постоянными действительными коэффициентами a_s.

При возрастании n величина $\sigma_I^2(n)$ не возрастает. Поэтому существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_I^2(n) = \sigma_I^2. \tag{5}$$

Нашей второй задачей является определение σ_I^2. Предлагаемое далее решение двух сформулированных выше задач было сообщено без доказательства в моей заметке ([1]) *. Оно опирается на понятия, относящиеся к спектральной теории стационарных случайных процессов.

Спектральная теория стационарных случайных процессов была построена А. Я. Хинчиным для случая непрерывного изменения временного аргумента t ([2]). Для интересующего нас сейчас случая дискрет-

* В формуле (1) этой заметки допущена опечатка. Правильный вид формулы (1) таков:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^2(I) = \sigma^2(I) = \frac{\pi}{\int_0^{\pi} \frac{d\lambda}{s(\lambda)}}.$$

ной стационарной последовательности подробное изложение теории дано в книге H. Wold'a ([3]). Основное значение здесь имеет следующая теорема *.

ТЕОРЕМА 1. *Для любой стационарной последовательности* $\{x(t)\}$ *вторые моменты* $B(k)$ *можно представить в виде*

$$B(k)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos k\lambda\, dW(\lambda), \tag{6}$$

где $W(\lambda)$ *есть неубывающая действительная функция, определяемая формулой*

$$W(\lambda)=B(0)\lambda+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B(k)}{k}\sin k\lambda. \tag{7}$$

Производная

$$w(\lambda)=\frac{dW(\lambda)}{d\lambda}$$

неубывающей функции $W(\lambda)$ существует почти всюду, неотрицательна и суммируема. Так как

$$\log w(\lambda)\leqslant w(\lambda),$$

то из суммируемости $w(\lambda)$ вытекает, что интеграл

$$P=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\log w(\lambda)\, d\lambda \tag{8}$$

либо конечен, либо равен $-\infty$ **. Далее мы доказываем следующую теорему:

ТЕОРЕМА 2. *Если* $P=-\infty$, *то* $\sigma_E^2(m)=0$ *для всех* $m\geqslant 0$. *Если же интеграл* P *конечен, то*

$$\sigma_E^2(m)=e^P(1+r_1^2+r_2^2+\ldots+r_m^2), \tag{9}$$

где r_s *определяются из соотношений*

$$e^{a_1\zeta+a_2\zeta^2+\ldots}=1+r_1\zeta+r_2\zeta^2+\ldots, \tag{10}$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos k\lambda\log w(\lambda)\, d\lambda. \tag{11}$$

Так как $w(\lambda)\geqslant 0$, то интеграл

$$R=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\lambda}{w(\lambda)} \tag{12}$$

либо конечен, либо равен $+\infty$ ***. Мы докажем далее такую теорему:

ТЕОРЕМА 3. *Если* $R=+\infty$, *то* $\sigma_I^2=0$. *Если же интеграл* R *конечен, то*

$$\sigma_I^2=\frac{1}{R}. \tag{13}$$

---

* См. ([3]), § 17.

** Если $w(\lambda)=0$ на множестве положительной меры, то считаем $P=-\infty$.

*** Если $w(\lambda)=0$ на множестве положительной меры, то считаем $R=+\infty$.

В моей работе ([4]) построена теория стационарных последовательностей элементов комплексного гильбертова пространства. В § 1 настоящей статьи я показываю, что стационарные случайные последовательности в определенном выше смысле могут рассматриваться как частный случай стационарных последовательностей, рассмотренных в ([4]). Это позволяет получить сформулированные выше теоремы 1, 2 и 3 в качестве простых следствий из результатов работы ([4]).

В дальнейшем изложении ссылки на формулы с номерами из двух чисел, разделенных точкой [например (8. 44)], относятся к формулам из ([4]).

1. Стационарные случайные последовательности и геометрия гильбертова пространства

Будем исходить из аксиоматики и построения основных понятий теории вероятностей, предложенных в моей книге ([5]), с тем изменением, что рассматриваемые далее случайные величины могут принимать не только действительные, но и комплексные значения *.

Рассмотрим множество $\mathfrak{H}$ всех случайных величин x какого-либо борелевского поля вероятностей (F, P), имеющих конечное математическое ожидание квадрата абсолютной величины, считая при этом эквивалентные случайные величины (т. е. случайные величины, отличающиеся друг от друга лишь с вероятностью равной нулю) за тождественные. Введем в $\mathfrak{H}$ скалярное произведение

$$(x, y) = \mathrm{M}(x\bar{y}). \tag{14}$$

Норму в $\mathfrak{H}$ определим формулой

$$\| x \|^2 = (x, x) = \mathrm{M}\,| x |^2, \tag{15}$$

сложение же элементов $\mathfrak{H}$ и их умножение на комплексные числа будем понимать в обычном смысле.

Легко проверить, что множество $\mathfrak{H}$ при установленных сейчас определениях удовлетворяет постулатам A, B и E книги M. Stone'a ([6]), т. е. всем постулатам абстрактного унитарного пространства.

Пусть теперь $\{x(t)\}$ есть стационарная последовательность действительных случайных величин $x(t)$ поля вероятностей (F, P) в смысле, принятом во введении, удовлетворяющая дополнительному условию (1). Тогда в силу (2) и действительности $x(t)$

$$B(k) = \mathrm{M}\,[x(t+k)\,x(t)] = (x(t+k),\, x(t)).$$

* Комплексная функция $x(\xi)$, определенная на множестве E элементарных событий ξ, называется случайной величиной, если при любом выборе действительных чисел a и b множество всех ξ, для которых действительная и мнимая части $x(t)$ удовлетворяют соответственно неравенствам $Rx(\xi) < a$, $Ix(\xi) < b$, принадлежит системе F.

Так как, по определению, $B(k)$ не зависит от t, то $\{x(t)\}$ является стационарной последовательностью элементов пространства $\mathfrak{H}$ в смысле (4).

В (4) я рассматриваю стационарные последовательности, лежащие в гильбертовом пространстве, т. е. в пространстве, удовлетворяющем, кроме постулатов A, B и E, еще постулатам C и D книги M. Stone'а (6). Это ограничение, однако, несущественно. В самом деле, обозначим через H_x минимальное замкнутое линейное подпространство пространства $\mathfrak{H}$, содержащее все элементы последовательности $\{x(t)\}$. Легко доказывается, что H_x сепарабельно, т. е. удовлетворяет постулату D. Сепарабельное унитарное пространство или само является гильбертовым (т. е. удовлетворяет, кроме A, B, D и E, еще постулату C) или конечномерно и в последнем случае может быть расширено до некоторого гильбертова пространства H.

Таким образом, к последовательности $\{x(t)\}$ можно применить, полагая

$$B(k)=B_{xx}(k)=(x(t+k),\, x(t)), \tag{16}$$

все результаты, полученные в (4).

2. Доказательство теоремы 1

В силу (3) и (16) в случае действительных случайных величин $x(t)$

$$B_{xx}(-k)=B_{xx}(k). \tag{17}$$

Поэтому из формулы (3. 10) получаем

$$\begin{aligned} W_{xx}(\lambda) &= B_{xx}(0)\,\lambda-\sum_{k\neq 0}\frac{B_{xx}(k)}{ik}\,e^{-ik\lambda}= \\ &= B_{xx}(0)\,\lambda+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{xx}(k)}{k}\sin k\lambda. \end{aligned} \tag{18}$$

Из (18) вытекает, что

$$W_{xx}(-\lambda)=-W_{xx}(\lambda). \tag{19}$$

Наконец, из (3. 1), (3. 9) и (19) получаем

$$\begin{aligned} B(k) &= B_{xx}(k)=\int_{-\pi}^{+\pi}e^{ik\lambda}\,dF_{xx}(\lambda)= \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}e^{ik\lambda}\,dW_{xx}(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos k\lambda\,dW_{xx}(\lambda). \end{aligned} \tag{20}$$

Из формул (18) и (3. 9) и теоремы 2 работы (4) ясно, что $W_{xx}(\lambda)$ есть действительная неубывающая функция. Вместе с равенствами (18) и (20) это показывает, что функция

$$W(\lambda)=W_{xx}(\lambda)$$

удовлетворяет требованиям теоремы 1.

3. $\sigma_E^2(m)$ в общем случае

Обозначим, следуя (4), через $H_x(t-1)$ минимальное линейное замкнутое подпространство пространства H_x, содержащее элементы

$$x(t-1),\ x(t-2),\ \ldots,\ x(t-n),\ \ldots$$

Элемент $x(t+m)$ при любом $m \geqslant 0$ единственным образом представляется в виде

$$x(t+m) = \xi(t-1, m) + \Delta(t-1, m), \tag{21}$$

где $\xi(t-1, m)$ принадлежит $H_x(t-1)$, а $\Delta(t-1, m)$ ортогонально $H_x(t-1)$.

Легко показать, что в случае стационарной последовательности действительных случайных величин *

$$\sigma_E^2(m) = \|\Delta(t-1, m)\|^2. \tag{22}$$

В общем случае стационарных последовательностей в смысле (4) будем считать (22) за определение величины $\sigma_E^2(m)$.

Если последовательность $\{x(t)\}$ сингулярна, то $H_x(t-1) = H_x$, и следовательно

$$\sigma_E^2(m) = 0. \tag{23}$$

Если последовательность $\{x(t)\}$ не сингулярна, то по формуле (7.8)

$$x(t+m) = s_x(t+m) + \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(x)} u_x(t+m-n). \tag{24}$$

Так как $s_x(t+m)$ и $u_x(t+m-n)$ при $n > m$ лежат в $H_x(t-1)$, а $u_x(t+m-n)$ при $n \leqslant m$ ортогональны $H_x(t-1)$, то сопоставление (21) с (24) дает

$$\Delta(t-1, m) = c_0^{(x)} u_x(t+m) + c_1^{(x)} u_x(t+m-1) + \ldots + c_m^{(x)} u_x(t). \tag{25}$$

Так как элементы $u_x(t+i)$ попарно ортогональны и нормированы, то из (25) вытекает

$$\sigma_E^2(m) = \|\Delta(t-1, m)\|^2 = (c_0^{(x)})^2 + (c_1^{(x)})^2 + \ldots + (c_m^{(x)}). \tag{26}$$

---

* Как известно, $\|\Delta(t-1, m)\|$ равняется «расстоянию» точки $x(t+m)$ от пространства $H_x(t-1)$, т. е. нижней грани расстояний $\|x(t+m) - y\|$ для всех y из $H_x(t-1)$. Так как элементы вида

$$L = a_1 x(t-1) + a_2 x(t-2) + \ldots + a_n x(t-n)$$

всюду плотны на $H_x(t-1)$, то $\|\Delta(t-1, m)\|$ равняется также нижней грани расстояний

$$\|x(t+m) - L\| = \sqrt{\mathrm{M}\,|x(t+m) - L|^2}. \tag{$*$}$$

Если все $x(s)$ являются действительными случайными величинами, то нижняя грань выражения ($*$) не изменяется при ограничении одними действительными коэффициентами a_k, в этом же случае она, очевидно, совпадает с $\sigma_E(m)$.

4. $\sigma_E^2(m)$ в действительном случае

Для стационарных последовательностей действительных случайных величин из формулы (26) легко вывести теорему 2. Этому выводу посвящен настоящий параграф.

В силу формулы (3. 9) имеем

$$f_{xx}(\lambda)=\frac{dF_{xx}(\lambda)}{d\lambda}=\frac{1}{2\pi}\frac{dW_{xx}(\lambda)}{d\lambda}=\frac{1}{2\pi}w(\lambda). \tag{27}$$

Из (19) вытекает, что

$$w(-\lambda)=w(\lambda). \tag{28}$$

Пользуясь (27) и (28), получаем

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\log f_{xx}(\lambda)\,d\lambda=2\int_{0}^{\pi}\log w(\lambda)\,d\lambda-2\pi\log 2\pi. \tag{29}$$

Формула (29) вместе с теоремой (23) из ([4]) показывает, что равенство

$$P=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\log w(\lambda)\,d\lambda=-\infty$$

необходимо и достаточно для сингулярности последовательности $\{x(t)\}$. Мы уже видели в § 3, что в этом и только в этом случае

$$\sigma_E^2(m)=0. \tag{30}$$

Если последовательность $\{x(t)\}$ не сингулярна, то из (8. 44) и (29) вытекает

$$(c_0^{(x)})^2=2\pi\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\log f_{xx}(\lambda)\,d\lambda\right)=$$

$$=\exp\left(\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\log w\lambda\,d\lambda\right)=e^{P}. \tag{31}$$

В том же предположении, что последовательность $\{x(t)\}$ не сингулярна *, из (8. 31), (27) и (28) заключаем, что при $k\geqslant 0$

$$\left.\begin{aligned}a_k^{(x)}&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos k\lambda\log f_{xx}(\lambda)\,d\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos k\lambda\log w(\lambda)\,d\lambda,\\ b_k^{(x)}&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\sin k\lambda\log f_{xx}(\lambda)\,d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\sin k\lambda\log w(\lambda)\,d\lambda=0.\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Из (8. 16), (8. 29), (8. 30) и (32) вытекает, что

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n^{(x)}\zeta^n=\Gamma_x(\zeta)=\Gamma_x(0)\frac{\Gamma_x(\zeta)}{\Gamma_x(0)}=\Gamma_x(0)\,e^{Q_x(\zeta)-Q_x(0)}=$$

$$=c_0^{(x)}\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_k^{(x)}\zeta^k\right). \tag{33}$$

* Как указано в теореме 23 из ([4]), формулы (8. 16), (8. 29), (8. 30) и (8. 31) применимы к любой несингулярной последовательности.

Положив

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(x)}\zeta^k\right) = 1 + r_1\zeta + r_2\zeta^2 + \dots, \tag{34}$$

имеем из сравнения (33) с (34)

$$\frac{c_n^{(x)}}{c_0^{(x)}} = r_n. \tag{35}$$

Из (35) и (26) вытекает

$$\sigma_E^2(m) = (c_0^{(x)})^2 (1 + r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_m^2). \tag{36}$$

Формулы (30), (31) и (36) полностью доказывают теорему 2.

5. Определение σ_I^2

Обозначим, следуя ([4]), через $\hat{H}_x(t)$ минимальное линейное замкнутое подпространство пространства H_x, содержащее элементы

$$x(t+1),\ x(t+2),\ \dots,\ x(t+n),\ \dots,$$
$$x(t-1),\ x(t-2),\ \dots,\ x(t-n),\ \dots$$

Элемент $x(t)$ однозначно представляется в виде (10.3):

$$x(t) = \nu(t) + \delta(t),$$

где $\nu(t)$ лежит в $\hat{H}_x(t)$, а $\delta(t)$ ортогонально $\hat{H}_x(t)$. Легко показать, что в случае стационарной последовательности действительных случайных величин

$$\sigma_I^2 = \|\delta(t)\|^2 = d_x^2. \tag{37}$$

По теореме 24 из ([4])

$$d_x^2 = \frac{(2\pi)^2}{\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\lambda}{f_{xx}(\lambda)}}, \tag{38}$$

причем в случае бесконечности интеграла в знаменателе правой части

$$d_x^2 = 0.$$

Из (37), (38), (27) и (28) заключаем, что

$$\sigma_I^2 = d_x^2 = \frac{\pi}{\int\limits_0^{\pi} \frac{d\lambda}{w(\lambda)}} = \frac{1}{R},$$

что и доказывает теорему 3.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР

Получено
26. XI. 1940

ЛИТЕРАТУРА

[1] Kolmogoroff A., Sur l'interpolation et extrapolation des suites stationnaires, Comptes Rundus de l'Acad. Sci., Paris, 208 (1939), 2043—2045.
[2] Khintchine A., Korrelationstheorie der stationären stochastischen Prozesse, Math. Annalen, 109 (1934), 604—615.
[3] Wold H., A study in the analysis of stationary time series, Uppsala, 1938.
[4] Колмогоров А. Н., Стационарные последовательности в гильбертовом пространстве, Бюллетень МГУ (Bulletin de l'Université de Moscou), 2 (1941), n° 6.
[5] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, М. 1936.
[6] Stone M., Linear transformations in Hilbert space, American Mathem. Soc. Colloquium Publications, 15 (1932).

A. KOLMOGOROFF. INTERPOLATION UND EXTRAPOLATION VON STATIONÄREN ZUFÄLLIGEN FOLGEN

ZUSAMMENFASSUNG

Es möge jedem ganzen t $(-\infty < t < \infty)$ eine reelle zufällige Grösse $x(t)$ mit endlicher mathematischen Erwartung des Quadrats entsprechen. Die Folge $\{x(t)\}$ der zufälligen Grössen $x(t)$ werden wir stationär nennen, wenn die mathematischen Erwartungen

$$m = \mathrm{M}\, x(t)$$

und

$$B(k) = \mathrm{M}\,[(x(t+k) - m)(x(t) - m)]$$

von t nicht abhängen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man

$$m = \mathrm{M}\, x(t) = 0 \tag{1}$$

setzen. Dann haben wir

$$B(k) = \mathrm{M}\,[x(t+k)\, x(t)]. \tag{2}$$

Da

$$B(-k) = B(k) \tag{3}$$

ist, so genügt es die zweiten Momente $B(k)$ nur für $k \geqslant 0$ zu betrachten.

Die Aufgabe der linearen Extrapolation der stationären Folge, die der Bedingung (1) genügt, besteht in der Bestimmung bei gegebenen $n > 0$ und $m \geqslant 0$ solcher reeller Koeffizienten a_s, für die die lineare Kombination

$$L = a_1 x(t-1) + a_2 x(t-2) + \ldots + a_n x(t-n)$$

der zufälligen Grössen

$$x(t-1),\ x(t-2),\ \ldots,\ x(t-n)$$

die bestmögliche Approximation der zufälligen Grösse $x(t+m)$ ergibt. Für das Mass der Güte einer solchen Approximation ist es natürlich die mathematische Erwartung

$$\sigma^2 = \mathrm{M}\,(x(t+m) - L)^2 = B(0) - 2\sum_{s=1}^{n} B(m+s)\, a_s + \sum_{p,q=1}^{n} B(p-q)\, a_p a_q$$

zu nehmen.

Falls die zweiten Momente $B(k)$ bekannt sind, so kann die Aufgabe der Auffindung solcher Werte der Koeffizienten a_s, für die σ^2 minimal ist, leicht gelöst werden. Diesen kleinsten Wert von σ^2 werden wir mit $\sigma_E^2(n, m)$ bezeichnen.

Offenbar kann die Grösse $\sigma_E^2(n, m)$ mit wachsendem n nicht zunehmen. Daher existiert der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_E^2(n, m) = \sigma_E^2(m). \tag{4}$$

Die Bestimmung dieses Grenzwertes ist die erste Aufgabe der vorliegenden Arbeit, die in ihr gelöst wird.

Was die Aufgabe der Interpolation anbetrifft, so betrachten wir nur den Fall der Abschätzung von $x(t)$ nach den Grössen

$$\begin{gathered} x(t+1),\ x(t+2),\ldots, x(t+n), \\ x(t-1),\ x(t-2),\ldots, x(t-n). \end{gathered}$$

In diesem Fall bezeichnen wir mit $\sigma_I^2(n)$ den kleinsten Wert der mathematischen Erwartung

$$\sigma^2 = \mathrm{M}(x(t) - Q)^2,$$

wo Q die lineare Form

$$\begin{aligned} Q = a_1 x(t+1) + a_2 x(t+2) + \ldots + a_n x(t+n) + \\ + a_{-1} x(t-1) + a_{-2} x(t-2) + \ldots + a_{-n} x(t-n) \end{aligned}$$

mit konstanten reellen Koeffizienten a_s bedeutet.

Mit wachsendem n nimmt die Grösse $\sigma_I^2(n)$ nicht zu. Daher existiert der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_I^2(n) = \sigma_I^2. \tag{5}$$

Unsere zweite Aufgabe besteht in der Bestimmung von σ_I^2.

Die unten angeführte Lösung der beiden oben formulierten Aufgaben wurde von mir ohne Beweis in meiner Note(1)* mitgeteilt. Sie stützt sich auf Begriffe aus der Spektraltheorie der stationären zufälligen Prozesse.

Die Spektraltheorie der stationären zufälligen Prozesse wurde für den Fall der stetigen Änderung der Zeitveränderlichen t von A. Khintchine [siehe (2)] entwickelt. Für den uns hier interessierenden Fall einer diskreten stationären Folge ist eine ausführliche Darlegung der Theorie in dem Buch von H. Wold (3) enthalten. Von fundamentaler Bedeutung ist hier der folgende

---

* In der Formel (1) dieser Note ist ein Druckfehler unterlaufen. Die Formel (1) muss so aussehen:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^2(I) = \sigma^2(I) = \frac{\pi}{\int_0^\pi \frac{d\lambda}{s(\lambda)}}. \tag{1}$$

SATZ 1. *Für eine beliebige stationäre Folge* $\{x(t)\}$ *können die zweiten Momente* $B(k)$ *in der Form*

$$B(k)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos k\lambda \, dW(\lambda) \tag{6}$$

dargestellt werden, wo $W(\lambda)$ *eine nichtabnehmende reelle Funktion ist, die durch die Formel*

$$W(\lambda)=B(0)\lambda+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B(k)}{k}\sin k\lambda \tag{7}$$

bestimmt wird.

Die Ableitung $w(\lambda)=\frac{dW(\lambda)}{d\lambda}$ der nichtabnehmenden Funktion $W(\lambda)$ existiert fast überall und ist nichtnegativ und summierbar. Da

$$\log w(\lambda)\leqslant w(\lambda)$$

ist, so folgt aus der Summierbarkeit von $w(\lambda)$, dass das Integral

$$P=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \log w(\lambda)\,d\lambda \tag{8}$$

entweder endlich, oder gleich $-\infty$ ist*. Ferner beweisen wir den folgenden

SATZ 2. *Falls* $P=-\infty$ *ist, so ist* $\sigma_E^2(m)=0$ *für alle* $m\geqslant 0$. *Wenn aber das Integral* P *endlich ist, so ist*

$$\sigma_E^2(m)=e^P(1+r_1^2+r_2^2+\dots+r_m^2), \tag{9}$$

wo die r_s *aus den Beziehungen*

$$e^{a_1\zeta+a_2\zeta^2+\dots}=1+r_1\zeta+r_2\zeta^2+\dots, \tag{10}$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos k\lambda \log w(\lambda)\,d\lambda \tag{11}$$

bestimmt werden.

Da $w(\lambda)\geqslant 0$ ist, so ist das Integral

$$R=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\lambda}{w(\lambda)} \tag{12}$$

entweder endlich, oder gleich $+\infty$ *. Wir beweisen nun den folgenden

SATZ 3. *Falls* $R=+\infty$ *ist, so ist* $\sigma_I^2=0$. *Wenn aber das Integral* R *endlich ist, so ist*

$$\sigma_I^2=\frac{1}{R}. \tag{13}$$

---

* Wenn $w(\lambda)=0$ auf einer Menge positiven Masses ist, so setzen wir $P=-\infty$ und $R=+\infty$.

In meiner Arbeit (⁴) ist die Theorie der stationären Folgen von Elementen des komplexen Hilbertschen Raumes entwickelt worden. In §1 der vorliegenden Arbeit zeige ich, dass die stationären zufälligen Folgen in dem oben definierten Sinn als ein Sonderfall der stationären Folgen aufgefasst werden können, die in (⁴) betrachtet sind. Dies gestattet die oben formulierten Sätze 1, 2 und 3 als einfache Folgerungen aus den Resultaten der Arbeit (⁴) zu erhalten.