САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Шелепин Алексей Леонидович

ГРУППОВЫЕ И ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ОСНОВАНИЯ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ

Специальность 01.04.02 – теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург 2003

Работа выполнена в Московском государственном институте радиотехники, электроники и автоматики

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор	Барбашов Борис Михайлович
доктор физико-математических наук, профессор	Скоробогатов Герман Александрович
доктор физико-математических наук, профессор, чл.-корр. РАН	Файнберг Владимир Яковлевич

Ведущая организация:

Томский Государственный университет

Защита состоится " 18 " декабря 2003 года в 14 час. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.232.24 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора физико-математических наук при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская набережная, д.7/9.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке СПбГУ.

Автореферат разослан " 14 " ноября 2003 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
д.ф.-м.н., профессор Щекин А.К.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Диссертация посвящена теоретико-групповым и вероятностным основаниям квантовой теории.

Современную квантовую теорию невозможно представить без теоретико-групповых методов, предоставляющих весьма удобный и эффективный аппарат для решения широкого круга физических задач. Особое место занимают унитарные группы, возникающие в различных задачах как группы внутренней симметрии, и группа Пуанкаре, являющаяся группой пространственно-временной симметрии. Теория представлений группы Пуанкаре лежит в основе релятивистской квантовой физики.

Имея дело с унитарными представлениями групп, мы имеем одновременно дело с амплитудами вероятности, на языке которых формулируется квантовая теория. Теоретико-групповой и вероятностный подходы дополняют друг друга, и исследование причин и следствий их взаимосвязи представляет собой актуальную задачу, важную для приложений.

Цель и задачи работы. Целью работы является изучение групповых и амплитудно-вероятностных конструкций, лежащих в основе квантовой теории, построение соответствующего математического аппарата и анализ приложений к конкретным физическим проблемам.

В число основных задач входит систематическое построение теории амплитуд вероятности как самостоятельной теории со всеми ее атрибутами – аксиоматикой, распределениями, предельными теоремами, уравнениями для марковских процессов. Теория амплитуд вероятности теснейшим образом связана с теорией групп; в частности, все основные распределения для амплитуд можно рассматривать как базисы неприводимых представлений (НП) групп. Эта связь находит свое естественное выражение в рассматриваемой в работе концепции амплитуд вероятности на однородных пространствах, в рамках которой могут быть сформулированы многие задачи квантовой теории. Примерами таких пространств, важными с точки зрения приложений, являются однородные пространства постоянной кривизны, связанные с унитарными и псевдоунитарными группами, и однородные пространства группы Пуанкаре.

Последовательное развитие теории представлений группы Пуанкаре проводится на основе рассмотрения обобщенного регулярного представления (представления в пространстве функций на группе) и метода гармонического анализа. Такое рассмотрение позволяет построить в десятимерном пространстве единое скалярное поле, включающее поля всех спинов. Важной задачей является исследование этого поля и, в частности, его симметрийных свойств и разложение на неприводимые компоненты.

Научная новизна работы состоит в развитии сформулированного научного направления и отражена в защищаемых положениях. Развитые в диссертации теоретико-групповые и амплитудно-вероятностные методы составляют основу для построения новых физических моделей в различных областях квантовой теории.

Положения диссертации, выносимые на защиту. Основные положения, представляемые к защите, можно сформулировать следующим образом:

1. Предложена схема построения теории амплитуд вероятности. Дана теоретико-групповая трактовка основных распределений теории амплитуд вероятности, установлены аналоги закона больших чисел и предельных теорем для амплитуд вероятности, связанные с переходом к классическому пределу в соответствующих квантовомеханических задачах. В контексте связи с квантовой теорией строится теория амплитуд вероятности на однородных пространствах; именно эта конструкция возникает в широком круге физических задач.

2. Построены и изучены псевдодифференциальные уравнения, описывающие скачкообразные марковские процессы для вероятностей и амплитуд вероятности, в ряде случаев получены точные решения. Общим для этих уравнений является существование масштабного параметра λ (например, длины свободного пробега или комптоновской длины волны), который задает характерную величину скачков. В пределе $\lambda \to 0$ псевдодифференциальные уравнения переходят в уравнения второго порядка (Фоккера-Планка и Шредингера соответственно).

3. Построены и подробно изучены когерентные состояния (КС) групп $SU(N)$ и $SU(N,1)$, отвечающее им исчисление символов на комплексных проективных пространствах $CP^N = SU(N+1)/SU(N)$ и $CD^N = SU(N,1)/SU(N)$. Переход к классическому пределу проанализирован в терминах ковариантных символов операторов. Различные типы НП групп $SU(N)$ построены в пространствах полиномов от коммутирующих и антикоммутирующих переменных.

4. Квазиклассические релятивистские уравнения для частицы в неабелевом поле (уравнения Вонга) получены как уравнения для эволюции КС групп $SU(N)$, что позволило указать область их применимости. При этом для эволюции КС, связанных с фундаментальными НП, получены новые уравнения, существенно отличающиеся от квазиклассических. С помощью символов строится интеграл по путям для частицы в неабелевом поле, причем в зависимости от типа представлений используются коммутирующие либо антикоммутирующие переменные.

5. Подробно исследованы коэффициенты Клебша-Гордана (КГ) групп $SU(2)$ и $SU(1,1)$ в базисе КС и впервые введенные коэффициенты КГ в смешанных базисах. Показано, что последние могут быть выражены через полиномы Якоби. Теория коэффициентов КГ, включая формулы ортогональности, производящие функции и интегральные представления, формулируется единым образом для различных типов базисов. Показано, что в отличие от коэффициентов КГ в дискретном базисе, при больших складываемых моментах коэффициенты КГ в базисе КС существенно отличны от нуля лишь в малой окрестности значения результирующего момента, определяемого классической формулой сложения моментов.

6. Построено скалярное поле $f(x,\mathbf{z})$ на группе Пуанкаре, где x – координаты в пространстве Минковского, а $\mathbf{z}$ – координаты на группе Лоренца. Разработанная в работе общая схема анализа использована для случая пространств двух, трех и четырех измерений. Это поле включает поля всех спинов и служит производящей функцией для спин-тензорных полей. По-

казано, что это поле замкнуто также относительно дискретных преобразований, установлены его симметрии.

7. Операторы проекций спина для поля на группе Пуанкаре строятся как операторы дифференцирования по спиновым переменным z и их явный вид не зависит от величины спина. Показано, что переход к обычному описанию посредством многокомпонентных функций $\psi_n(x)$ отвечает разделению пространственно-временных и спиновых переменных, $f(x, \mathbf{z}) = \sum \phi_n(\mathbf{z})\psi_n(x)$, где $\phi_n(\mathbf{z})$ и $\psi_n(x)$ преобразуются по контраградиентным представлениям группы Лоренца.

8. Различные типы релятивистских волновых уравнений (РВУ) получаются в рамках разложения скалярного поля на группе Пуанкаре с помощью различных наборов коммутирующих операторов, включающие функции как левых, так и правых генераторов. Дана интерпретация квантовых чисел, отвечающих правым генераторам группы Пуанкаре. Ранее подход, основанный на использовании максимального набора коммутирующих операторов на группе, включающего правые генераторы, систематически применялся лишь в нерелятивистской теории ротатора. Показано, что в четных размерностях рассмотрение РВУ, инвариантных по отношению к пространственному отражению, требует использование генераторов групп $SO(D, 2)$, являющихся расширением соответствующих групп Лоренца $SO(D, 1)$. В рамках классификации скалярных функций на группе Пуанкаре мы также получаем уравнения для положительных энергий, допускающие амплитудно-вероятностную интерпретацию и связанные с бесконечномерными унитарными представлениями группы Лоренца. Наряду с альтернативным описанием полей целых и полуцелых спинов, эти уравнения описывают поля дробных спинов в пространствах 1+1 и 2+1 измерений.

9. Дискретные преобразования определяются как частный случай симметрий поля на группе Пуанкаре. Им отвечают инволютивные автоморфизмы (внешние и внутренние) группы Пуанкаре, действующие в пространстве функций на группе. На этой основе без каких-либо дополнительных модельных предположений или использования РВУ выводятся законы преобразования полей произвольного спина и строятся представления расширенной группы Пуанкаре. Показано, что теоретико-групповой вывод широкого класса уравнений может быть дан лишь на основе рассмотрения расширенной группы Пуанкаре: именно характеристики представлений расширенной группы в ряде случаев определяют знак массового члена РВУ.

Все исследования, определившие защищаемые положения, выполнены лично автором или при его непосредственном участии.

Апробация результатов работы. Основные результаты докладывались на 3 международном семинаре "Теоретико-групповые методы в физике" (Юрмала, 1985), рабочих совещаниях "Рассеяние, реакции, переходы в квантовых системах " (Обнинск, 1986,1987,1989,1991), VI и VII (Дубна, 1993,1995) международных конференциях "Методы симметрии в физике", XVIII (Москва, 1991) и XXIII (Дубна, 2000) международных коллоквиумах

"Теорстико-групповые методы в физике", XX национальной конференции по физике полей и частиц (Сан-Лоренсо, Бразилия, 1999). Материалы диссертации также докладывались на научных семинарах ИОФАН, ОИЯИ, института механики МГУ, кафедры теоретической физики физического факультета МГУ, кафедры квантовой механики физического факультета СПбУ, института физики университета Сан-Паулу.

Публикации. Основные результаты диссертации изложены в 33 опубликованных работах, список которых приведен в конце автореферата.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, 3 частей, включающих в себя 11 глав, заключения, двух приложений и списка литературы. Полный объем составляет 293 страницы, включая 6 рисунков, 5 таблиц и список цитируемой литературы, насчитывающий 293 наименования.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснованы актуальность, научная и практическая ценность работы, сформулированы цели исследований и основные положения, выносимые на защиту диссертации. Во введении дана также краткая информация о структуре и содержании диссертации.

Работа делится на три части содержащие в общей сложности 11 глав и имеющие следующие названия: Часть I – Теория амплитуд вероятности и ее групповые аспекты; Часть II – Когерентные состояния групп $SU(N)$ и $SU(N,1)$ и их приложения; Часть III – Поля на группе Пуанкаре. Перейдем к развернутой характеристике задач исследования и полученных результатов.

В первой части рассматривается теория амплитуд вероятности, ее приложения в квантовой теории и связь с теорией групп.

В первой главе амплитуда вероятности определяется аксиоматически на основе теории гильбертова пространства, рассматриваются непосредственные следствия такого определения и связь с квантовой теорией.

В основе развиваемого подхода лежит своего рода синтез трех направлений: теории гильбертовых пространств, теории вероятностей и теории групп. Событиям ставятся в соответствие нормированные вектора гильбертова пространства, а амплитудой события ψ_1 относительно ψ_2 называется скалярное произведение векторов гильбертова пространства. Отметим, что амплитуда вероятности (представляющая собой в зависимости от типа гильбертова пространства действительное или комплексное число, кватернион) согласно данному определению является условной.

Случайная величина A определяется как линейный самосопряженный оператор $\hat{A}{:}H \to H$. Каждой паре элементарных событий сопоставляется число (действительное, комплексное, кватернион) $\alpha^m_n = \langle m \mid \hat{A} \mid n\rangle = \overline{\alpha}^n_m$ (или $\alpha(x,x') = \langle x \mid \hat{A} \mid x'\rangle$), подобно тому как в обычной теории вероятности каждому элементарному событию B_i сопоставляется действительное число $f(B_i)$. Линейность оператора $\hat{A}$ требуется для того, чтобы по набору $\{\alpha_n^m\}$ можно было определить значение случайной величины для любой пары событий, подобно тому, как требуется измеримость функции $f(B_i)$ относительно введенной на множестве элементарных событий вероятности.

Связь с теорией вероятностей проявляется, с одной стороны, в возможности построения обычной вероятностной "надстройки" над объектами теории амплитуд и, с другой стороны, в параллелизме их основных понятий, конструкций и теорем.

Рассмотрим сначала вероятностную "надстройку" над понятиями теории амплитуд. Случайная величина A в собственном базисе $\mid n\rangle$ характеризуется диагональными элементами α_n^n. При построении σ-алгебры в качестве множества элементарных событий возьмем несовместные события $\mid n\rangle$; в этом случае элементами σ-алгебры будут являться события вида

$$\emptyset, \quad \mid n\rangle, \quad \{\mid n_1\rangle, \mid n_2\rangle\}, \quad \{\mid n_1\rangle, \mid n_2\rangle, \mid n_3\rangle\}, \ldots \tag{1}$$

Каждому элементу σ-алгебры сопоставим вероятность $p = \sum_i |\langle\psi \mid n_i\rangle|^2$. Заметим, что с точки зрения теории амплитуд событиями являются лишь элементы $\{|n\rangle\}$; они могут быть охарактеризованы как амплитудой $\psi_n = \langle\psi \mid n\rangle$, так и вероятностью $p_n = |\psi_n|^2$, прочие элементы σ-алгебры (1) – только вероятностью. Если определить вероятность $P(A < t) = \sum p_n$, где суммирование производится по всем n, для которых $\alpha_n^n < t$, то A будет являться случайной величиной и с точки зрения обычной теории вероятности. будут выполняться все теоремы обычной теории.

Существенные отличия теории амплитуд проявляются при рассмотрении совокупностей случайных величин. Действительно, в обычной теории вероятности достаточно взять вероятность какого-либо элементарного события $p_1 = 1$ и тогда для любой случайной величины дисперсия $D[A] = 0$. В теории амплитуд так подобрать ψ_n, вообще говоря, невозможно (иными словами, не существует события, при наступлении которого все случайные величины были бы точно определены) и имеют место соотношения неопределенностей. Среднеквадратичные отклонения и дисперсии случайных величин A_i удовлетворяют соотношению

$$\sum_{i=1}^{n} D[A_i] \geq \frac{1}{n-1} \sum_{j,k=1}^{n} |\langle\psi \mid \hat{A}_j\hat{A}_k - \hat{A}_k\hat{A}_j \mid \psi\rangle| \tag{2}$$

Рассмотрим теперь подробнее теоретико-групповой аспект теории. Унитарное представление группы - это представление унитарными операторами в гильбертовом пространстве, и следовательно рассмотрение унитарных представлений может быть проведено на языке амплитуд вероятности. Эта связь является взаимной, так как с другой стороны условие нормированности для амплитуд фактически представляет собой инвариант унитарной группы.

Мы естественным образом приходим к рассмотрению амплитуд вероятности (а значит и гильбертовых пространств функций) на однородных пространствах G/H. Напомним, что однородное пространство – это множество вместе с заданным на нем транзитивным действием некоторой группы G, называемой группой движений однородного пространства. Построение амплитуд, отвечающих полным группам событий, соответствует построению базисов унитарных НП группы движений, содержащихся в разложении квазирегулярного представления $T_q(g)$, $T_q(g)f(h) = f(g^{-1}h)$, $h \in G/H$.

Однако в разложении квазирегулярного представления $T_q(g)$, действующего в пространстве функций на G/H, содержатся не все НП группы G. Все (с точностью до эквивалентности) НП группы G содержатся в разложении левого или правого обобщенного регулярного представления – представления в пространстве функций на этой группе,

$$T_L(g)f(g_0) = f(g^{-1}g_0), \quad T_R(g)f(g_0) = f(g_0 g), \quad g_0, g \in G. \tag{3}$$

Действие левого обобщенного регулярного представления в различных физических задачах интерпретируется как преобразование лабораторной системы координат.

Пространство функций на группе допускает естественную геометрическую интерпретацию. А именно, функции на группе – это функции, зависящие не только от координат точки исходного однородного пространства, а от системы отсчета в каждой точке. Так, для (псевдо)евклидова пространства координаты x задают начало системы отсчета, а остальные переменные – ее ориентацию в пространстве.

Квантовая механика на однородном пространстве G/H может строиться как теория марковских процессов для амплитуд вероятности $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$, $x \in G/H$. В терминах амплитуд вероятности может быть записана аксиоматика фон Неймана, а конкретизация гильбертова пространства состояний как пространства функций на G/H позволяет эффективно использовать теоретико-групповые методы.

Отметим, что если одной из координат на однородном пространстве является время t, то теория свободных полей строится как теория НП группы. Появляющееся при рассмотрении марковских процессов на однородном пространстве G/H или G параметр τ в этом случае может быть интерпретирован как собственное время.

Наличие внутренних степеней свободы (и в частности спина) приводит к более общей конструкции. Для того, чтобы включить в рассмотрение все НП группы G, используя однокомпонентные функции, необходимо от функций на однородном пространстве G/H перейти к функциям на группе G. Такой подход положен нами в части III в основу рассмотрения свободных полей и релятивистских уравнений на базе классификации унитарных НП группы Пуанкаре $M(3,1)$ – группы движений пространства Минковского. Таким образом, рассматривая амплитуды вероятности на однородных пространствах, мы можем использовать как вероятностный (случайные процессы), так и теоретико-групповой подходы к теории РВУ.

Во второй главе изучаются функции распределения и предельные теоремы теории амплитуд вероятности.

При последовательном построении теории амплитуд вероятности целесообразно исходить, насколько это возможно, из параллелизма с мощным аппаратом обычной теории вероятности, выделив при этом определенные ключевые моменты и конструкции. К ним прежде всего относятся конкретные функции распределения вероятностей, нашедшие широчайшее поле приложений (биномиальное, гипергеометрическое, отрицательное гипергеометрическое, пуассоновское, нормальное), а также предельные теоремы. Но при этом возникает и качественно новый аспект – наряду с вероятностными полученные распределения, рассмотренные в разделах 2.1-2.3, обладают и групповыми характеристиками.

Если комплексные амплитуды $|z_i|$, удовлетворяющие условию нормировки $\sum |z_i|^2 = 1$, образуют базис фундаментального НП $T_{[10\ldots0]}(g)$ группы $U(N)$, то комплексные полиномиальные распределения

$$e_R^{n_i} = \left(\frac{R!}{n_1!\ldots n_N!}\right)^{1/2} z_1^{n_1}\ldots z_N^{n_N}, \quad R = \sum_{i=1}^{N} n_i, \tag{4}$$

при фиксированном R образуют базис НП $T_{[R0\ldots0]}(g)$. Умножая $e_R^{n_i}$ на комплексно-сопряженное $\bar{e}_R^{n_i}$, преобразующееся по сопряженному НП $T_{[0\ldots0R]}(g)$, получаем полиномиальное распределение для обычных вероятностей $p_i = |z_i|^2$, $\sum_i p_i = 1$. Эта вероятности преобразуются по НП $T_{[R0\ldots R]}(g)$, однако не образуют его базиса.

Отрицательное биномиальное распределение для комплексных амплитуд z_1, z_2 имеет вид

$$e_n^{n_1n_2} = \left(\frac{(-1)^{n_1}\Gamma(-n_2)}{n_1!\Gamma(-n)}\right)^{1/2} z_2^{-n} z_1^{n_1} = \left(\frac{(-1)^{n_1}\Gamma(-n_2)}{n_1!\Gamma(-n)}\right)^{1/2} u_1^{n_1}u_2^{n_2}, \tag{5}$$

где $u_1 = z_1/z_2$, $u_2 = 1/z_2$, $\quad p = |z_2|^2 = |u_2|^{-2}$, $q = |z_1|^2 = |u_1/u_2|^2$,

и соотношение $p+q = |z_1|^2+|z_2|^2 = 1$ записывается в виде $|u_2|^2-|u_1|^2 = 1$. Последнее выражение представляет собой инвариант группы $SU(1,1)$, u_1 и u_2 образуют базис фундаментального неунитарного НП $T_{1/2}(g)$, При преобразованиях группы переменные u_i преобразуются линейно с помощью 2×2 матрицы $U \in SU(1,1)$, а амплитуды z_i – нелинейно. При фиксированном n $e_n^{n_1n_2}$ и $\bar{e}_n^{n_1n_2}$ образуют базис унитарных НП дискретной положительной $T_j^+(g)$ и отрицательной $T_j^-(g)$ серий соответственно. Здесь $j = n/2$, $m = (n_1-n_2)/2$, $m = -j, -j+1, -j+2, \ldots$ для $T_j^+(g)$ и $m = j, j-1, j-2, \ldots$ для $T_j^-(g)$.

Аналог пуассоновского распределения в теории амплитуд можно рассматривать базис унитарного бесконечномерного представления группы Гейзенберга.

Коэффициенты КГ $\langle j_1m_1|j_2m_2||jm\rangle$ групп $SU(2)$ ($SU(1,1)$) задают переразложение биномиальных (отрицательных биномиальных) распределений для комплексных амплитуд и, таким образом, являются аналогом гипергеометрического (отрицательного гипергеометрического) распределения в теории амплитуд.

Имеется глубокая аналогия между симметриями коэффициентов КГ и гипергеометрического распределения. Перестановка перемножаемых представлений $T_{j^1}(g)$ и О $T_{j^2}(g)$ соответствует перестановке двух частей разбиения исходной совокупности объектов. Изменение знака проекций моментов соответствует перестановке нумерации внутренних свойств совокупности. В обоих случаях имеется симметрия (для коэффициентов КГ это симметрия Редже), связанная с тем, что разбиение совокупности объектов по их внутренним свойствам с вероятностной точки зрения не отличается от разбиения, производимого с помощью выборки. Симметрия коэффициентов КГ, соответствующая перестановке результирующего представления с одним из перемножаемых (т. е. симметрия, связанная с эквивалентностью задач о выборке и о разбиении на подсистемы), аналога в обычной теории вероятностей не имеет. В этом состоит одно из существенных отличий теории амплитуд вероятности от теории вероятностей. С неоднозначностью решения задачи о сложении подсистем в теории амплитуд связано появление таких характеристик системы в целом, как кооперативные числа.

Как уже отмечалось, существенное отличие теории амплитуд вероятности от теории вероятностей проявляется также при рассмотрении совокупностей случайных величин. А именно, если в обычной теории вероятностей существуют состояния, при которых любая случайная величина точно определена, то в теории амплитуд имеются соотношения неопределенностей (2). В силу этих соотношений минимизация дисперсии одной случайной величины с необходимостью приводит к возрастанию дисперсий других. Имея в виду переход к классическому пределу, мы приходим к задаче построения состояний с минимальной неопределенностью, или, точнее, наименьшей возможной минимальной суммой дисперсий (2).

Когерентные состояния унитарного НП группы Ли могут быть определены как состояния (элементы пространства НП), характеризующиеся минимальной инвариантной относительно конечных преобразований группы дисперсией:

$$(\Delta \mathbf{T})^2 = \sum_{k=1}^{s} (\Delta T_k)^2 = \min, \tag{6}$$

где $\hat{T}_k$ - определенным образом выбранные генераторы группы, s – размерность алгебры Ли. Так, для НП групп Гейзенберга $W(1)$ и $SU(2)$ КС определяются как состояния, для которых

$$(\Delta p/p_0)^2 + (\Delta x/x_0)^2 = 1, \quad x_0 = (\hbar/m\omega)^{1/2} = \hbar/p_0,$$
$$(\Delta J)^2 = (\Delta J_x)^2 + (\Delta J_y)^2 + (\Delta J_z)^2 = j\hbar^2,$$

где $m\omega$ и j маркируют НП группы. В частности, для полупростых групп (как компактных, так и некомпактных) инвариантная дисперсия (6) строится с помощью метрического тензора Картана-Киллинга. С помощью инвариантной дисперсии мы можем определить классический предел как случай, когда

$$(\Delta \mathbf{T})^2/\mathbf{T}^2 \to 0. \tag{7}$$

Из инвариантности дисперсии следует, что если $|u_0\rangle$ – КС, то в результате действия оператора конечных преобразований $T(g)$ группы G мы также получаем КС $|u\rangle = T(g)|u_0\rangle$. КС образуют переполненный неортогональный базис НП и параметризуются точками однородного пространства G/H, где H – стационарная подгруппа.

В разделе 2.6 рассмотрена связь закона больших чисел и предельных теорем теории амплитуд вероятности с условиями перехода к классическому пределу и принципом соответствия в квантовой механике. Для этого мы воспользуемся понятием ковариантного символа оператора

$$Q_A(u,\overline{v}) = \frac{\langle u \mid \hat{A} \mid v\rangle}{\langle u \mid v\rangle}$$

где $|u\rangle$ и $|v\rangle$ - элементы некоторого переполненного базиса с разложением единицы $\hat{1} = \int |u\rangle\langle u|d\mu(u)$. Для Q-символа произведения $\hat{A}\hat{B}$ имеем

$$Q_{AB}(u,\bar{v}) = \int \langle u|\hat{A}|v\rangle\langle v|\hat{B}|u\rangle d\mu(v) = \int Q_A(u,\bar{v})Q_B(v,\bar{u})|\langle u|v\rangle|^2 d\mu(v) \tag{8}$$

В классическом пределе среднее от произведения должно равняться произведению средних, т.е. символ произведения должен быть равен произведению символов. При малых du с точностью до членов более высокого порядка по du $\rho^2(u, u+du) \simeq d\rho^2$, где $d\rho^2$ – положительно определенная квадратичная часть разложения $\rho^2(u, u+du)$ по степеням du, $\rho^2(u,v) = -\ln(|\langle u \mid v\rangle|^2)$. Для комплексных многообразий $d\rho^2 = g^{ik}du_i d\bar{u}_k$, $g^{ik} = \partial^2(\rho^2)/\partial u_i \partial \bar{u}_k$. Входящий в (8) квадрат модуля перекрытия $|\langle u \mid v\rangle|^2 = \exp(-\rho^2(u,v))$ в малой окрестности точки $v = u, v = u + du$ имеет вид

$$|\langle u \mid v\rangle|^2 \simeq \exp(-g^{ik}du_i d\bar{u}_k) \tag{9}$$

Правая часть формулы (9) представляет собой многомерное нормальное распределение. Предельные теоремы должны говорить об условиях, при которых (9) имеет место *при любых*, а не только малых du. Последнее выполняется, в частности, если $|\langle u \mid v\rangle|^2$ существенно отличается от нуля лишь при малых du.

Если условие (9) выполнено при произвольных $u' = v - u$, символы Q_A и Q_B являются несингулярными (дифференцируемыми), то разлагая в ряд по степеням u' произведение $Q_A(u, \bar{u}+\bar{u}')Q_B(u+u', \bar{u})$ (аналогично тому, как это делается при нахождении асимптотических разложений с помощью метода перевала), получим для первых двух ненулевых членов

$$\begin{aligned} Q_{AB}(u,\bar{u}) &\simeq Q_A(u,\bar{u})Q_B(u,\bar{u}) + \int \frac{\partial Q_A(u,\bar{u})}{\partial \bar{u}_k}\frac{\partial Q_B(u,\bar{u})}{\partial u_i}\bar{u}'_k u'_i \exp(-g^{ik}u_i\bar{u}_k)d\mu(u+u') \\ &\simeq Q_A(u,\bar{u})Q_B(u,\bar{u}) + g^{ik}\frac{\partial Q_A(u,\bar{u})}{\partial \bar{u}_k}\frac{\partial Q_B(u,\bar{u})}{\partial u_i}. \end{aligned}$$

Т.о., требования выполнения условия (9) для перекрытия КС при произвольных u, а не только в малой окрестности точки $u = v$, и условие несингулярности символов приводят к выполнению первого и второго требований принципа соответствия

$$Q_{AB}(u,\bar{u}) \simeq Q_A(u,\bar{u})Q_B(u,\bar{u}), \tag{10}$$
$$Q_{AB}(u,\bar{u}) - Q_{BA}(u,\bar{u}) \simeq \{Q_A(u,\bar{u}), Q_B(u,\bar{u})\}, \tag{11}$$

то есть символ произведения можно заменить на произведение символов, а коммутатор – на скобку Пуассона.

Заметим, что для выполнения (10), как это следует непосредственно из (8), достаточно, чтобы распределение $|\langle u \mid v\rangle|^2$ при некоторых значениях параметров состояний приближалось к δ-функции (т.е. достаточно использовать аналог закона больших чисел), а символы Q_A и Q_B были при этом несингулярными. При установлении же соотношения (11) существенно используются *предельные теоремы* теории амплитуд, определяющие *условия, при которых перекрытие КС переходит в многомерное нормальное распределение.* Для КС полупростых групп это достигается при больших значениях индексов сигнатуры НП. Конкретные построения для случая симметричных НП групп $SU(N)$ и $SU(N,1)$ проведены в части 2.

В третьей главе рассматриваются марковские процессы для амплитуд вероятности. Особое внимание уделено процессам со скачками, описываемыми псевдодифференциальными уравнениями.

Теория марковских процессов составляет основу для описания как стохастических, так и квантовомеханических процессов. Марковский процесс для амплитуд вероятности, аналогично случаю обычных вероятностей, определяется как процесс без последействия: состояние системы в некоторый момент времени зависит лишь от того, в каком состоянии она находилась в непосредственно предшествующий момент времени t, и не зависит от того, в каком состоянии она находилась в более ранние моменты времени $t_0 < t$. В общем случае марковские процессы для вероятности и амплитуд вероятности задаются интегральными уравнениями

$$p(x,t) = \int p(x,t|x',t')p(x',t')dx', \quad p(x,t|x_0,t_0) = \int p(x,t|x',t')p(x',t'|x_0,t_0)dx', \tag{12}$$
$$\psi(x,t) = \int u(x,t|x',t')\psi(x',t')dx', \quad u(x,t|x_0,t_0) = \int u(x,t|x',t')u(x',t'|x_0,t_0)dx', \tag{13}$$

где $p(x,t|x',t')$ – плотность вероятности перехода, а $u(x,t|x',t')$ – плотность амплитуды перехода, $t > t' > t_0$.

Процессы без скачков определяются как процессы, для которых вероятность (амплитуда) перехода из точки x в x' при конечной разности $|x-x'| \geq \delta > 0$ при $\Delta t \to 0$ стремится к нулю быстрее, чем Δt, т.е.

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{\Delta t} \int\limits_{|x-x'|\geq\delta} p(x,t+\Delta t|x',t)dx = 0, \tag{14}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{\Delta t} \int\limits_{|x-x'|\geq\delta} u(x,t+\Delta t|x',t)dx = 0. \tag{15}$$

Можно показать, что при отсутствии скачков уравнения (12) и (13) сводятся к дифференциальным уравнениям второго порядка – уравнениям

Фоккера-Планка-Колмогорова и Шредингера соответственно. Иными словами, отсутствие скачков приводит к диффузионным процессам для случая обычных вероятностей и нерелятивистской квантовой теории для случая амплитуд вероятности.

Отметим, что условие отсутствия скачков (14) в литературе имеет различные названия (условие усиленной непрерывности, условие малости приращений, условие Линдеберга; последнее по причине сходства с условием применимости предельных теорем).

Сделаем еще одно замечание о терминологии. Здесь мы используем термины "процессы со скачками" и "процессы без скачков", а не "непрерывные процессы" или "разрывные процессы". Дело в том, что термин "непрерывные процессы" часто используется в двух совершенно различных значениях: во-первых, говоря о дискретных и непрерывных процессах, имеют в виду дискретность или непрерывность множества возможных состояний, во-вторых, могут иметься в виду процессы с непрерывными или разрывными траекториями. (Этим объясняется упомянутый выше устаревший термин "усиленная непрерывность": он означает, что процесс непрерывен в обоих смыслах.)

Для процессов со скачками, т.е. когда условия (14) и (15) не выполняются, получаются дифференциальные уравнения бесконечного порядка соответственно для вероятностей и амплитуд

$$\partial p(x,t)/\partial t = \hat{\Lambda} p(x,t), \quad \hat{\Lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} K_n(x,t), \tag{16}$$

$$K_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int (x-x')^n p(x,t+\Delta t \mid x',t) dx, \tag{17}$$

$$i\partial\psi(x,t)/\partial t = \hat{H}\psi(x,t), \quad \hat{H} = i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} A_n(x,t), \quad \hat{H}^+ = \hat{H}, \tag{18}$$

$$A_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int (x-x')^n u(x,t+\Delta t \mid x',t) dx, \quad n \geq 1, \tag{19}$$

$$A_0 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{+\infty} [u(x,t+\Delta t \mid x',t) - u(x,t \mid x',t)] dx.$$

Мы будем называть эти уравнения псевдодифференциальными, т.к. их математически корректное рассмотрение возможно на основе теории псевдодифференциальных операторов. В отличие от детально изученных уравнений для процессов диффузионного типа псевдодифференциальные уравнения для процессов со скачками представляют собой малоисследованную область.

Как следует из изложенного, для марковских процессов существует альтернатива: либо (в случае отсутствия скачков) они описываются дифференциальными уравнениями не выше второго порядка, либо (в случае наличия скачков) – бесконечного порядка. Любые уравнения конечного порядка выше второго с необходимостью дают лишь приближенное описание марковских процессов (например, возникают отрицательные квазивероятности). Это еще раз подчеркивает важность исследования соответствующих псевдодифференциальных уравнений.

Для выяснения физического смысла уравнений и их решений анализ скачкообразных процессов в главе 3 проводится параллельно для случаев обычных вероятностей и амплитуд вероятности. Такая параллельность обусловлена еще и тем, что для обычных вероятностей ранее в литературе исследовались общие условия перехода к диффузионному пределу и связь коэффициентов K_n (17) при степенях $\partial/\partial x$, но не какие-либо конкретные уравнения. Наоборот, для амплитуд вероятности не была построена общая теория, и в частности, разложение (18), аналогичное разложению Крамерса-Мойала (16), но при этом в ряде работ рассматривалось псевдодифференциальное уравнение Шредингера.

Рассмотрение уравнения (16) имеет длительную историю, однако проводилось оно практически лишь в связи с аппроксимацией скачкообразных процессов диффузионными. Изучались условия, при выполнении которых уравнение бесконечного порядка переходит в уравнение Фоккера-Планка, т.е. могут быть отброшены старшие производные. Это привело к понятию разложения по обратному размеру системы. Иными словами, должны рассматриваться такие пространственно-временные масштабы, на которых скачки можно считать частыми и малыми. В пределе бесконечно частых бесконечно малых скачков уравнение (16) переходит в уравнение Фоккера-Планка.

Непосредственное использование уравнений (16) и (18) затруднено – они содержат бесконечное число различных коэффициентов (иногда называемых моментами перехода) при степенях $\partial/\partial x$, хотя из (17) и (20) следует, что эти коэффициенты тесно связаны между собой. Вид коэффициентов K_n и A_n определяется, согласно (17) и (20), поведением вероятности (амплитуды) перехода при $\Delta t \to 0$.

Тем не менее, как показано в главе 3, для ряда случаев, связанных с конкретными физическими задачами, могут быть получены точные решения псевдодифференциальных уравнений для вероятностей и амплитуд.

Обратимся сначала к простейшим и вместе с тем важным частным случаям (16) и (18) – уравнениям с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \frac{c}{\lambda}\left(1 - \sqrt{1-(\lambda\partial/\partial x)^2}\right) f(x,t), \tag{20}$$

$$i\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = \frac{c}{\lambda}\sqrt{1-(\lambda\partial/\partial x)^2}\psi(x,t). \tag{21}$$

Уравнение (21) представляет собой хорошо известное релятивистское уравнение, а уравнение (20) на плотности вероятности $f(x,t)$ было предложено нами для описания процессов, обусловленных скачкообразными изменениями физических величин и связанных с соударениями (уширение спектральных линий, броуновское движение). Как будет показано ниже, λ имеет смысл характерной величины скачков, а c/λ – частоты скачков. Эти уравнения в пределе бесконечно частых бесконечно малых скачков ($\lambda \to 0$) переходят в уравнения второго порядка – уравнение диффузии и уравнение Шредингера для свободной частицы соответственно.

Решение псевдодифференциального уравнения Фоккера-Планка (20) имеет вид

$$f(x,t) = K_\lambda(x,ct) \equiv \frac{ct}{\pi\lambda} \exp\frac{ct}{\lambda}\,\left((ct)^2 + x^2\right)^{-1/2} K_1[((ct)^2 + x^2)^{1/2}/\lambda], \quad (22)$$

где K_1 – функция Макдональда. Предельным случаям отвечают хорошо известные процессы. При $\lambda \to \infty$ получим процесс Коши; амплитуда скачков в этом случае не ограничена. Распределение Коши выделено с математической точки зрения – как и нормальное распределение, оно является устойчивым и существуют предельные теоремы о сходимости к этому распределению. Соответствующая ему кривая (лоренциан) появляется во многих физических задачах, связанных со скачкообразными процессами (рассеянием, распадами и т.д.). При $\lambda \to 0$, $c \to \infty$ (предел бесконечно частых бесконечно малых скачков) имеем гауссов процесс с коэффициентом диффузии $D = \lambda c$.

Решение псевдодифференциального уравнения Шредингера (21) имеет вид

$$\psi(x,t) = \frac{-t}{2\lambda\sqrt{(ct)^2 - x^2}} H_1^{(2)}\left(\frac{\sqrt{(ct)^2 - x^2}}{\lambda}\right) + \frac{1}{2}(\delta(x+ct) + \delta(x-ct)), \quad (23)$$

где $H_1^{(2)}(z) = J_1(z) + iN_1(z)$ - функция Ганкеля первого порядка, $J_1(z)$ и $N_1(z)$ - функции Бесселя и Неймана. Вид решения зависит от соотношения между λ, координатой x и расстоянием до светового конуса ct. При δ-образном начальном условии $\psi(x,0) = \delta(x)$ и малых временах $ct \ll \lambda$ частица ведет себя подобно частице с нулевой массой, а при $ct \gg \lambda$ и $x \ll ct$ справедлива нерелятивистская формула для амплитуды перехода. Теория, основанная на уравнении (21), очевидно, является нелокальной. Естественным масштабом нелокальности служит комптоновская длина волны λ, определяющая границу области скачков. Если действительная часть амплитуды перехода отлична от нуля лишь на отрезке $[-ct, ct]$, то мнимая часть может быть существенно отлична от нуля и вне светового конуса в области размерами λ.

Рассмотренные выше псевдодифференциальные уравнения, описывающие скачкообразные процессы в одномерном случае, несмотря на бесконечное число коэффициентов перед производными характеризуются лишь двумя функциями (величиной и частотой скачков, зависящими, вообще говоря, от x), также как и диффузионные процессы (коэффициентами диффузии и сноса). При масштабном параметре $\lambda \to 0$ мы переходим к диффузионному пределу для вероятностей или нерелятивистскому пределу для амплитуд. По коэффициентам уравнения, получаемого в диффузионном пределе, можно определить лишь произведение λc (пропорциональное коэффициенту диффузии или обратно пропорциональное массе частицы), но не λ и c по отдельности. Иными словами, уравнение для скачкообразных процессов восстанавливается по диффузионному пределу с точностью до масштабного параметра. Отметим, что стационарные решения псевдодифференциальных уравнений для довольно широкого класса процессов совпадают со стационарными решениями в диффузионном (нерелятивистском) пределе.

Распределения, являющиеся решением свободных псевдодифференциальных уравнений Шредингера и Фоккера-Планка, как и нормальное распределение, являются безгранично делимыми. Это позволяет обобщить многомерный гауссов интеграл (и соответствующий континуальный интеграл) на скачкообразные процессы.

Если в диффузионном пределе (уравнение Фоккера-Планка) снос задается коэффициентом при первой степени дифференциального оператора $\partial/\partial x$, то *в псевдодифференциальном уравнении Фоккера-Планка снос может быть введен двумя путями*: либо по-прежнему, как в диффузионном пределе, что отвечает действию неслучайной силы, либо ненулевыми коэффициентами при бесконечном числе нечетных степеней $\partial/\partial x$, что отвечает скачкообразным изменениям скорости при соударениях частиц. Иными словами, в диффузионном пределе вид уравнения Фоккера-Планка не зависит от того, обусловлен снос действием некоторой внешней неслучайной силы или теми же соударениями, что и диффузия. Если же соударения не являются частыми и малыми, а приводят к конечным скачкообразным изменениям физических величин, то мы получим различные уравнения в зависимости от того, чем обусловлен снос. Получены точные решения свободных многомерных псевдодифференциальных уравнений Фоккера-Планка и Шредингера, псевдодифференциального уравнения Фоккера-Планка для аналога процесса Орнштейна-Уленбека, псевдодифференциального уравнения Шредингера для частицы в магнитном поле.

Напомним, что формулировке теории диффузионных процессов на основе уравнения Фоккера-Планка отвечает эквивалентная формулировка на основе стохастического дифференциального уравнения (СДУ) Ланжевена

$$\frac{dx}{dt} = A(x,t) + B(x,t)L(t), \tag{24}$$

где $A(x,t)$ - коэффициент сноса, связанный с действием неслучайной силы, $B(x,t)$ - интенсивность случайной силы $L(t) = W'(t)$ - производной Винеровского процесса. Т.е. (24) позволяет дать описание произвольного диффузионного процесса с помощью простейшего непрерывного процесса $W(t)$. Целесообразность рассмотрения как дифференциальных уравнений для вероятностей, так и отвечающих им стохастических дифференциальных уравнений, как известно, обусловлена в частности тем, что теории возмущений, построенные на их основе, отличаются друг от друга и имеют свою сферу применения.

Для описания скачкообразных процессов при фиксированной амплитуде скачков можно применять СДУ, основанные, однако, на использовании в качестве "базисного" уже не Винеровского процесса, а простейшего скачкообразного процесса – процесса Пуассона. Так, при рассмотрении дробового шума в литературе используется аналогичное (24) СДУ, где флуктационная сила выражается через производную процесса Пуассона, $L(t) = N'(t)$. Для описания процессов с различной амплитудой скачков нами предлагается замена Винеровского процесса $W(t)$ на более общий $W_\lambda(t)$ с характерной (максимальной) амплитудой скачков λ, в пределе частых малых скачков переходящий в Винеровский $W_0(t)$, а при $\lambda \to \infty$ - в процесс Коши $W_\infty(t)$, характеризующийся бесконечной дисперсией (амплитуда скачков не ограничена). Указанным требованиям удовлетворяет рассмотренный выше процесс, представляющий собой решение псевдодифференциального уравнения Фоккера-Планка (20). В последних двух параграфах главы проводится обобщение меры Винера на скачкообразные процессы и рассматриваются соответствующие континуальные интегралы.

Вторая часть посвящена развитию теории когерентных состояний групп $SU(N)$ и $SU(N,1)$ и их приложениям к построению РВУ и континуального интеграла для частицы в неабелевом поле. Здесь же строятся коэффициенты КГ в базисе КС.

В четвертой главе строятся КС $SU(N)$ и $SU(N,1)$ и рассматриваются их свойства. Симметричные НП $T_{[P0...0]}(g)$ групп $SU(N)$ строятся в пространствах полиномов фиксированной степени P от переменных z_k, $\sum_{i=1}^{N}|z_k|^2 = 1$, а НП $T^+_{[P0...0]}(g)$ дискретной серии групп $SU(N-1,1)$ - в пространстве квазиполиномов фиксированной отрицательной степени P от переменных z_k, $|z_N| - \sum_{k=1}^{N-1}|z_k|^2 = 1$, где степень z_N отрицательна, а степени остальных z_k – целые положительные. Дискретные базисы этих представлений образуют комплексные полиномиальное (4) и отрицательное полиномиальное (5) распределения для амплитуд. Далее как орбита старшего веса $\Psi_P(z) = z_1^P$ строится система КС:

$$T(g)\Psi_P(z) = (z_k g_1^k)^P = (z_k u^k)^P, \tag{25}$$

где $u^k = g_1^k$ – элементы 1-й строки матрицы g, удовлетворяют тем же условиям, что и z^k, и задают точку однородного пространства $CP^{N-1} = SU(N)/U(N-1)$ или $CD^{N-1} = SU(N-1,1)/U(N-1)$. Перекрытие КС

$$\langle P\, z|P\, u\rangle = \left(z^k u_k\right)^P, \tag{26}$$

где $z^k = \bar{z}_k$ для $SU(N)$ и $z^k = -(-1)^{\delta_{kN}}\bar{z}_k$ для $SU(N-1,1)$, являющееся функцией двух точек однородного пространства, играет важную роль при рассмотрении символов операторов и анализе перехода к классическому пределу, т.к. минимизируют инвариантную дисперсию (6). Кроме того, перекрытие КС является воспроизводящим ядром (аналогом δ-функции) в представлении КС, $\Psi_P(u) = \int\langle P,u|P,v\rangle\Psi_P(v)\mathrm{d}\mu_P(\bar{v},v)$, где $\Psi_P(u) = \langle P,u|\Psi\rangle$.

Рассмотрим функцию $s(u,v)$ от координат двух точек проективного пространства CP^{N-1} или комплексного шара CD^{N-1},

$$s^2(u,v) = -\ln|\langle P,u|P,v\rangle|^2 = -P\ln|\langle u^i v_i\rangle|^2\,. \tag{27}$$

Свойства модуля перекрытия КС позволяют интерпретировать эту функцию как симметрику. (Напомним, что действительная и положительная симметрика удовлетворяет двум из трех аксиом расстояния: $s(u,v) = s(v,u)$ и $s(u,v) = 0$ только при $u = v$, исключая аксиому треугольника.)

Распространение существующей для группы $SU(2)$ методики нахождения контравариантных символов операторов, включающая разложение их в ряд по сферическим функциям и технику коэффициентов Клебша-Гордана на группы $SU(N)$ и $SU(N-1,1)$ достаточно сложно и громоздко. В работе предлагается новая методика нахождения символов, основанная на представлении генераторов групп $SU(N)$ и $SU(N-1,1)$ через операторы рождения и уничтожения, сходная с методикой нахождения символов операторов группы Гейзенберга. Условия перехода к классическому пределу в терминах ковариантных символов операторов рассматриваются на основе формулы для символа произведения операторов (8). Роль малого параметра ("постоянной Планка") играет $1/P$, где P – сигнатура представления.

Если симметричные НП $T_{[P0..0]}(g)$ групп $SU(N)$ строятся в пространствах полиномов степени P от N комплексны переменных, то антисимметричные НП, у которых лишь один индекс сигнатуры отличен от нуля, строятся в пространстве полиномов фиксированной степени от N комплексных грассмановых переменных. Развита соответствующая техника, включая явный вид инвариантной меры, воспроизводящих ядер, когерентных состояний.

В пятой главе теория КС групп $SU(N)$ применяется к построению и анализу континуального интеграла и квазиклассических уравнений для неабелевых полей.

Березиным подробно исследовались континуальные интегралы, не связанные с мерами в функциональных пространствах. Как им было показано, в этом случае континуальный интеграл следует понимать как предел некоторой конечнократной аппроксимации. Построение различных конечнократных аппроксимаций основано на использовании различных типов символов операторов: оператор реализуется как интегральное преобразование, ядром которого и является символ оператора.

Символ квантового гамильтониана по сравнению с классической функцией Гамильтона может содержать добавки, пропорциональные некоторому (в классическом пределе малому) параметру и исчезающие лишь в классическом пределе. И в отличие от случая плоского фазового пространства (группы Гейзенберга), в случае искривленного фазового пространства, радиус кривизны которого зависит от величины спина или изоспина, эти добавки имеются уже в простейших случаях. Более того, в практически интересных случаях малых спинов и изоспинов классическая функция Гамильтона уже не может служить адекватным приближением, так как "добавочные" члены того же порядка, что и "основные".

В главе 5 мы рассматриваем вопрос о том, каким НП отвечает описание с помощью обычных и грассмановых переменных (и соответственно предлагающиеся в литературе классические и псевдоклассические функции Лагранжа), какие появляются добавки к классической функции Лагранжа и какова природа этих добавок – зависимость от НП или лишь от вида используемых символов.

Проводится построение конечнократных аппроксимаций континуальных интегралов с помощью ковариантных и контравариантных символов групп

$SU(N)$ и $SU(N-1,1)$. Эти интегралы используются далее для анализа поведения частицы в неабелевом поле, получения квазиклассических уравнений и нахождения области их применимости. Параллельно развивается подход к построению уравнений и переходу к квазиклассическому пределу на основе метода собственного времени.

Оба метода приводят к выводу, что квазиклассические уравнения для частицы в неабелевом поле (уравнения Вонга) отвечают большим цветовым зарядам (точнее, пределу $P \to \infty$). Для фундаментальных НП ($P = 1$) получены другие уравнения, существенно отличающиеся от уравнений Вонга. Действительно, для фундаментальных НП произведение генераторов линейно выражается через генераторы и КС не расплываются при произвольном $\hat{H}$. Соответственно уравнения на параметры КС являются точными, но для гамильтонианов, не линейных по генераторам, не совпадают с квазиклассическими, т.к. в этом случае символ гамильтониана не совпадает с функцией, получаемой заменой в исходном выражении для $\hat{H}$ генераторов на их символы.

Таким образом, исключая случай линейного по генераторам гамильтониана, квантовомеханические уравнения сводятся к уравнениям для эволюции КС только в двух противоположных случаях – для фундаментальных НП и в пределе, отвечающем большим значениям сигнатуры НП; в последнем случае и возникают квазиклассические уравнения.

В шестой главе рассматриваются коэффициенты КГ в базисе КС и смешанных базисах. Теория коэффициентов КГ группы $SU(2)$, являющаяся важнейшей частью теории углового момента, широко используется в различных приложениях. Однако длительное время эта теория рассматривалась лишь в стандартном дискретном базисе $|j\ m\rangle$, где j – момент, m – проекция. В главе 6 развивается единый подход к исследованию коэффициентов КГ в различных базисах на основе аппарата перекрытий. Используются 3 типа базисов: обычный дискретный (элементы связаны инфинитезимальными операторами), непрерывный базис КС (элементы связаны конечными преобразованиями), и базис квазирегулярного представления, параметризуемый точками на инвариантном относительно действия группы многообразии. Подчеркнем, что если первые два базиса – базисы в пространстве одного неприводимого представления (НП), то последний - базис в пространстве приводимого представления. Для группы $SU(2)$ это дискретный базис $|j\ m\rangle$, базис КС $|j\ u\rangle$, $u = \{u_1, u_2\}$ и $|\theta\ \varphi\rangle$ – базис, параметризуемый точками на сфере и отвечающий состояниям с определенными угловыми координатами.

Через перекрытия (скалярные произведения векторов состояний гильбертова пространства) могут быть записаны как волновые функции, так и коэффициенты КГ, определяемые для групп $SU(2)$ и $SU(1,1)$ соотношениями

$$|j_1\ v\rangle|j_2\ w\rangle = \sum_j \int \langle j\ u||j_1\ v|j_2\ w\rangle\ |j\ u\rangle\ d\mu_j(u), \tag{28}$$

$$|j\; w\rangle = \int \langle j_1\; u|j_2\; v||j\; w\rangle |j_1\; u\rangle |j_2\; v\rangle d\mu_{j_1}(u) d\mu_{j_2}(v). \tag{29}$$

Коэффициенты КГ в базисе КС являются инвариантами группы, а значит, выражаются через элементарные инварианты – детерминант и свертку,

$$\langle j_1\; u|j_2\; v||j\; w\rangle = \rho(u_1\bar{w}_1 \pm u_2\bar{w}_2)^{R_2}(v_1\bar{w}_1 \pm v_2\bar{w}_2)^{R_1}(u_1v_2 - u_2v_1)^{R_3}, \tag{30}$$

где ρ – нормировочный коэффициент, верхний знак отвечает $SU(2)$, нижний - $SU(1,1)$. Они служат производящими инвариантами для обычных дискретных коэффициентов КГ. Для каждого соотношения между коэффициентами КГ в дискретном базисе устанавливается свой аналог в базисе КС.

Благодаря удобному языку записи величин теория коэффициентов КГ формулируется единым образом для различных базисов, как своеобразное обобщение формул перекрытия. Простая и компактная запись соотношений теории углового момента на основе одновременного использования трех типов базисов придает им прозрачный физический и теоретико-групповой смыслы. При этом многие соотношения (в том числе для производящих функций и интегральных представлений), вывод которых другими методами достаточно сложен или громоздок, при использовании техники перекрытий становятся практически очевидными.

Показано, что в отличие от коэффициентов КГ в дискретном базисе, осциллирующих при больших моментах j, коэффициенты КГ группы $SU(2)$ в базисе КС в пределе $j \to \infty$ задают классическую формулу сложения моментов. Введены объекты нового типа – коэффициенты КГ в смешанных базисах, в частности $\langle j_1\; m_1|j_2\; m_2||j\; u\rangle$ и $\langle j_1\; u_1|j_2\; u_2||j\; m\rangle$. Первый коэффициент распадается на произведение обычного коэффициента КГ и перекрытия дискретного базиса с базисом КС, $\langle j_1\; m_1|j_2\; m_2||j\; m_1+m_2\rangle\, \langle j\; m_1+m_2|j\; u\rangle$, второй может быть выражен через полиномы Якоби

$$\langle j_1\; u|j_2\; v||j\; m\rangle = \rho \left[\frac{n_1!\; n_2!}{(n_1+n_2)!}\right]^{1/2} (u_1v_2 - u_2v_1)^{R_3-n_1} \times \tag{31}$$

$$P_{n_1}^{(R_2-n_1,\; R_1-n_1)}\left(\frac{u_1v_2+u_2v_1}{u_1v_2-u_2v_1}\right) u_2^{R_2-2n_1} v_2^{R_1},\; n_{1,2} = j \pm m,\; R_i = \sum_k j_k(-1)^{\delta_{ik}}.$$

Аналогичные утверждения справедливы и для коэффициентов КГ группы $SU(1,1)$. Для коэффициентов КГ групп $SU(2)$ и $SU(1,1)$ в когерентном и смешанных базисах получены аналоги формул ортонормированности, интегральные представления, производящие функции и выписаны соотношения симметрии. Отмечено, что смешанные коэффициенты (9) естественным образом возникают при рассмотрении матричных элементов неприводимых тензорных операторов в КС.

В третьей части строится и изучается поле на группе Пуанкаре.

Основным объектом исследования в этой части работы является скалярное поле на группе Пуанкаре. Скалярное поле на группе Пуанкаре

$f'(x', \mathbf{z}') = f(x, \mathbf{z})$, где $f'(x, \mathbf{z}) = T_L(g)f(x, \mathbf{z})$, зависит от координат x в пространстве Минковского (являющегося однородным пространством группы Пуанкаре) и координат $\mathbf{z}$ на подгруппе Лоренца. Комплексные координаты $\mathbf{z}$ описывают спиновые степени свободы. В **главе 7** мы развиваем общую схему анализа на основе построения правого $T_R(g)$ и левого $T_L(g)$ обобщенных регулярных представлений группы, которую затем применяем в **главах 8,9,10** к пространствам 2, 3, и 4 измерений соответственно. Здесь мы для краткости рассмотрим общую схему на примере четырехмерного псевдоевклидова пространства.

Как известно, преобразования группы Пуанкаре

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu} \tag{32}$$

в пространстве Минковского ($\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$) с координатами $x = (x^{\mu},\ \mu = 0, 1, 2, 3)$ задается парами (a, Λ), где $a = (a^{\mu})$ – произвольный вектор и матрица $\Lambda \in O(3, 1)$. Для них справедлив закон композиции

$$(a_2, \Lambda_2)(a_1, \Lambda_1) = (a_2 + \Lambda_2 a_1, \Lambda_2 \Lambda_1). \tag{33}$$

Любая матрица Λ может быть представлена в одной из четырех форм: $\Lambda_0, \Lambda_s\Lambda_0, \Lambda_t\Lambda_0,\ \Lambda_s\Lambda_t\Lambda_0$. Здесь $\Lambda_0 \in SO_0(3, 1)$, где $SO_0(3, 1)$ – связная компонента группы $O(3, 1)$, и матрицы $\Lambda_s = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$, $\Lambda_t = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$ отвечают пространственному отражению I_s и отражению времени I_t. Пары (a, Λ_0) с законом композиции (33) образуют группу, являющуюся полупрямым произведением группы трансляций $T(4)$ и группы вращений $SO_0(3, 1)$, которую мы обозначим как $M_0(3, 1)$.

Рассмотрим теперь универсальную накрывающую для $M_0(3, 1)$. Эта группа, которую мы обозначим как $M(3, 1)$, является полупрямым произведением $T(4)$ и $SL(2, C)$. Как известно, существует взаимнооднозначное соответствие между векторами v пространства Минковского и 2×2 эрмитовыми матрицами V (мы используем два набора 2×2 матриц $\sigma_{\mu} = (\sigma_0, \sigma_k)$ и $\bar{\sigma}_{\mu} = (\sigma_0, -\sigma_k)$):

$$v^{\mu} \leftrightarrow V = v^{\mu}\sigma_{\mu}, \quad v^{\mu} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(V\bar{\sigma}^{\mu}). \tag{34}$$

Собственные преобразования Пуанкаре $x' = \Lambda_0 x + a$ можно теперь переписать в виде

$$X' = UXU^{\dagger} + A, \tag{35}$$

где $X = x^{\mu}\sigma_{\mu}$, $A = a^{\mu}\sigma_{\mu}$, и $U \in SL(2, C)$ (две различные матрицы $\pm U$ отвечают каждой Λ_0). Элементы $M(3, 1)$ задаются парами (A, U) с законом композиции

$$(A_2, U_2)(A_1, U_1) = (U_2 A_1 U_2^{\dagger} + A_2,\ U_2 U_1). \tag{36}$$

Перейдем теперь к введению скалярного поля на группе Пуанкаре. Хорошо известно, что любое НП группы G содержится (с точностью до эквивалентности) в разложении обобщенного регулярного представления (ОРП).

Рассмотрим левое ОРП $T_L(g)$, действующее в пространстве функций $f(h)$, $h \in G$, на группе:

$$T_L(g)f(h) = f'(h) = f(g^{-1}h), \; g \in G. \tag{37}$$

Как следствие (37) имеем

$$f'(h') = f(h), \quad h' = gh. \tag{38}$$

Для случая группы $M(3,1)$ воспользуемся параметризацией элементов двумя 2×2 матрицами (одной эрмитовой и одной из $SL(2,C)$), описанной выше. В то же время, используя эту параметризацию, мы выберем следующие обозначения:

$$g \leftrightarrow (A, U), \quad h \leftrightarrow (X, Z)\,, \tag{39}$$

где A, X – 2×2 эрмитовы матрицы и $U, Z \in SL(2,C)$. Отображение $h \leftrightarrow (X, Z)$ порождает соответствие

$$\begin{aligned} &h \leftrightarrow (x, z, \underline{z}), \quad \text{где} \quad x = (x^\mu), \; z = (z_\alpha), \; \underline{z} = (\underline{z}_\alpha), \\ &\mu = 0,1,2,3, \; \alpha = 1,2, \; z_1\underline{z}_2 - z_2\underline{z}_1 = 1, \end{aligned} \tag{40}$$

с помощью соотношений

$$X = x^\mu \sigma_\mu, \quad Z = \begin{pmatrix} z_1 & \underline{z}_1 \\ z_2 & \underline{z}_2 \end{pmatrix} \in SL(2,C)\,. \tag{41}$$

С другой стороны, мы имеем соответствие $h' \leftrightarrow (x', z', \underline{z}')$,

$$\begin{aligned} &h' = gh \leftrightarrow (X', Z') = (A, U)(X, Z) = (UXU^+ + A, UZ) \leftrightarrow (x', z', \underline{z}'), \\ &X' = UXU^+ + A, \qquad Z' = UZ. \end{aligned}$$

Соотношение (38) принимает вид

$$f'(x', z', \underline{z}') = f(x, z, \underline{z}), \tag{42}$$

$$x'^\mu = (\Lambda_0)^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu, \quad \Lambda_0 \leftarrow U \in SL(2,C), \tag{43}$$

$$z'_\alpha = U_\alpha{}^\beta z_\beta, \quad \underline{z}'_\alpha = U_\alpha{}^\beta \underline{z}_\beta, \quad z_1\underline{z}_2 - z_2\underline{z}_1 = z'_1\underline{z}'_2 - z'_2\underline{z}'_1 = 1. \tag{44}$$

Соотношения (42)-(44) допускают важную для дальнейшего интерпретацию. Мы можем рассматривать x и x' как пространственно-временные координаты в пространстве Минковского $M(3,1)/SL(2,C)$ в различных лоренцевых системах отсчета, связанных преобразованием собственной группы Пуанкаре, а наборы $z, \underline{z}$ и $z', \underline{z}'$ (координаты на $SL(2,C)$) – как спиновые координаты в этих лоренцевых системах. Преобразуясь согласно (44) по двумерному спинорному представлению группы Лоренца, переменные z и $\underline{z}$ инвариантны относительно трансляций, как это можно ожидать для спиновых степеней свободы. Т.о., мы можем трактовать наборы $x, z, \underline{z}$ *как координаты точек в координатно-спиновом пространстве с законом преобразования (43), (44) при переходе от одной лоренцевой системы отсчета к другой, а соотношение (42) как закон преобразования скалярных функций на координатно-спиновом пространстве.*

Так как набор $(x, z, \underline{z})$ находится во взаимнооднозначном соответствии с элементами группы $M(3,1)$ и имея в виду данную интерпретацию, мы будем также называть функции (42) скалярными функциями на группе Пуанкаре.

Различные функции такого типа отвечают различным представлениям группы $M(3,1)$, и задача классификации НП этой группы сводится к задаче классификации скалярных функций на координатно-спиновом пространстве. Рассмотрение естественно ограничить скалярными функциями, аналитическими как по $z, \underline{z}$, так и по $\overset{*}{z}, \overset{*}{\underline{z}}$ (то есть функциями, дифференцируемыми по этим аргументам).

Далее функции на группе Пуанкаре $M(3,1)$ мы обозначим как $f(x, z, \underline{z}, \overset{*}{z}, \overset{*}{\underline{z}}) = f(x, \mathbf{z})$, $\mathbf{z} = (z, \underline{z}, \overset{*}{z}, \overset{*}{\underline{z}})$. (Для функций на группах $M(D,1)$ и $M(D)$ мы будем использовать аналогичные обозначения, понимая под $\mathbf{z}$ соответствующий набор спиновых координат.) Как следствие унимодулярности матриц U существуют инвариантные антисимметричные тензоры $\varepsilon^{\alpha\beta} = -\varepsilon^{\beta\alpha}$, $\varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta} = -\varepsilon^{\dot\beta\dot\alpha}$, $\varepsilon^{12} = \varepsilon^{\dot1\dot2} = 1$, $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{\dot1\dot2} = -1$. Поднятие и опускание спинорных индексов может быть осуществлено по формулам

$$z_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta} z^\beta, \quad z^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta} z_\beta, \quad \overset{*}{z}_{\dot\alpha} = \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta} \overset{*}{z}{}^{\dot\beta}, \quad \overset{*}{z}{}^{\dot\alpha} = \varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta} \overset{*}{z}_{\dot\beta}. \tag{45}$$

В рамках рассматриваемого подхода обычное описание полей со спином посредством многокомпонентных функций возникает *при разделении спиновых и пространственных переменных.* Так как $\mathbf{z}$ не преобразуется при трансляциях, то функции, зависящие лишь от $\mathbf{z}$, преобразуются по некоторому представлению группы Лоренца. Пусть функция $f(x, \mathbf{z})$ допускает представление

$$f(x, z) = \phi^n(\mathbf{z}) \psi_n(x), \tag{46}$$

где $\phi^n(z)$ образуют базис в пространстве представления группы Лоренца. Последнее означает, что функции от преобразованного аргумента $\phi^n(\mathbf{z}')$, $z' = g\mathbf{z}$, могут быть разложены по $\phi^n(\mathbf{z}')$,

$$\phi^n(\mathbf{z}') = \phi^l(\mathbf{z}) L_l{}^n(U). \tag{47}$$

Действие группы Пуанкаре на строку $\phi(\mathbf{z})$, составленную из $\phi^n(\mathbf{z})$, сводится к умножению на матрицу L, зависящую лишь от параметров поворота, задаваемых матрицей $U \in \mathrm{Spin}(D,1)$, $\phi(\mathbf{z}') = \phi(\mathbf{z}) L(U)$. Сравнивая разложения функции $f'(x', \mathbf{z}') = f(x, \mathbf{z})$ по повернутому базису $\phi(z')$ и исходному $\phi(\mathbf{z})$,

$$f'(x', \mathbf{z}') = \phi(\mathbf{z}')\psi'(x') = \phi(\mathbf{z}) L(U) \psi'(x') = \phi(\mathbf{z})\psi(x),$$

где $\psi(x)$ – столбец из $\psi_n(x)$, получим закон преобразования тензорных полей в пространстве Минковского:

$$\psi'(x') = L(U^{-1})\psi(x). \tag{48}$$

Этому закону отвечает представление группы Пуанкаре, действующее в линейном пространстве тензорных полей: $T(g)\psi(x) = L(U^{-1})\psi(\Lambda^{-1}(x -$

a)). Согласно (47), (48) $\phi(z)$ и $\psi(x)$ преобразуются по контраградиентным представлениям группы Лоренца.

В частности, для скалярных функций на группе Пуанкаре вида $f_1(x,z) = \psi_\alpha(x)z^\alpha$ и $f_2(x,z) = \bar{\psi}_\alpha(x)\overset{*}{z}^\alpha$, отвечающих спинорным представлениям группы Лоренца из (46), (48) следует, что

$$\psi'_\alpha(x') = U_\alpha{}^\beta \psi_\beta(x), \quad \bar{\psi}'_{\dot{\alpha}}(x') = \overset{*}{U}_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} \bar{\psi}_{\dot{\beta}}(x). \tag{49}$$

Произведение $\psi_\alpha(x)\bar{\psi}^{*\alpha}(x)$ Пуанкаре-инвариантно.

Таким образом, в разложении скалярного поля на группе Пуанкаре содержатся тензорные поля всех возможных спинов и проблема классификации и построения явных реализаций тензорных полей сводится к проблеме разложения левого ОРП на неприводимые.

Обычно понятие симметрии применяется к РВУ, а не непосредственно к полям. В широком смысле операцией симметрии считается произвольный оператор $\hat{B}$, переводящий решения ψ некоторого уравнения в решения $\hat{B}\psi$ того же уравнения для каждого ψ, принадлежащего множеству решений уравнения. Мы сформулируем *понятие операции симметрии для полей* на группе Пуанкаре – как оператора, переводящего поле ψ, преобразующееся по данному представлению, в поле $\hat{B}\psi$, преобразующееся по тому же представлению.

Рассмотрим представление в пространстве скалярных функций на однородном пространстве G/K, $K \in G$:

$$T(g)f(y) = f'(y) = f(g^{-1}y), \quad g \in G, \quad y \in G/K, \tag{50}$$

или $f'(y') = f(y)$, где $y' = gy$. Обозначим пространство скалярных функций на G/K как $V_{G/K}$. Преобразования симметрии скалярного поля на G/K могут быть определены как отображения этого поля на себя:

$$\psi(y) \to \hat{B}[\psi(y)] \in V_{G/K}, \tag{51}$$

где оператор $\hat{B}$ является обратимым. В общем случае $\hat{B}$ действует как на функцию, так и на ее аргументы. Действуя оператором $\hat{B}$ на (50), получим

$$\hat{B}T(g)\hat{B}^{-1}\hat{B}\psi(y) = \hat{B}\psi(g^{-1}y). \tag{52}$$

Пусть теперь преобразование сводится к замене аргументов функций на однородном пространстве (замене координат) $\hat{B}(\psi(y)) = \psi(\tilde{y})$, где $\tilde{y} = \hat{B}y$. Отметим, что $y \to \tilde{y}$ является взаимно-однозначным отображением, т.к. существует обратный оператор $\hat{B}^{-1}$. Согласно (52)

$$\hat{B}T(g)\hat{B}^{-1}\psi(\tilde{y}) = \psi(\hat{B}g^{-1}\hat{B}^{-1}\tilde{y}), \quad \hat{B}T(g)\hat{B}^{-1} = T(\tilde{g}),$$

где отображение $g \to \tilde{g} = \hat{B}g\hat{B}^{-1}$ сохраняет групповой закон композиции и следовательно задает автоморфизм группы Пуанкаре.

Рассмотрим два важных частных случая.

1. Скалярное поле $f(x)$ на пространстве Минковского, $x \in M(D,1)/\mathrm{Spin}(D,1)$. Внутренние автоморфизмы

$$g \to g_0 g g_0^{-1}, \quad x \to g_0 x$$

отвечают левым конечным преобразованиям группы Пуанкаре при изменении системы отсчета (собственным преобразованиям Лоренца). Внешние автоморфизмы группы Пуанкаре

$$g \to \hat{B} g \hat{B}^{-1}, \quad x \to \hat{B} x$$

отвечают пространственному и временному отражениям и масштабным преобразованиям (дилатациям).

2. Скалярное поле $f(h)$ на группе Пуанкаре, $h \in M(D,1)$. По сравнению со случаем однородных пространств G/K с нетривиальной подгруппой K, здесь имеется более широкий набор симметрий. А именно, можно умножать h на элемент группы не только слева, но и справа, и для внутренних автоморфизмов $g \to g_0 g g_0^{-1}$ существуют дополнительные преобразования координат на координатно-спиновом пространстве:

$$g \to g_0 g g_0^{-1}, \quad h \to g_0 h \quad \text{(собственные преобразования Лоренца);} \tag{53}$$

$$g \to g_0 g g_0^{-1}, \quad h \to g_0 h g_0^{-1} \quad \text{(внутренние автоморфизмы);} \tag{54}$$

$$g \to \hat{B} g \hat{B}^{-1}, \quad h \to \hat{B} h \hat{B}^{-1} \quad \text{(внешние автоморфизмы).} \tag{55}$$

Таким образом, скалярное поле на группе, кроме симметрии по отношению к собственным преобразованиям Лоренца, обладает нетривиальными симметриями, связанными с внешними (отражения P,T и дилатации) и внутренними автоморфизмами $h \to g_0 h g_0^{-1}$.

Если явно указать зависимость функций на группе от i, то комплексное сопряжение $f(x, \mathbf{z}, i) \to f(x, \overset{*}{\mathbf{z}}, -i)$ также может рассматриваться как замена аргументов функции. Как мы увидим ниже, при более подробном рассмотрении дискретных симметрий, оно отвечает зарядовому сопряжению.

Рассмотрим теперь максимальный набор коммутирующих операторов на группе Пуанкаре и связанные с ним вопросы интерпретации квантовых чисел и построения РВУ. Согласно теории гармонического анализа на группах Ли максимальный набор коммутирующих операторов состоит из операторов Казимира, коммутирующих со всеми (левыми и правыми) генераторами, и одинакового числа функций левых и правых генераторов. Общее число коммутирующих операторов равно числу параметров группы. При разложении левого ОРП неэквивалентные НП различаются с помощью операторов Казимира, состояния внутри НП с помощью операторов, являющихся функциями левых генераторов, а эквивалентные НП с помощью операторов, являющихся функциями правых генераторов.

Генераторы левого ОРП отвечают трансляциям и вращениям,

$$\hat{p}_\mu = -i\partial/\partial x^\mu, \quad \hat{J}_{\mu\nu} = \hat{L}_{\mu\nu} + \hat{S}_{\mu\nu}, \tag{56}$$

где $\hat{L}_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)$ – операторы проекций углового момента, а $\hat{S}_{\mu\nu}$ – операторы проекций спина, зависящие от $\mathbf{z}$ и $\partial/\partial\mathbf{z}$. Для правых генераторов имеем

$$\hat{p}^R_\mu = -(L^{-1}(\mathbf{z}))_\mu{}^\nu p_\nu, \quad \hat{J}^R_{\mu\nu} = \hat{S}^R_{\mu\nu}, \tag{57}$$

где $L \in SO(3,1)$. Операторы правых трансляций могут быть также записаны в виде $\hat{P}^R = -Z^{-1}\hat{P}(Z^{-1})^\dagger$; операторы $\hat{S}_{\mu\nu}$ и $\hat{S}^R_{\mu\nu}$ – это левые и правые генераторы $SL(2,C)$, действующие в спиновом пространстве и зависящие только от $\mathbf{z}$.

Все правые генераторы (57) коммутируют со всеми левыми (56) и удовлетворяют тем же коммутационным соотношениям. Для операторов проекций спина удобно использовать трехмерные векторные обозначения $\hat{S}_k = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\hat{S}^{ij}$, $\hat{B}_k = \hat{S}_{0k}$.

Для классификации функций на группе Пуанкаре надо использовать максимальный набор из 10 коммутирующих операторов (включающий также правые генераторы) на группе, например

$$\hat{p}_\mu,\ \hat{W}^2,\ \hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{S}},\ \hat{\mathbf{S}}^2 - \hat{\mathbf{B}}^2,\ \hat{\mathbf{S}}\hat{\mathbf{B}},\ \hat{S}^R_3,\ \hat{B}^R_3. \tag{58}$$

В системе покоя $\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{S}} = 0$, и максимальный набор может быть получен из (58) заменой $\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{S}}$ на $\hat{S}_3$. Функции $f(x,z,\underline{\overset{*}{z}})$ и $f(x,\overset{*}{z},\underline{z})$ (соответствующие подпространства обозначим как V_+ и V_-) зависят от 8 действительных параметров, и следовательно, для них можно рассматривать только 8 операторов:

$$\hat{p}_\mu,\ \hat{W}^2,\ \hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{S}}\ (\hat{S}^3 \text{ в системе покоя}),\ \hat{p}_\mu\hat{\Gamma}^\mu,\ \hat{S}^R_3. \tag{59}$$

В отличие от операторов $\hat{\mathbf{S}}\hat{\mathbf{B}}$ и $\hat{B}^R_3$ из (58), все операторы из набора (59) инвариантны относительно пространственного отражения и этот набор удобен для описания состояний с определенной четностью. Операторы $\hat{\Gamma}^\mu$ зависят от $\mathbf{z}$ и $\partial/\partial\mathbf{z}$:

$$\hat{\Gamma}^\mu = \frac{1}{2}\left(\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha}\underline{\overset{*}{z}}_{\dot{\alpha}}\partial_\alpha + \sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}}z^\alpha\underline{\partial}^{\dot{\alpha}}\right) - c.c., \tag{60}$$

где $\partial_\alpha = \partial/\partial z^\alpha$, $\underline{\partial}^{\dot{\alpha}} = \partial/\partial\underline{\overset{*}{z}}_{\dot{\alpha}}$. Для функций из пространств V_+ и V_- можно показать, что если собственное значение $\hat{p}_\mu\hat{\Gamma}^\mu$ равно $\pm ms$, где m – масса, а $2s$ – степень полинома (собственное значение $\hat{S}^R_3$), то собственное значение оператора $\hat{W}^2$ также фиксировано и отвечает спину s.

Рассмотрим подробнее набор (58). Наряду с операторами импульса $\hat{p}_\mu$, оператором Любаньского-Паули $\hat{W}^2$ и оператора спиральности $\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{S}}$ этот набор содержит четыре функции правых генераторов группы Пуанкаре. К последним относятся два оператора Казимира спиновой группы Лоренца (т.е. группы, действующей только на спиновые координаты) $\hat{\mathbf{S}}^2 - \hat{\mathbf{B}}^2 = (\hat{\mathbf{S}}^R)^2 - (\hat{\mathbf{B}}^R)^2$, $\hat{\mathbf{S}}\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{S}}^R\hat{\mathbf{B}}^R$ НП (j_1, j_2) группы Лоренца маркируются собственными значениями этих операторов, а именно, операторы $\hat{\mathbf{S}}^2 - \hat{\mathbf{B}}^2 \pm 2i\hat{\mathbf{S}}\hat{\mathbf{B}}$ имеют собственные значения $2j_1(j_1+1)$ и $2j_2(j_2+1)$. Для конечномерных представлений группы Лоренца функции $f(x,\mathbf{z})$ являются полиномами степени $2j_1$ и $2j_2$ по $z, \underline{z}$ и $\overset{*}{z}, \overset{*}{\underline{z}}$ соответственно.

Операторы $\hat{S}_3^R$,$\hat{B}_3^R$ задают аддитивные квантовые числа. Здесь надо отметить близкую аналогию с теорией нерелятивистского ротатора, где в качестве волновых функций рассматриваются не функции на сфере $SU(2)/U(1)$, а функции на всей группе вращений $SU(2)$ и два набора операторов: операторы углового момента в инерциальной лабораторной системе отсчета (генераторы в левом ОРП $\hat{J}_i^L$) и операторы углового момента во вращающейся системе отсчета, связанной с телом (генераторы в правом ОРП $\hat{J}_i^R$). Классификация состояний ротатора основана на использовании максимального набора коммутирующих операторов, включающего кроме $\hat{\mathbf{J}}^2$ и $\hat{J}_3^L$ также $\hat{J}_3^R$. Оператор $\hat{J}_3^R$ различает эквивалентные представления в разложении левого ОРП группы вращений и отвечает квантовому числу, не зависящему от выбора лабораторной системы, играющему важную роль в теории молекулярных спектров. В 3+1-мерном случае имеется два аналога $\hat{J}_3^R$, а именно $\hat{B}_3^R = \hat{S}_{03}^R$ и $\hat{S}_3^R = \hat{S}_{12}^R$, действующих в пространстве функций на группе Пуанкаре.

Знак S_3^R различает поля частиц и античастиц и S_3^R можно интерпретировать как CPT-заряд. Этот заряд изменяет знак при CPT-преобразовании и является целым или полуцелым соответственно для частиц с целым и полуцелым спином.

Построение РВУ выглядит как выделение инвариантных подпространств в пространстве скалярных функций на группе Пуанкаре. В предлагаемом подходе уравнения имеют одинаковую форму для всех спинов. Выделение компонент с фиксированными спином и массой проводится фиксацией собственных значений операторов Казимира группы Пуанкаре (или оператора $\hat{p}_\mu \hat{\Gamma}^\mu$). Фиксируя далее представление группы Лоренца, по которому преобразуется $\phi(\mathbf{z})$ в разложении

$$f(x,\mathbf{z}) = \phi^n(\mathbf{z})\psi_n(x),$$

можно получить РВУ в стандартной многокомпонентной записи.

В качестве простого примера рассмотрим линейные по $\mathbf{z}$ функции, отвечающие спину 1/2. Если поле, отвечающее частицам, описывается функцией $f(x, z, \overset{*}{\underline{z}}) \in V_+$,

$$f(x,z,\overset{*}{\underline{z}}) = \chi_\alpha(x) z^\alpha + \overset{*}{\psi}{}^{\dot\alpha}(x)\overset{*}{\underline{z}}_{\dot\alpha} = Z_D \Psi(x),\ Z_D = (z^\alpha\ \overset{*}{\underline{z}}_{\dot\alpha}),\ \Psi(x) = \begin{pmatrix} \chi_\alpha(x) \\ \overset{*}{\psi}{}^{\dot\alpha}(x) \end{pmatrix}, \tag{61}$$

то поле, отвечающее античастицам, описывается функцией $f(x, \underline{z}, \overset{*}{z}) \in V_-$,

$$f(x,\underline{z},\overset{*}{z}) = \chi_\alpha(x)\underline{z}^\alpha + \overset{*}{\psi}{}^{\dot\alpha}(x)\overset{*}{z}_{\dot\alpha} = \underline{Z}_D \Psi(x), \quad \underline{Z}_D = (\underline{z}^\alpha\ \overset{*}{z}_{\dot\alpha}), \tag{62}$$

где Z_D и $\underline{Z}_D$ (а следовательно и биспинор $\Psi(x)$ в обеих формулах) одинаково преобразуются под действием собственной группы Пуанкаре $M(3,1)$.

Подставляя функции $Z_D\Psi(x)$ (61) или $\underline{Z}_D\Psi(x)$ (62), характеризующиеся $S_3^R = \pm 1/2$ соответственно и $j_1 + j_2 = 1/2$, в уравнение

$$(\hat{p}_\mu \hat{\Gamma}^\mu - ms) f(x, \mathbf{z}) = 0, \tag{63}$$

и сравнивая коэффициенты при z^α и $\overset{*}{\underline{z}}_{\dot\alpha}$ или при $\underline{z}^\alpha$ и $\overset{*}{z}_{\dot\alpha}$ в левой и правой частях, получим уравнение Дирака

$$\hat{p}_\mu \gamma^\mu \Psi_D(x) = m\Psi_D(x), \quad \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}. \tag{64}$$

Матрица $\gamma^5 = \mathrm{diag}\{\sigma^0, -\sigma^0\}$ отвечает оператору киральности $\hat{\Gamma}^5 = \frac{1}{2}(z^\alpha \partial_\alpha - \overset{*}{\underline{z}}_{\dot\alpha} \underline{\partial}^{\dot\alpha}) + c.c.$ Аналогично, подставляя функции, характеризующиеся $S_3^R = \pm 1$ и $j_1 + j_2 = 1$,

$$f_1(x, \mathbf{z}) = \chi_{\alpha\beta}(x) z^\alpha z^\beta + \phi_\alpha{}^{\dot\beta}(x) z^\alpha \overset{*}{\underline{z}}_{\dot\beta} + \psi^{\dot\alpha\dot\beta}(x) \overset{*}{\underline{z}}_{\dot\alpha} \overset{*}{\underline{z}}_{\dot\beta} = \Phi_\mu(x) q^\mu + \frac{1}{2} F_{\mu\nu}(x) q^{\mu\nu},$$

где

$$q^\mu = \frac{1}{2}\sigma^\mu{}_{\alpha\dot\beta} z^\alpha \overset{*}{\underline{z}}^{\dot\beta}, \quad q_\mu q^\mu = 0, \qquad q_{\mu\nu} = -q_{\nu\mu} = \frac{1}{2}\left((\sigma_{\mu\nu})_{\alpha\beta} z^\alpha z^\beta + (\bar{\sigma}_{\mu\nu})_{\dot\alpha\dot\beta} \overset{*}{\underline{z}}^{\dot\alpha} \overset{*}{\underline{z}}^{\dot\beta}\right),$$
$$\Phi_\mu(x) = -\bar{\sigma}_\mu{}^{\beta\alpha} \phi_{\alpha\dot\beta}(x), \quad F_{\mu\nu}(x) = -2\left((\sigma_{\mu\nu})_{\alpha\beta} \chi^{\alpha\beta}(x) + (\bar{\sigma}_{\mu\nu})_{\dot\alpha\dot\beta} \psi^{\dot\alpha\dot\beta}(x)\right),$$

получим уравнение Даффина-Кеммера, и т. д. В **главе 10**, кроме подробного рассмотрения наборов коммутирующих операторов (58), (59) и систем уравнений на одну скалярную функцию на группе Пуанкаре, мы показываем, что развиваемый подход позволяет легко воспроизвести практически все известные РВУ. В общем случае РВУ со спектром спинов и масс могут либо связывать несколько скалярных функций $f(x, \mathbf{z})$ (как общие уравнения Гельфанда-Яглома, и, в частности, уравнения Любаньского-Бхабба), или описывать объекты с составным спином, отвечающие функциям $f(x, \mathbf{z}_{(1)}, \ldots \mathbf{z}_{(n)})$ одного набора пространственно-временных координат x и нескольких наборов спиновых $\mathbf{z}$ (как уравнение Иваненко-Ландау-Келера (Дирака-Келера)).

Имеется два типа уравнений, описывающих один и тот же спин, один на функции $f(x, \mathbf{z})$, где $\phi^n(\mathbf{z})$ (см. (46)) преобразуется по конечномерным неунитарным НП группы Лоренца, и другой на функции $f(x, \mathbf{z})$, где $\phi^n(\mathbf{z})$ преобразуется по бесконечномерным унитарным НП группы Лоренца. В матричной записи эти уравнения имеют соответственно конечное или бесконечное число компонент (к последним относится, в частности, уравнение Майорана).

Именно этот аспект теории мы подробно рассматриваем в **главе 9** на примере трехмерного псевдоевклидова пространства. Как известно, существуют унитарные НП группы $M(2,1)$, отвечающие дробному спину. Эти спины могут быть описаны только с помощью бесконечномерных НП 2+1-мерной группы Лоренца $SO(2,1) \sim SU(1,1)$, а целые спины - еще и с помощью конечномерных неунитарных НП $SU(1,1)$. Для уравнений, связанных с конечномерными представлениями 2+1-мерной группы Лоренца, плотность тока j^0 положительно определена при любых полуцелых спинах, а плотность энергии – для любых целых спинах. Для рассматриваемых бесконечнокомпонентных уравнений, связанных с унитарными НП 2+1-мерной группы Лоренца, энергия положительно определена при любом спине. Кроме того, в отличие от конечномерного случая, скалярная плотность $\psi^\dagger\psi$ также положительно определена, что означает возможность амплитудно-вероятностной интерпретации $\psi(x)$.

Рассмотрение поля на группе Пуанкаре позволяет также достичь существенного прогресса в проблеме практических вычислений для многокомпонентных уравнений. В настоящем подходе, благодаря использованию спиновых дифференциальных операторов вместо конечно- или бесконечномерных матриц, с технической точки зрения нет существенной разницы при рассмотрении уравнений, связанных с различными конечно- или бесконечномерными представлениями группы Лоренца. Поэтому настоящий подход адекватен для описания высших спинов и уравнений с положительным энергетическим спектром, допускающих амплитудно-вероятностную интерпретацию. В частности, использование спиновых переменных $\mathbf{z}$ позволило нам получить компактную явную форму плосковолновых решений для произвольного спина (включая дробный спин в 2+1 измерениях).

В **главе 11** рассматриваются дискретные преобразования. Дискретные преобразования определяются как частный случай преобразований симметрии скалярного поля на группе Пуанкаре, для которых выполняется два условия: во-первых, квадрат преобразования равен тождественному преобразованию; во-вторых, произведение дискретных преобразований снова является дискретным преобразованием.

Пространственное отражение $\hat{I}_s$ переводит $x = (x^0, x^k)$ в $\bar{x} = (x^0, -x^k)$, или в терминах 2×2 эрмитовых матриц $X \to \overline{X} = \bar{x}^\mu \sigma_\mu = x^\mu \bar{\sigma}_\mu$. Используя соотношение $\overline{X} = \sigma_2 X^T \sigma_2$ и тождество $\sigma_2 U \sigma_2 = (U^T)^{-1}$, где $U \in SL(2,C)$, получим как следствие закона преобразования X (35)

$$\overline{X}' = (U^\dagger)^{-1}\overline{X}U^{-1} + \overline{A}. \tag{65}$$

Т.о., $\overline{X}$ преобразуется с помощью элемента $(\overline{A}, (U^\dagger)^{-1})$ группы $M(3,1)$. Соотношение $(A,U) \to (\overline{A}, (U^\dagger)^{-1})$ задает автоморфизм собственной группы Пуанкаре.

Аналогично рассматривается отражение времени I_t и пространственно-временное отражение $I_x = I_s I_t$; в результате получим:

$$I_s: \quad X \to \overline{X}, \quad (A,U) \to (\overline{A}, (U^\dagger)^{-1}); \tag{66}$$
$$I_t: \quad X \to -\overline{X}, \quad (A,U) \to (-\overline{A}, (U^\dagger)^{-1}); \tag{67}$$
$$I_x: \quad X \to -X, \quad (A,U) \to (-A, U). \tag{68}$$

Эти соотношения задают внешние инволютивные автоморфизмы группы Пуанкаре, один из которых является произведением двух других. Автоморфизмы $g \to \hat{I} g \hat{I}^{-1}$ (как внутренние, так и внешние) генерируют следующие преобразования левого ОРП группы Пуанкаре:

$$T_L(g) \to \hat{I}T_L(g)\hat{I}^{-1} \equiv T_L(\hat{I}g\hat{I}^{-1}), \tag{69}$$
$$f(h) \to \hat{I}f(h) \equiv f(\hat{I}h\hat{I}^{-1}), \tag{70}$$

где (70) задает отображение пространства функций $f(h)$ на себя, отвечающее автоморфизму (69).

Законы преобразования (A, U) и (X, Z) при автоморфизмах отвечают пространственному и временному отражениям и задаются формулами (66)-(68) и

$$I_s: \quad (X, Z) \to (\overline{X}, (Z^\dagger)^{-1}), \tag{71}$$
$$I_t: \quad (X, Z) \to (-\overline{X}, (Z^\dagger)^{-1}), \tag{72}$$
$$I_x: \quad (X, Z) \to (-X, Z), \tag{73}$$

Т.о., рассматриваемые автоморфизмы отвечают замене аргументов скалярных функций $f(h)$ на группе согласно формулам (71)-(73).

Непрерывные преобразования (44), отвечающие лоренцевым поворотам, не перемешивают z^α и $\underline{z}^\alpha$ (и их комплексно сопряженные $\overset{*}{z}{}^{\dot\alpha}$, $\overset{*}{\underline{z}}{}^{\dot\alpha}$). Следовательно, четыре подпространства функций $f(x,z)$, $f(x,\underline{z})$, $f(x,\overset{*}{z})$, $f(x,\overset{*}{\underline{z}})$ инвариантны по отношению к преобразованиям собственной группы Пуанкаре. Согласно (71),(72) подстановка

$$z^\alpha \leftrightarrow -\overset{*}{\underline{z}}_{\dot\alpha}, \qquad \underline{z}^\alpha \leftrightarrow \overset{*}{z}_{\dot\alpha}, \tag{74}$$

отвечает пространственному и временному отражениям I_s, I_t. Эта подстановка переводит функции от z^α в функции от $\overset{*}{\underline{z}}_{\dot\alpha}$. Т.о., пространство скалярных функций на группе содержит два подпространства функций $f(x,z,\overset{*}{\underline{z}})$ и $f(x,\underline{z},\overset{*}{z})$ (обозначенных выше как V_+ и V_-), инвариантных по отношению как к собственным преобразованиям группы Пуанкаре, так и дискретным преобразованиям I_s и I_t. Комплексное сопряжение

$$C: \quad T(g) \to \overset{*}{T}(g), \quad f(h) \to \overset{*}{f}(h), \tag{75}$$

(где сопрягаются как функции, так и комплексные аргументы $z, \underline{z}$) отображает указанные подпространства друг на друга. Преобразование (75) поля $f(h)$ отождествляется с зарядовым сопряжением, которое связывает поля частиц и античастиц.

В отличие от отражения времени, вигнеровское обращение времени определяется как преобразование, сохраняющее знак энергии. Для описания обращения времени T и CPT-преобразования (где $P = I_s$) необходимо рассмотреть как внешние (55), так и внутренние (54) автоморфизмы собственной группы Пуанкаре. А именно, $CPT = I_x I_z$, где I_z определяется как

$$I_z: \quad (X, Z) \to (X, Z(-i\sigma_2)) \tag{76}$$

и является произведением внутреннего автоморфизма $(X,Z) \to (\overline{X}^T, (Z^T)^{-1})$ и вращения на угол π. Вигнеровское обращение времени является произведением $T = I_z C I_t$.

Показано, что теория представлений собственной группы Пуанкаре $M(3,1)$ предполагает существование 5 нетривиальных независимых дискретных преобразований, отвечающих инволютивным автоморфизмам группы. В качестве таких преобразований можно выбрать пространственное и пространственно-временное отражения P и I_x, зарядовое сопряжение C, обращение времени T; пятое преобразование для большинства физически интересных полей (кроме майорановского) сводится к появлению фазового множителя.

Используя явный вид базисов НП группы Лоренца в пространстве функций от $\mathbf{z}$, в разделах 11.4 и 11.5 мы устанавливаем законы преобразований спин-тензорных полей общего вида. В качестве простого примера рассмотрим линейные по $\mathbf{z}$ функции (61) и (62), отвечающие спину 1/2. Согласно (71), (74) для пространственного отражения получим

$$I_s: \quad Z_D\Psi(x) \to Z_D\Psi^{(s)}(\bar{x}), \quad \Psi^{(s)}(\bar{x}) = -\begin{pmatrix} \overset{*}{\psi}{}^{\dot{\alpha}}(\bar{x}) \\ \chi_\alpha(\bar{x}) \end{pmatrix} = \gamma^0\Psi(\bar{x}),$$

и соответственно для отражения времени $\Psi^{(t)}(\bar{x}) = \gamma^0\Psi(-\bar{x})$. Зарядовое сопряжение отвечает комплексному сопряжению в пространстве скалярных функций на группе, и согласно (75) имеем

$$C: \quad Z_D\Psi(x) \to \overset{*}{Z}_D\overset{*}{\Psi}(x) = \underline{Z}_D\Psi^{(c)}(x), \quad \Psi^{(c)}(x) = -\begin{pmatrix} \psi_\alpha(x) \\ \overset{*}{\chi}{}^{\dot{\alpha}}(x) \end{pmatrix} = i\gamma^2\overset{*}{\Psi}(x).$$

Наконец, используя (76), получим

$$I_z: \quad Z_D\Psi(x) \to \underline{Z}_D\gamma^5\Psi(x).$$

Отметим, что I_z, как и C, переводит частицы в античастицы. Т.о., мы вывели законы дискретных преобразований без использования РВУ.

В разделе 11.7 проводится построение представлений расширенной группы Пуанкаре в пространстве функций $f(x,\mathbf{z})$. В разделах 11.8-11.10 решения основных типов РВУ классифицируются по представлениям расширенной группы, что позволяет, в частности, решить имеющий длительную историю вопрос о смысл знака массового члена уравнений с полуцелым спином. Затем развитая схема анализа применяется к пространству 3 измерений.

В приложения вынесен вспомогательный материал по теории представлений групп Лоренца и Пуанкаре в пространствах 3 и 4 измерений.

В заключении сформулированы основные результаты и выводы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Предложена схема построения теории амплитуд вероятности, дана теоретико-групповая трактовка основных ее распределений. Установлены аналоги закона больших чисел и предельных теорем для амплитуд вероятности, связанные с переходом к классическому пределу в соответствующих квантовомеханических задачах.

2. Построены и изучены псевдодифференциальные уравнения, описывающие скачкообразные марковские процессы для вероятностей и амплитуд вероятности.

3. Построены и подробно изучены КС групп $SU(N)$ и $SU(N,1)$, отвечающее им исчисление символов на комплексных пространствах $CP^N = SU(N+1)/SU(N)$ и $CD^N = SU(N,1)/SU(N)$, проанализирован переход к классическому пределу. Различные типы НП групп $SU(N)$ построены в пространствах полиномов от коммутирующих и антикоммутирующих переменных.

4. Квазиклассические релятивистские уравнения для частицы в неабелевом поле получены как уравнения для эволюции КС групп SU(N) и указана область их применимости, при этом для фундаментальных НП получены уравнения, существенно отличающиеся от квазиклассических. С помощью символов строится интеграл по путям для частицы в неабелевом поле, причем в зависимости от типа представлений групп $SU(N)$ используются коммутирующие либо антикоммутирующие переменные.

5. Подробно исследованы коэффициенты Клебша-Гордана (КГ) групп $SU(2)$ и $SU(1,1)$ в базисе КС и впервые введенные коэффициенты КГ в смешанных базисах. Показано, что последние могут быть выражены через полиномы Якоби. Теория коэффициентов КГ формулируется единым образом для различных типов базисов.

6. Построено и изучено скалярное поле на группе Пуанкаре (для пространств 2,3,4 измерений), включающее поля всех спинов и служащее производящей функцией для спин-тензорных полей. Показано, что это поле замкнуто также относительно дискретных преобразований.

7. Явный вид спиновых операторов для поля на группе Пуанкаре не зависит от величины спина. Эти операторы строятся как операторы дифференцирования по спиновым переменным z. Переход к обычному описанию посредством многокомпонентных функций $\psi_n(x)$ отвечает разделению пространственно-временных и спиновых переменных.

8. Различные типы релятивистских волновых уравнений (РВУ) получаются в рамках разложения скалярного поля на группе Пуанкаре с помощью различных наборов коммутирующих операторов, включающие функции как левых, так и правых генераторов. Дана интерпретация правых генераторов группы Пуанкаре.

9. Дискретные преобразования определяются как инволютивные автоморфизмы (внешние и внутренние) группы Пуанкаре, действующие в пространстве функций на группе. На этой основе без каких-либо дополнительных предположений или использования РВУ выводятся законы преобразования полей и строятся представления расширенной группы Пуанкаре.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ ИЗЛОЖЕНЫ В ПУБЛИКАЦИЯХ

[1] А.Л. Шелепин, Л.А. Шелепин. Вероятностная трактовка коэффициентов Клебша-Гордана унитарных групп. // *Труды ФИАН*, 1986, **173**, 142–172.

[2] А.Л. Шелепин. Ряды и коэффициенты Клебша-Гордана для дискретной серии представлений группы $SU(2,1)$. // *Кратк. сообщ. по физ. ФИАН*, 1986, №2, 26–29.

[3] А.Л. Шелепин. Коэффициенты Клебша-Гордана для симметричных представлений симплектических групп. // *Кратк. сообщ. по физ. ФИАН*, 1986, №9, 31–34.

[4] А.Л. Шелепин, Л.А. Шелепин. Симметрический базис в теории представлений групп Ли и построение коэффициентов Клебша-Гордана. *Теоретико-групповые методы в физике*, Т.2, стр.99–110, Москва: Наука, 1986.

[5] А.Л. Шелепин, Л.А. Шелепин. Метод производящих инвариантов в теории групп Ли. // *Труды ФИАН*, 1989, **191**, 46–86.

[6] Д.М. Гитман, А.Л. Шелепин. Когерентные состояния, связанные с группами $SU(N)$ и $SU(N,1)$. // *Известия ВУЗов. Физика*, 1990, №1, 83–89.

[7] Д.М. Гитман, С.М. Харчев, А.Л. Шелепин. Когерентные состояния групп $SU(N)$ и $SU(N,1)$ и их приложения в релятивистской квантовой теории. // *Труды ФИАН*, 1990, **201**, 95–138.

[8] Д.М. Гитман, А.Л. Шелепин. Когерентные состояния для переменных угловой момент-угол. // *Кратк. сообщ. по физ. ФИАН*, 1990, №1, 31–33.

[9] D.M. Gitman, A.L. Shelepin. On the definition of the coherent states. In *Proc. XVIII Intern. Coll. Group Theoretical Methods in Physics*, pages 251–254, New York: Nova Science, 1991.

[10] A.L. Shelepin, L.A. Shelepin. Clebsh-Gordon coefficients in the coherent states basis. In *Proc. XVIII Intern. Coll. Group Theoretical Methods in Physics*, pages 279 -282, New York: Nova Science, 1991.

[11] D.M. Gitman, A.L. Shelepin. Coherent states of the $SU(N)$ and $SU(N,1)$ groups and quantization on the corresponding homogeneous spaces. Preprint MIT CTP#1990, 1991.

[12] Я.А. Смородинский, А.Л. Шелепин, Л.А. Шелепин. Групповые и вероятностные основы квантовой теории. // *УФН*, 1992, **162**, №12, 1–95.

[13] А.Л. Шелепин. Псевдодифференциальное уравнение Шредингера. // *Кратк. сообщ. по физ. ФИАН*, 1993, №5-6, 60–65.

[14] А.Л. Шелепин, Л.А. Шелепин. Процессы со скачками и уширение спектральных линий. // *Кратк. сообщ. по физ. ФИАН*, 1993, №9-10, 62–68.

[15] D.M. Gitman, A.L. Shelepin. Coherent states of $SU(N)$ groups. // *J. Phys. A*, 1993, **26**, 313–327; arXiv: hep-th/9208017.

[16] D.M. Gitman, A.L. Shelepin. Coherent states of $SU(l,1)$ groups. // *J. Phys. A*, 1993, **26**, 7003–7018; arXiv: hep-th/9308157.

[17] А.Л. Шелепин, Л.А. Шелепин. Коэффициенты Клебша-Гордана в когерентном и смешанных базисах. // *Ядерная физика*, 1993, **56**, №10, 247–253.

[18] А.Л. Шелепин, Л.А. Шелепин. Многомерное псевдодифференциальное уравнение Шредингера. // *Кратк. сообщ. по физ. ФИАН*, 1994, №11-12, 79–84.

[19] А.Л. Шелепин, Л.А. Шелепин. Об аксиоматическом построении теории амплитуд вероятности. // *Кратк. сообщ. по физ. ФИАН*, 1994, №7-8, 55–60.

[20] А.Л. Шелепин, Л.А. Шелепин. Теория амплитуд вероятности и ее групповые аспекты. // *Труды ФИАН*, 1994, **218**, 3–59.

[21] О.Д. Семенцов, А.Л. Шелепин, Л.А. Шелепин. Коэффициенты Клебша-Гордана групп $SU(2)$ и $SU(1,1)$ в различных базисах. // *Кратк. сообщ. по физ. ФИАН*, 1994, №7-8, 61–68.

[22] Д.В. Львов, А.Л. Шелепин, Л.А. Шелепин. Расчетный аппарат группы движений псевдоевклидовой плоскости. // *Ядерная физика*, 1994, **57**, №6, 1147–1152.

[23] D.M. Gitman, A.L. Shelepin. 2+1 Poincaré group, relativistic wave equations, coherent states, and so on. Preprint IFUSP/P-1162, 1995.

[24] А.Л. Шелепин, Л.А. Шелепин. Нелинейные унитарные представления групп $SU(l,m)$. // *Кратк. сообщ. по физ. ФИАН*, 1996, №10-11, 54–57.

[25] D.M. Gitman, A.L. Shelepin. 2+1 Poincaré group and relativistic wave equations. In *Proc. of the VII Intern. Conference on Symmetry Methods in Physics*, volume 1, pages 212–219, Dubna: JINR, 1996.

[26] A.L. Shelepin, L.A. Shelepin. Clebsch-Gordan coefficients in coherent and mixed bases. Overlap method. In *Proc. of the VII Intern. Conference on Symmetry Methods in Physics*, volume 2, pages 493–497, Dubna: JINR, 1996.

[27] А.Л. Шелепин. Процессы со скачками и псевдодифференциальные уравнения Шредингера и Фоккера-Планка. // *Ядерная физика*, 1997, **60**, №2, 265–276.

[28] D.M. Gitman, A.L. Shelepin. Poincaré group and relativistic wave equations in 2+1 dimensions. // *J. Phys. A*, 1997, **30**, 6093–6121.

[29] А.Л. Шелепин. О способах описания скачкообразных процессов. // *Кратк. сообщ. по физ. ФИАН*, 1998, №5, 41–49.

[30] Д.М. Гитман, А.Л. Шелепин. Представления групп $SU(N)$ на полиномах от антикоммутирующих переменных. // *Кратк. сообщ. по физ. ФИАН*, 1998, №11, 21–30.

[31] D.M. Gitman, A.L. Shelepin. Fields on the Poincaré group: Arbitrary spin description and relativistic wave equations. // *Int. J. Theor. Phys.*, 2001, **40**, 603–684; arXiv:hep-th/0003146.

[32] I.L. Buchbinder, D.M. Gitman, A.L. Shelepin. Discrete symmetries as automorphisms of the proper Poincaré group. // *Int. J. Theor. Phys.*, 2002, **41**(4), 753–790; arXiv:hep-th/0010035.

[33] D.M. Gitman, A.L. Shelepin. Z-description of the relativistic spin. // Proc. of XXIII International Colloquium on Group-Theoretical Methods in Physics, V.2, pages 376–384, Dubna: JINR, 2002.

Отпечатано в ООО «Соцветие красок»
119992 г.Москва, Ленинские горы, д.1
Главное здание МГУ, к.102
Тираж 100 экз. Заказ №74