

УДК 53.02

Процессы с памятью как основа новой парадигмы в науке. Часть I*

А. Л. Шелепин, Л. А. Шелепин

Физический институт им. П. Н. Лебедева, Москва, Россия

В основе современной науки лежит марковская парадигма, согласно которой при известном состоянии системы в настоящий момент ее дальнейшая эволюция не зависит от состояния системы в прошлом. Представлено становление новой немарковской парадигмы (теории процессов с памятью), находящей в настоящее время приложения буквально во всех областях знания. Рассмотрены ограничения, обусловленные марковским подходом, способы и особенности описания процессов с памятью (в том числе уравнения, устойчивые распределения, распределения Ципфа-Парето, числа Фибоначчи). Проведен анализ особенности немарковского мира (структуры, информация, временные характеристики, пространственная нелокальность) и совокупности имеющихся немарковских моделей в физике, биологии, космологии, экономике.

На пороге новой научной парадигмы

На рубеже XXI века происходят качественные изменения практически во всех областях знания. Меняется сама научная парадигма. Это понятие, введенное Куном [1], определяется как система научных воззрений, включающая совокупность убеждений, ценностей и технических средств, принятых научным сообществом и обеспечивающих существование научной традиции. Она объединяет членов научного сообщества и на многие годы задает круг проблем и методов их решения.

В XVIII—XIX веках система научных воззрений базировалась на парадигме механицизма, объясняющего развитие природы и общества законами механики, которые рассматривались как универсальные. Ее возникновение было связано с выдающимися достижениями классической механики, выработавшей свои представления о материи, движении, пространстве, времени, причинности. Была создана замкнутая механическая картина мира. Однако достижения естествознания конца XIX — начала XX века показали, что механицизм может объяснить только некоторую часть природных явлений. Описание на его основе электромагнитных, химических, биологических явлений оказалось невозможным.

Новая общая парадигма возникла в XX веке. Основой невиданного технического прогресса стала физика. Она, подобно механике в XVIII—XIX веках, стала, своего рода, "царицей" наук. Физические методы и подходы проникли практически во все естественные науки, в том числе в химию и биологию, и даже использовались в общественных. Теория относительности, квантовая механика, теория элементарных частиц,

синергетика резко расширили наше понимание закономерностей окружающего мира. Несмотря на все различия этих теорий, в них есть единая объединяющая их основа — марковские процессы или процессы без последствий. Они, подобно механицизму прошлого, и составляют суть мировоззренческой и научной парадигмы XX века.

Марковский процесс — это случайный процесс, для которого при известном состоянии системы в настоящий момент ее дальнейшая эволюция не зависит от состояния этой системы в прошлом. Другими словами, будущее и прошлое процесса не зависят друг от друга при фиксированном настоящем. Это свойство, определяющее процесс, было названо марковским по имени сформулировавшего его в 1906 г. русского ученого А. А. Маркова [2]. Его связь с основами случайных процессов была проанализирована А. Н. Колмогоровым [3].

Марковские процессы нашли приложения практически во всех областях научного знания: в физике, радиотехнике, автоматике, экономике, социологии, медицине, биологии. Согласно теории марковских процессов задание состояния системы в некоторый начальный момент времени полностью определяет вероятностную картину ее поведения в будущем. Для дискретной последовательности событий (цепей Маркова) полная вероятностная картина задается матрицей перехода $P = ||P_{ij}||$, состоящей из вероятностей перехода P_{ij} , а в непрерывном случае процессов Маркова — переходными вероятностями $p(t, s)$.

Эти вероятности удовлетворяют уравнениям Колмогорова—Фоккера—Планка, лежащим в основе классической физики. При выводе этих уравнений, кроме требования "марковости" про-

* Часть II будет опубликована в № 4.

процесса, используется также предположение об отсутствии скачков. Последнее означает, что траектории процесса непрерывны: нельзя попасть из точки x в точку x' , не побывав в промежуточных точках.

Наряду с обычной теорией вероятности существует теория амплитуд вероятности, лежащая в основе квантовой механики. Здесь каждому случайному событию A ставится в соответствие уже не действительное неотрицательное, а комплексное число (волновая функция) $\psi(A)$. Обычной вероятности соответствует $|\psi(A)|^2$. Для достоверного события $|\psi(A)|^2 = 1$. При выполнении требования "марковости" (и отсутствия скачков) амплитуда вероятности $\psi(A)$ удовлетворяет уравнению Шредингера. В целом же требование "марковости" лежит в основе как классической, так и квантовой физики и является мощным практическим инструментом в конкретных исследованиях.

В настоящее время марковские процессы в известной степени заложены в нашем подсознании. События в природе описываются дифференциальными уравнениями, задаются начальными условиями и на этой основе предсказывается будущее. Предыстория остается за кадром. При создании картины внешнего мира происходит определенное абстрагирование от структур, где информация о прошлом может быть записана. Элементами этой картины являются точечные частицы, взаимодействующие с полями.

Наука об обществе в своей основе также исходила из марковской парадигмы. В частности, в историческом материализме все определялось соотношениями для производительных сил и производственных отношений, а предыстория в развитии общества была на втором плане. Труды Ф. Энгельса [4] конца XIX века по существу обозначали переход от механистической парадигмы к марковской.

Однако в конце XX века наметились определенные расхождения с марковской парадигмой. При рассмотрении биологических, экономических, социальных явлений уже нельзя было пренебрегать предысторией, поскольку память непосредственно влияла на выбор пути развития. В этом плане отмечались также проблемы неделимости элементарных частиц, ограниченности точечных моделей, роста роли информации, соотношения материального и идеального. Положение "бытие определяет сознание" реализуется далеко не в любых условиях. Процессы, происходившие в прошлом, отображаются в изменениях структур. Существуют структуры, лежащие вне наблюдаемого мира, но воспроизводимые на основе сознания. Отметим, что центр тяжести научных исследований постепенно смещается от физики к биологии и социуму, а именно этот круг явлений уже не может адекватно описываться в рамках старой парадигмы.

В целом ситуация в наше время аналогична той, которая была в конце XIX века. Как и сто лет назад, в существующей марковской парадигме проявляется все больше рассогласований и трудностей, определяющих пределы парадигмы, в основе которой лежат процессы с памятью. Она должна включать в себя предыдущую парадигму как частный случай.

Способы описания процессов с памятью

Загадка чисел Фибоначчи и золотого сечения

Существуют различные способы описания процессов с памятью, которые развивались обоим друг от друга. И многое здесь еще не общепринято. Исходный пункт анализа проблемы — загадка чисел Фибоначчи.

Золотое сечение и связанные с ним числа Фибоначчи нашли применение в самых различных областях современной науки (биологии, физике, астрономии, экономике, эстетике, социальных явлениях). В ряде случаев они появлялись неожиданно, буквально "как кролик из шляпы фокусника". Все это представлялось неразрешимой загадкой. Вот что писал великий немецкий астроном Иоганн Кеплер (1571—1630 гг.) [5]:

"Непосвященные не догадываются о существовании жгучей тайны, в которой проявляется душа растения, — тайны чисел Фибоначчи и золотого сечения в морфологии растения, загадке которой светлые головы посвящают наблюдения и исследования на протяжении уже более чем четырех веков".

Числа Фибоначчи имеют почти 800-летнюю историю. В 1202 г. была издана книга Леонардо из Пизы по прозвищу Фибоначчи, в которой рассматривалась задача о кроликах: "сколько пар кроликов за год от одной пары рождается". Предполагалось, что через месяц пара кроликов производит на свет другую пару, а рожают кролики со второго месяца после своего рождения.

Была получена последовательность чисел пар кроликов $u_1, u_2, u_3, u_4, \dots$ для каждого месяца. В этой числовой последовательности каждый член равен сумме двух предыдущих членов в соответствии с соотношением

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1}. \quad (1)$$

В задаче Фибоначчи первые два числа предполагались равными единице. В этом случае первыми членами ряда будут 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, Отношение двух последовательных чисел Фибоначчи u_{n+1}/u_n с ростом n стремится к пределу q , получившему название золотого правила сечения (впервые этот термин ввел Леонардо да Винчи):

$$q = (u_{n+1}/u_n)_{n \rightarrow \infty} = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1,618. \quad (2)$$

Величина q удовлетворяет соотношению

$$q^2 - q - 1 = 0. \quad (3)$$

Числа Фибоначчи нашли обширные применения [6—8]. Так, они могут быть использованы для построения системы счисления. Подобно десятиричной или двоичной системе любое натуральное число может быть представлено в виде некоторой последовательности цифр, указывающих, сколько конкретных чисел Фибоначчи, начиная с наибольшего из возможных, оно содержит. Например, число 10 может быть записано как $1 \times 8 + 0 \times 5 + 0 \times 3 + 1 \times 2 + 0 \times 1 + 0 \times 1$ или 100100.

Числа Фибоначчи обладают целым рядом замечательных математических свойств [9]. Например, суммы чисел Фибоначчи даются соотношениями

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n &= u_{n+2} - 1, \\ u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 &= u_n u_{n+1}. \end{aligned}$$

Приведем также примеры признаков делимости:

u_n делится на u_m тогда и только тогда, когда n делится на m ;

u_n делится на r тогда и только тогда, когда его номер n делится на s . В частности, r и s могут иметь следующие значения: 1) 2 и 3; 2) 3 и 4; 3) 4 и 6; 4) 5 и 5; 5) 7 и 8.

В геометрии отношение (2) соответствует делению в точке C_1 отрезка AB на две части так, чтобы большая из его частей C_1B была средним пропорциональным между меньшей его частью C_1 и всем отрезком: $AB/AC_1 = A/C_1B$.

Отрицательному корню уравнения (3) соответствует точка C_2 лежащая на прямой вне отрезка AB . В этом случае снова имеем золотое сечение: $C_2B/AB = AB/C_2B = q$.

В восприятии человека прямоугольники золотого сечения (т. е. с соотношением сторон q) выглядят пропорциональными и приятными на вид. Поэтому многим обиходным предметам (чемоданам, книгам, коробкам) придается именно такая форма. Внешняя красота предметов, связанная с золотым сечением, часто возводилась в эстетический и философский принцип. С помощью золотого сечения пытались объяснить явления природы и общественной жизни. Многие относили все эти работы к мистике.

Однако здесь не все так просто, поскольку числа Фибоначчи и золотое сечение могут служить характеристиками немарковских процессов. Уравнение (1) представляет собой простейший пример немарковского процесса (хотя и не являющегося случайным), где будущее зависит не только от настоящего, но и от прошлого.

Среди различных обобщений чисел Фибоначчи отметим решения немарковского уравнения

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-S-1}.$$

Здесь каждый член ряда равен сумме предыдущего и отстоящего от предыдущего на S шагов. Случаю $S = 1$ соответствуют числа Фибоначчи, значениям $S = 2, 3, 4, \dots$ — величины, получившие название S -чисел Фибоначчи. Обобщается понятие золотой пропорции. Так, золотая S -пропорция является положительным корнем уравнения золотого S -сечения $q^{2S} - q^S - 1 = 0$. Отношения соседних S -чисел Фибоначчи совпадают в пределе с золотыми S -пропорциями, подобно обычному ряду Фибоначчи. Другими словами, золотые S -сечения являются числовыми инвариантами S -чисел Фибоначчи. Инварианты для первых четырех значений S , соответственно, равны: 1,618; 1,464; 1,380; 1,324 [10].

Как будет видно из последующего изложения, числа Фибоначчи проявляются буквально во всех разделах науки. Характерные примеры — наличие в расположении мелких частей растений двух типов спиралей, закрученных в противоположных направлениях. Числа спиралей того и другого типа задаются соседними числами Фибоначчи. Так, на многих шишках чешуйки располагаются в трех и пяти спиральных, навивающихся в противоположных направлениях. В крупных шишках удается наблюдать 5 и 8, а также 8 и 13 спиралей. На ананасе обычно наблюдается 8 и 13 спиралей. Число спиралей у многих сложноцветных (например у ромашки) составляет 13 и 21 или 21 и 34. В подсолнухе число спиралей противоположного направления в расположении семечек может достигать значений 55 и 89. Подобные эффекты, связанные с числами Фибоначчи, наблюдаются в расположении хвоинок на сосновой ветке, расположении листьев крапивы, клена, сирени, березы [7, 11].

Не менее поразительны проявления чисел Фибоначчи в животном мире. Приведем примеры [7, 12]: черепаха (13 сросшихся роговых пластин в панцире, 5 пластин в центре, 8 по краям, 5 пальцев на лапках, 34 позвонка), скорпион (2 части — брюшко и хвост, 5 пар конечностей, 8 сегментов на брюшке, 5 на хвосте), гусеницы — мукоеды, шкуроеды (13 сегментов). Число пар зубов: 21 — собака, лошадь, свинья; 14 — кролик; 34 — гиена; 233 — дельфин; число позвонков: 34 — гигантский олень; 55 — кит. Характеристики человека: ребра — 12 пар, позвонки — 34, запястье — 8 косточек, пальцы — 5, каждый палец — 3 фаланги, общее число костей близко к 233, железы внутренней секреции — 8, число органов пищеварения — 13, частей печени — 8, частей почки — 5, частей сердца — 13. Конечно, это только отдельные примеры, носящие иллюстративный характер.

В работе [7], где приводятся результаты исследований ритмов мозга, говорится об определенных инвариантах, характеризующих волны электрической активности головного мозга

(бета-, дельта-, тэта-, альфа- и гамма-волны). Они совпадают с приведенными выше значениями золотых S -сечений, соответствующих $S = 1, 2, 3, 4$.

Пока еще многие проявления чисел Фибоначчи остаются за кадром. Однако завеса со жгучей тайной, о которой писал еще Иоганн Кеплер, стала приоткрываться в последнее десятилетие. Золотое сечение и числа Фибоначчи, определяемые уравнением (1), содержащим зависимость от предыстории, являются характеристиками простейшего немарковского уравнения. Как будет показано ниже, числа Фибоначчи играют в теории процессов с памятью особую роль.

Марковский подход и его ограничения

Путь к созданию новой парадигмы лежит через последовательное обобщение теории марковских процессов. Как известно, случайные марковские процессы характеризуются тем, что по состоянию системы в какой-либо момент времени t_0 можно определить вероятностную картину поведения системы в будущем, и эта картина не меняется от добавочных сведений о событиях при $t < t_0$. Для немарковских процессов картина будущего существенно зависит от событий при $t < t_0$.

Теория марковских процессов обычных вероятностей изложена в ряде монографий [13–16]. Отметим лишь некоторые качественные моменты. В дискретном случае цепей Маркова вероятность $P_{s+1}(A_i)$ осуществиться событию A_i в $(s+1)$ -м испытании зависит только от исхода s -го испытания и не зависит от предыдущих. При этом полная вероятностная картина задается матрицей перехода $P_s = ||P_{ij}||$, состоящей из вероятностей перехода P_{ij} . Элементы этой матрицы неотрицательны, сумма элементов каждой строки равна 1.

В общем случае марковские процессы для стохастических вероятностей p и квантовых амплитуд вероятности ψ могут быть описаны с помощью операторов перехода \hat{P} и \hat{U} (последний обычно называют оператором эволюции):

$$p(t) = \hat{P}(t, t_0)p(t_0); \quad \psi(t) = \hat{U}(t, t_0)\psi(t_0). \quad (4)$$

Поскольку для марковских процессов будущее не зависит от прошлого при известном настоящем, то операторы перехода должны удовлетворять уравнениям:

$$\hat{P}(\tau, t_0) = \hat{P}(\tau, t)\hat{P}(t, t_0); \quad \hat{U}(\tau, t_0) = \hat{U}(\tau, t)\hat{U}(t, t_0). \quad (5)$$

Это — обобщенные уравнения Маркова, лежащие в основе математического описания всех марковских процессов. В различных частных случаях (дискретные и непрерывные марковские процессы, цепи Маркова для вероятностей и амплитуд) они имеют много названий: урав-

нения Маркова, Смолуховского, Колмогорова–Чепмена, уравнение для оператора эволюции.

Полагая при малых Δt

$$\hat{P}(t + \Delta t, t) = 1 + \hat{\Lambda}\Delta t + o(\Delta t),$$

$$\hat{U}(t + \Delta t, t) = 1 + \hat{H}\Delta t + o(\Delta t),$$

получаем дифференциальные уравнения 1-го порядка для операторов перехода

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{P}(t, t_0) = \hat{\Lambda}(t)\hat{P}(t, t_0), \quad \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}(t, t_0) = \hat{H}(t)\hat{U}(t, t_0).$$

Аналогичным соотношениям удовлетворяют вероятности $p(x, t)$ и амплитуды $\psi(x, t)$.

Если множество, на котором заданы вероятности или амплитуды, конечно или дискретно, рассмотренные выше уравнения могут быть представлены в матричной форме. В общем случае уравнения (4), (5) можно записать в интегральной форме. Так, для одномерных марковских процессов для вероятности имеем:

$$p(x, t) = \int p(x, t|x', t')p(x', t')dx', \\ p(x, t|x_0, t_0) = \int p(x, t|x', t')p(x', t'|x_0, t_0)dx', \quad (6)$$

где $p(x, t|x', t')$ — плотность вероятности перехода.

Далее будем считать, что процесс является линейным, т. е. плотности перехода не зависят от $p(x, t)$ и $\psi(x, t)$. Запись (6) может быть использована для нахождения явного вида операторов $\hat{\Lambda}(t)$ и $\hat{H}(t)$; в результате получим уравнения бесконечного порядка, соответственно, для вероятностей (это так называемое разложение Крамерса–Мойала [13, 14, 17]) и амплитуд [18, 19]

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = \hat{\Lambda}p(x, t), \quad \hat{\Lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} K_n(x, t), \quad (7)$$

$$K_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - x')^n p(x, t + \Delta t|x', t)dx;$$

$$i \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \hat{H}\psi(x, t), \quad \hat{H} = i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} A_n(x, t), \quad (8)$$

$$A_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - x')^n u(x, t + \Delta t|x', t)dx, \quad n \geq 1,$$

$$A_0 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{+\infty} [u(x, t + \Delta t|x', t) - u(x, t|x', t)]dx.$$

Процессы без скачков определяются как процессы, для которых вероятность (амплитуда) перехода из точки x в x' при конечной разности $|x - x'| \geq \delta > 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$ стремится к нулю быстрее, чем Δt

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|x-x'| \geq \delta} p(x, t + \Delta t|x', t)dx = 0. \quad (9)$$

В математической литературе это условие носит также название условия усиленной непрерывности [20]) или условия Линдберга [14, 15]). В этом случае все коэффициенты K_n и A_n при $n > 2$ обращаются в ноль и мы приходим к дифференциальным уравнениям второго порядка, описывающим процессы без скачков — процессы с непрерывными траекториями.

Таким образом, соединение требований марковости линейности и отсутствия скачков (локальности) приводит к уравнению Фоккера—Планка—Колмогорова для обычных вероятностей

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(a_1(t, x)f + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} [a_2(t, x)f] \right), \quad (10)$$

где a_1 и a_2 — коэффициенты сноса и диффузии, и нерелятивистскому уравнению Шредингера для амплитуд вероятности

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial}{\partial x} - A(x) \right)^2 \psi + U(x)\psi. \quad (11)$$

Именно эти дифференциальные уравнения второго порядка по пространственным переменным лежат в основе подавляющего большинства физических приложений теории марковских процессов как в классической физике, так и в нерелятивистской квантовой механике.

Однако на малых пространственных и временных интервалах подход, основанный на уравнениях второго порядка (10, (11), становится неадекватным.

Процессы со скачками: пространственная нелокальность

Оставаясь в рамках теории марковских процессов, откажемся от условия отсутствия скачков (9). В этом случае вместо привычных уравнений второго порядка мы должны использовать либо непосредственно интегральные уравнения вида (6), либо псевдодифференциальные уравнения (7) и (8) — уравнения бесконечного порядка по пространственным переменным. Можно показать, что марковские процессы для вероятностей и амплитуд вероятности могут описываться либо дифференциальными уравнениями не выше второго порядка, либо уравнениями бесконечного порядка (псевдодифференциальными) [13, 14, 18, 19]; в последнем случае все коэффициенты K_n при производных четного порядка должны быть отличны от нуля [17].

Псевдодифференциальные уравнения отвечают процессам со скачками. Здесь мы используем термины "процессы со скачками" и "процессы без скачков", а не "непрерывные процессы" или "разрывные процессы". Дело в том, что термин "непрерывные процессы" часто используется в двух совершенно различных значениях: во-первых, говоря о дискретных и не-

прерывных процессах, имеют в виду дискретность или непрерывность множества возможных состояний; во-вторых, могут иметься в виду процессы с непрерывными или разрывными траекториями. Скачкообразные процессы — процессы с разрывными траекториями — характеризуются масштабным параметром λ , имеющим смысл величины скачков.

Обратимся к простейшим и вместе с тем важным частным случаям (7) и (8) — одномерным уравнениям с постоянными коэффициентами [21]

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \frac{c}{\lambda} \left(1 - \sqrt{1 - \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}} \right) f(x, t); \quad (12)$$

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{c}{\lambda} \left(1 - \sqrt{1 - \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}} \right) \psi, \quad (13)$$

где λ — характерная величина скачков; c/λ — частота скачков.

Эти уравнения в пределе бесконечно частых бесконечно малых скачков ($c \rightarrow \infty$, $\lambda \rightarrow 0$) переходят в уравнения второго порядка — уравнение диффузии (10) и уравнение Шредингера для свободной частицы (11), соответственно.

Псевдодифференциальное уравнение Фоккера—Планка (12) содержит масштабный параметр λ , который может быть интерпретирован как длина свободного пробега. Уравнения типа (12) могут быть использованы в теории броуновского движения и физики плазмы.

Псевдодифференциальное уравнение Шредингера (13) описывает свободную релятивистскую частицу, при этом масштабный параметр λ интерпретируется как комптоновская длина волны, c — скорость света, а само уравнение выражает собой релятивистскую связь между энергией и импульсом $\hat{E} \sqrt{m^2 - \hat{p}^2}$.

Обратимся к анализу решения псевдодифференциального уравнения Фоккера—Планка (12) [21], отвечающего начальному условию $f(x, 0) = \delta(x)$,

$$f(x, t) = K_\lambda(x, ct) \equiv \frac{ct}{\pi\lambda} \exp \frac{ct}{\lambda} ((ct)^2 + x^2)^{-1/2} \times \\ \times K_1 \left[\left((ct)^2 + x^2 \right)^{1/2} / \lambda \right], \quad (14)$$

где K_1 — функция Макдональда.

Дисперсия $\sigma^2 = c\lambda$. Рассмотрим предельные случаи. При $\lambda \rightarrow \infty$ (амплитуда скачков не ограничена) (14) представляет собой распределение Коши с полушириной ct , а при $\lambda \rightarrow 0$, $c \rightarrow \infty$ (т. е. в диффузионном пределе бесконечно малых бесконечно частых скачков) — распределение Гаусса.

Используя безразмерные параметры $x_0 = x/\lambda$ и $t_0 = ct/\lambda$, распределение (14) можно переписать как

$$f(x, t) = \frac{t_0}{\pi\lambda} \exp(t_0)(t_0^2 + x_0^2)^{-1/2} K_1[(t_0^2 + x_0^2)^{1/2}]. \quad (15)$$

Из (15) видно, что форма графика плотности функции распределения $K_\lambda(x, ct)$ зависит от одного параметра $t_0 = ct/\lambda$. При $ct/\lambda \ll 1$ центральная часть распределения ($x \ll \lambda$) близка к распределению Коши с полушириной ct , а при $x \gg \lambda$ — к нормальному расширению, ширина которого характеризуется $\sigma = \sqrt{ct\lambda}$. Таким образом, скорость "расплывания" пакета резко падает при переходе через $ct = \lambda$. При $ct \approx \lambda$ крылья убывают по степенному закону, промежуточно-му между $1/x^2$ и экспоненциальным. Отметим, что распределение (14) хорошо описывает уширение спектральных линий, обусловленное столкновениями частиц.

Решение псевдодифференциального уравнения Шредингера (13), отвечающее начальному условию $f(x, 0) = \delta(x)$, имеет вид [21]

$$\begin{aligned} \psi(x, t) = & \frac{-t}{2\lambda\sqrt{(ct)^2 - x^2}} H_1^{(2)}\left(\frac{\sqrt{(ct)^2 - x^2}}{\lambda}\right) + \\ & + \frac{1}{2}(\delta(x + ct) + \delta(x - ct)), \end{aligned} \quad (16)$$

где $H_1^{(2)}(z) = J_1(z) + iH_1(z)$ — функция Генкеля первого порядка;

$J_1(z)$ и $iH_1(z)$ — функции Бесселя и Неймана.

Уравнение (13) описывает пространственно нелокальные объекты. Естественным масштабом нелокальности служит комтоновская длина волны λ , определяющая границы области скачков. Вид решения зависит от соотношения между λ , координатой x и расстоянием до светового конуса ct . Так, при $ct \ll \lambda$ решение (16) ведет себя как решение, отвечающее безмассовой частице.

Действительная часть $\psi(x, t)$ обращается в ноль вне светового конуса $|x| = ct$, а мнимая существенно отлична от нуля в области $x \leq \lambda$, иными словами, мнимая часть может быть отлична от нуля на расстоянии порядка λ вне светового конуса. Вне светового конуса обращается в ноль лишь линейная комбинация решения уравнения (13) и ему комплексно-сопряженного, отвечающего отрицательным энергиям.

Отметим, что пространственная нелокальность может описываться с помощью как псевдодифференциальных операторов, так и интегралов по пространственным координатам.

Уравнения для немарковских процессов

Перейдем теперь к описанию немарковских процессов — процессов, нелокальных во времени. Заметим, что общей теории немарковских процессов в настоящее время не существует, в то время как в марковском случае, базирую-

щемся на уравнениях (4) и (5), наряду с общей теорией развиты стандартные и эффективные методы решения различных задач. Поэтому несмотря на очевидную применимость немарковских моделей в реальной жизни частоту их использования пока трудно сравнить с частотой использования марковских моделей.

Для обрисовки и понимания имеющейся картины целесообразно по возможности разделить немарковские процессы на определенные классы.

Прежде всего имеется довольно широкий класс процессов, которые можно свести к марковским путем введения дополнительных переменных. В классической задаче об одномерном случайном блуждании вероятность перехода из точки $x = i$ в точку $x = i \pm 1$ не зависит от значения x на предыдущем шаге, и мы имеем марковскую цепь. Если же вероятность p продолжать движение в данном направлении больше, чем вероятность поворота q , то цепь является немарковской. Тем не менее, вводя квазисостояния, задаваемые двумя переменными $x_1(t) = x(t)$ и $x_2(t) = x(t - 1)$, мы получаем марковское описание с условной вероятностью (вероятностью перехода)

$$\begin{aligned} P(x_1, x_2, t + 1 | x'_1, x'_2, t) = \\ = \delta_{x_2, x'_1} (p\delta_{x_1 - x_2, x'_1 - x'_2} + q\delta_{x_1, x'_2}). \end{aligned}$$

Можно действовать в определенном смысле более наглядно, введя конечно-разностную скорость $v(t) = x(t) - x(t - 1)$, в том числе в случае, если шаг не является единичным. Знания координаты $x(t)$ и скорости $v(t)$ достаточно для нахождения вероятности $P(x(t + 1), v(t + 1))$, и следовательно, для нахождения $P(x(t + 1))$. Одномерный немарковский процесс, таким образом, описывается как двухмерный марковский для пары случайных величин — координаты и скорости. Если память распространяется на большее число предшествующих шагов, то нужно вводить большее число дополнительных переменных — ускорение (вторую разностную производную) и т. д. При этом, очевидно, поведение одномерной немарковской системы будет настолько же сложным, как поведение n -мерной марковской.

Для непрерывного времени t ситуация во многом аналогична. Так, вероятностное описание броуновской частицы, подвергающейся воздействию внешней силы, дается уравнением Крамерса [22]. Это двухмерное уравнение Фоккера—Планка на $p(x, v)$ описывает диффузионный марковский процесс, однако случайная величина X сама по себе не является марковской; иными словами, для марковского описания надо знать значение x в непосредственно предшествующий момент времени. Случайную величину X с хорошей степенью точности можно считать марковской лишь для случая достаточно частых столкновений [23].

Однако если для немарковской цепи память распространяется на все предыдущие шаги, а для процесса — на некоторый конечный промежуток времени, то для перехода к марковскому описанию пришлось бы вводить бесконечное число переменных, и ситуация качественно меняется. Описание таких немарковских процессов может быть основано на использовании интегродифференциальных уравнений (именно интегрирование по времени позволяет учитывать прошлое).

Для немарковских цепей может быть использовано дискретное описание — уравнения в конечных разностях; в общем случае

$$P_{t+1} = F(P_t, P_{t-1}, \dots, P_{t-n}, \dots, t). \quad (17)$$

Чем больше членов в правой части содержит уравнение (17), тем большую глубину памяти оно учитывает. В частности, в линейном случае имеем

$$P_{t+1} - P_t = \sum_{i=0}^n \Lambda(i) P(t-i). \quad (18)$$

Процессы, в которых необходимо учитывать зависимость от прошлого, часто описываются аналогами (17) — линейными интегродифференциальными уравнениями типа

$$\frac{dP}{dt} = \int_0^r \Lambda(\tau) P(t-\tau) d\tau, \quad (19)$$

где $P(t)$ — вероятность;

$\Lambda(t)$ — ядро уравнения, верхний предел интегрирования r может, в частности, принимать значения t и ∞ .

В более общем случае в правой части (19) может стоять нелинейная функция $Q(P)$, определяемая конкретными условиями задачи, и тогда интегродифференциальное немарковское уравнение представляется в форме

$$\frac{dP}{dt} = \int_0^r \Lambda(\tau) Q[P(t-\tau)] d\tau + f(t). \quad (20)$$

В отличие от марковских уравнений (6), содержащих интегрирование по координате, уравнения (19), (20) содержат интегрирование по времени.

Что касается расчетного аппарата, то следует отметить, что интегральные уравнения Фредгольма 1-го рода относятся к классу некорректных задач. В работах [24]—[26] рассмотрены математические основы метода регуляризации и предложен критериальный отбор параметра регуляризации. Разработанные к настоящему времени алгоритмы позволяют практически решать немарковские уравнения.

Очевидно, как и в случае марковских процессов, должно существовать деление на немарковские диффузионные и скачкообразные процессы. Также, по-видимому, целесообразно

выделение процессов, для которых немарковский эффект сводится к сглаживанию, усреднению по некоторому промежутку времени. Практически неисследованной областью являются немарковские процессы для амплитуд вероятности.

Немарковские процессы могут описываться также с помощью стохастических дифференциальных уравнений. Уравнение Ланжевена, описывающее марковский процесс Орнштейна—Уленбека, имеет вид

$$\dot{v} = -\gamma v + \xi(t), \quad (21)$$

где $\xi(t)$ — гауссов белый шум;

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \langle \xi(t) \xi(t') \rangle = C \delta(t-t').$$

Если же $\langle \xi(t) \xi(t') \rangle = \varphi(t-t')$ (т. е. $\xi(t)$ — так называемый цветной шум), то процесс, описываемый (21) и вероятностями $P(v)$, является немарковским [23]. Тем не менее, предполагая, что $\xi(t)$ является марковским процессом, можно показать, что пара переменных v, ξ является марковской, а вероятности $P(v, \xi)$ удовлетворяют уравнению второго порядка типа уравнения Крамерса. Некоторые математические аспекты теории стохастических дифференциальных уравнений с памятью весьма подробно рассмотрены в [27].

Для некоторых частных типов немарковских процессов существуют эффективные методы решения. Так, пусть $\gamma_{ik}(\tau)$ — вероятность перехода из i -го состояния в k -е, где τ — время, прошедшее с момента прибытия в i -е состояние. Вероятность остаться в состоянии k через время t после прибытия $u_k(t)$ дается интегралом по τ , через $u_k(t)$ выражается вероятность оказаться в данном состоянии в данный момент времени, которую в ряде случаев можно найти в явном виде, используя преобразование Лапласа [23]. Ниже будут рассмотрены и другие частные методики. Однако сначала обратимся к некоторым качественным моментам, возникающим при анализе немарковских процессов.

Случайные процессы и устойчивые распределения

В теории вероятностей особую роль играют устойчивые распределения. Их роль обусловлена тем, что в основе предельных теорем лежит схема суммирования случайных величин, и при соответствующей нормировке распределение суммы этих величин должно сводиться к предельному распределению. Для суммы случайных величин с конечной дисперсией предельным является нормальное распределение, прочие устойчивые распределения отвечают бесконечной дисперсии.

Распределение называется устойчивым, если композиция (свертка) двух таких распределений приводит к распределению того же типа. Из

определения вытекает уравнение для их нахождения, аналогичное уравнению Чепмена–Колмогорова. Оно анализируется на основе теории характеристических функций [15].

Устойчивые распределения задаются двумя параметрами (не считая параметров сдвига и масштаба). Основным параметром служит характеристический показатель $0 < \alpha \leq 2$; нормальное распределение отвечает $\alpha = 2$. Плотности устойчивых распределений с $0 < \alpha < 2$ при $x \rightarrow \infty$ имеют степенную асимптотику [15, 28]

$$f(x) = \frac{A}{x^{1+\alpha}},$$

откуда видно, что ни одно из устойчивых распределений, кроме нормального, не имеет конечной дисперсии.

Если параметр α определяет асимптотику распределения $x \rightarrow \infty$, то второй параметр устойчивых распределений определяет асимметрию распределения. Симметричные распределения существуют при всех α , причем $\alpha = 2$ имеет только симметричное — нормальное распределение. При $0 < \alpha < 1$ существуют распределения с максимальной асимметрией — односторонние распределения, для которых плотность $p(x) = 0$ при $x < 0$.

Через элементарные функции выражаются плотности трех устойчивых распределений:

распределение Гаусса ($\alpha = 2$), описывающего диффузионные процессы

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad (22)$$

распределения Коши ($\alpha = 1$), описывающего скачкообразные процессы с неограниченной амплитудой скачков,

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}, \quad (23)$$

и одностороннего распределения с $\alpha = 1/2$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-3/2} e^{-\frac{1}{2x}},$$

при $x \rightarrow \infty$, имеющего асимптотику

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-3/2}. \quad (24)$$

Плотность устойчивых распределений, отвечающее $\alpha = 2/3$ и $\alpha = 3/2$, выражается через функцию Уиттеккера, а $\alpha = 1/3$ — через функцию Макдональда [28, 29].

Устойчивые распределения могут появляться при решении различных задач, но при этом имеют характерную область применения. Так, выше мы получили устойчивые распределения Гаусса и Коши как решения динамических уравнений (10) и (12) для марковских процес-

сов. Соответственно, распределение Гаусса появляется в задачах, связанных с диффузионными марковскими процессами, описываемых уравнениями второго порядка по пространственным координатам. Процесс Коши, траектории которого, в отличие от гауссова процесса, разрывны, описываются псевдодифференциальным уравнением, и распределение (23) возникает при описании скачкообразных процессов. Как мы увидим ниже, распределения с гиперболической асимптотикой типа (24) играют фундаментальную роль в теории процессов с памятью.

Распределения Ципфа–Парето

Около ста лет тому назад известный итальянский экономист Вильфред Парето на основе систематизации данных получил кривую распределения доходов: зависимость между количеством людей, обладающих определенными доходами, и величиной этих доходов. В математической статистике эта зависимость получила название распределения Парето. Она обычно записывается в виде

$$n(x) = A/x^{1+\alpha}. \quad (25)$$

В логарифмическом масштабе по обеим осям график представляет собой прямую. Подчеркнем, что для каждого круга явлений существует свой показатель α . Для распределения доходов характеристический показатель $\alpha \approx 1,5$.

В 1922 г. Уиллис получил распределение биологических родов по числу биологических видов, аналогичное (25) с характеристическим показателем $\alpha \approx 0,5$.

В 1926 г. Альфред Лотки подсчитал число статей, приведенных в реферативном журнале по химии за 10 лет, написанных различными учеными. В результате для числа ученых $n(x)$, написавших x статей, он получил зависимость (25) с характеристическим показателем 1. Впоследствии она подтвердилась огромными информационными массивами. Оказалось, что гиперболический закон носил общесистемный, универсальный характер, но длительное время его природа представлялась загадочной.

Гиперболические равновесные распределения были эмпирически установлены при исследовании сложных систем социально-экономического, биологического и информационного плана [30]. Типичные примеры — распределение семей по доходам, ученых по числу написанных ими статей, количество статей на одну тему по разным журналам, распределение журналов по запросам в библиотеке, видов по числу особей, хозяев по числу паразитов. Конкретные гиперболические кривые, различающиеся характеристическим показателем α , определялись расположением (видов $n(x)$) по степени убывания их численности x . Показатель α служит мерой неравенства в распределении того

или иного параметра. Возрастание α приводит к увеличению вогнутости соответствующего гиперболического распределения, значит, например, к увеличению разрыва между высокопродуктивными и малопродуктивными учеными.

Область приложений гиперболических распределений непрерывно растет. Некоторые из них представляются на первый взгляд неожиданными. Так, в работе [31] приводятся примеры зависимости между шириной и длиной туловища животных и зависимости между полной длиной и рабочим объемом цилиндра для автомобилей различных марок, которые удовлетворяют соотношению (25).

Обширный статистический материал по гиперболическим распределениям собран Б. И. Кудриным [6]. Согласно [6], большую техническую систему можно рассматривать как сообщество изделий — аналог биоценоза, названного техноценозом. Приведенный в работе фактический материал показывает, что различные виды аппаратуры (электродвигатели, кабели, трансформаторы и др.) по повторяемости образуют распределения, приводящиеся к (25).

Распределения Парето задают зависимость числа элементов от величины характеризующего их параметра. Поскольку речь идет о частоте встречаемости элементов с данным значением параметра, то такой подход носит название частотного. Однако он применим не в любых условиях. Когда диапазон возможных значений параметра достаточно велик, то понятие частоты встречаемости элемента с одним и тем же значением параметра теряет смысл. В этом случае используется ранговый подход к обработке эмпирических данных, разработанный Дж. Ципфом. В рамках этого подхода проводится упорядочение элементов по величине характеризующего их параметра. Они ранжируются, располагаясь в порядке увеличения или уменьшения этого параметра.

При статистическом исследовании языка для конкретно взятого литературного текста выписывается последовательность всех различных слов в порядке уменьшения частоты их встречаемости (самому частому слову приписывается ранг, равный единице). Между частотой и рангом существует гиперболическая зависимость, аналогичная (25). Другой пример выполнения закона Ципфа относится к распределению численности населения в городах. Если ранжировать города по убыванию численности населения, то наблюдается гиперболическая зависимость между рангом города и его размером по количеству населения. Ципф показал, что она может быть записана в форме

$$X = B/r, \quad B = \text{const.} \quad (26)$$

Другая форма рангового распределения была предложена С. Бредфордом. В 1930-е годы известный английский исследователь научной

информации С. Бредфорд статистически обработал журналы, в которых содержались статьи на одну определенную тему. Он установил, что общее число статей $R(n)$ по определенной тематике в первых n наиболее продуктивных журналах пропорционально логарифму от числа n этих журналов. Эмпирическое распределение Бредфорда по форме отличается от (26). Оно носит также названия "закон Бредфорда", основной библиометрический закон, закон рассеивания научной информации. Его можно представить в виде

$$R(n) = B \ln n.$$

Это соотношение является интегральной (кумулятивной) формой закона Ципфа.

Подчеркнем, что закон Ципфа–Парето, описывающий огромный круг явлений, носит статистический характер. Уже два десятилетия назад ряд исследователей пришли к выводу, что и частотный, и ранговый закон Ципфа–Парето являются разными аспектами одной и той же закономерности, характеризующей структуру сложных систем самого различного плана, однако, несмотря на ряд гипотез, многие ее аспекты продолжали оставаться в тени.

Отметим, что были продолжены различные обобщения закона Ципфа–Парето, включающие большое число параметров и пригодные для более точного описания на некоторых интервалах (например, логнормальное распределение для центральной части распределения по доходам).

Широкая распространенность закона Ципфа–Парето, обширный статистический материал, непосредственная связь с человеческой деятельностью вызвали естественное стремление понять, как происходит формирование этого закона. Но, как отмечалось в работе [30], до последнего времени удовлетворительная теоретическая интерпретация закона Ципфа–Парето отсутствовала.

Необходимо подчеркнуть, что закон Ципфа–Парето является не одним из многих асимптотических распределений или моделей, подогнанных под результаты измерений, а опирается на надежную математическую базу — теорию устойчивых распределений. Впервые внимание на связь с теорией устойчивых распределений обратил внимание Б. Мандельброт [32]. Закон Ципфа–Парето совпадает с асимптотикой, определяющей сходимость к устойчивым негауссовым распределениям.

Естественно, гиперболический закон не может иметь место для всех $x \in (0, +\infty)$, так как интеграл от плотности (25) разойдется. Поэтому при $x \rightarrow 0$ плотность функции распределения должна отклоняться от (25). Отметим сходство гиперболических распределений и соответствующих устойчивых односторонних распределений при $0 < \alpha < 1$, отвечающий $\alpha = 0,5$ (рисунк).



Закон Ципфа–Парето отличается от гауссова распределения (22) и распределения Коши (23) резкой асимметрией. Для него характерны одновременно эффекты концентрации и рассеивания. Так, 5 % наиболее продуктивных журналов могут содержать до 70 % всех статей по данной тематике. Преобладающая часть городского населения сосредоточена в небольшом числе больших городов, 10 % наиболее продуктивных авторов пишут более половины всех научных статей, т. е. сравнительно малое число ученых несет основную информационную нагрузку. Остальная часть статей распределяется по большому числу малопродуктивных ученых, что рассматривается как проявление эффекта рассеивания. Аналогичные распределения возникают и в экономике, где, в частности, наблюдается рост размеров больших фирм и увеличение числа малых фирм. В целом такой подход может быть применен к анализу распределений в различных конкретных отраслях, крупных концернах, объединениях, различных коллективах. Этот подход позволяет сформулировать количественные распределения в экономике и строить оптимальные планы развития.

Закон Ципфа–Парето имеет качественно другой характер, чем распределения Гаусса и Коши, поэтому непосредственный перенос понятий из физики на общественные науки далеко не всегда правомерен.

В рамках немарковского подхода интегро-дифференциальные уравнения и их дискретные формы могут быть записаны и для равновесных систем. Обратимся сначала к аналогиям из квантовой статистики [33]. В ее основе, как известно, лежит уравнение

$$\partial \rho / \partial t = (i/\hbar)[\rho, H], \quad (27)$$

где ρ — матрица плотности;

H — гамильтониан системы.

Это уравнение неравновесной квантовой теории. Для равновесной теории справедливо уравнение Блоха

$$\partial \rho / \partial \beta = H \rho, \quad (28)$$

где $\beta = 1/T$ — обратная температура.

Если марковские процессы описывают движение частиц, то для немарковских процессов характерны изменение и преобразование структур. Последние характеризуются значениями негэнтропии, являющейся мерой их сложности, подобно тому, как в марковских энергия рассматривается в качестве меры движения.

Немарковские аналоги уравнений (27), (28) можно записать в форме [34]

$$\partial P(S) / \partial S = \int R(\sigma) P(S - \sigma) d\sigma, \quad (29)$$

где S — негэнтропия.

Уравнение (29) при $R(\sigma) \sim e^{-\sigma/\theta}$ имеет простое решение типа

$$P = P_0 \exp(-S/\theta). \quad (30)$$

Распределение (30) — это прямой аналог распределения Больцмана для марковских процессов

$$P = P_0 \exp(-E/kT), \quad (31)$$

только в (30) вместо энергии E стоит негэнтропия S , задающая распределение по структурам.

При рассмотрении уравнений (29), (30) возникают вопросы: какое отношение имеют они к эксперименту, как измерять S . Типичный пример распределения (30) — трофические цепи, в которых биомасса усваивается частично на каждой последующей ступени с некоторым коэффициентом преобразования. Трофические цепи описываются системой кинетических уравнений, решение которых задается формулой (30). В работе [35] для анализа трофических цепей использовалось это распределение, представленное в виде

$$W = W_0 \exp(-S/\theta), \quad (32)$$

где W — биомасса.

Биомасса может быть разделена на отдельные компоненты, измеряемые числом особей x . Распределение видов $n(x)$ по числу особей x может быть получено из (32), если учесть, что $n \sim W$, а для числа особей можно записать приближенное соотношение $S \approx \ln x$, откуда следует гиперболический закон (25).

Равновесное распределение (30) можно рассматривать как распределение набора структур по степени сложности (иерархию структур). Хотя для накопленного к настоящему времени обширного эмпирического материала имеются различные формы записи, но в конечном счете их можно свести к равновесному распределению (30). Как уже отмечалось, гиперболический закон непосредственно следует из (30), если учесть, что $S \approx \ln x$. Аналог температуры θ соответствует некоторому показателю сложности для отдельного объекта. Например, если x — число статей, написанных учеными, то

$S(x) = \ln x$, образно говоря, показатель интеллекта ученых, уровень их негэнтропии.

От гиперболических распределений, удобных при эмпирических построениях, всегда можно перейти к форме (30) и найти аналог температуры θ , характеризующий систему в целом. Здесь имеем дело с единой структурной закономерностью.

Литература

1. Кун Т. С. Структура научных революций. — М.: Прогресс, 1997.
2. Марков А. А. // Изв. физ.-мат. общ-ва Казан. ун-та, 1906. № 15(4). С. 135—156.
3. Колмогоров А. Н. Об аналитических методах в теории вероятностей // УМН, 1938. № 5. С. 5—41.
4. Энгельс Ф. Диалектика природы. — М.: Госполитиздат, 1952.
5. Вейзе Д. Ботаника говорит языком математики // Компьютер в школе, 1999. № 9. С. 10.
6. Кудрин Б. И. Введение в технетику. — Томск: Изд-во ТГУ, 1993.
7. Коробко В. И. Золотая пропорция и проблемы гармонии систем. — М.: Изд. Ассоц. строит. вузов, 1997.
8. Сороко Э. М. Структурная гармония систем. — Минск: Наука и техника, 1984.
9. Воробьев Н. Н. Числа Фибоначчи. — М.: Наука, 1978.
10. Стахов А. П. Коды золотой пропорции. — М.: Радио и связь, 1984.
11. Коробко В. И. Принцип золотой пропорции в растительном мире // Стратегия жизни в условиях планетарного экономического кризиса. — СПб.: Гуманистика, 2002. Т. 2. С. 359—365.
12. Коробко В. И. Принцип золотой пропорции в биосфере // Там же. С. 328—351.
13. Тихонов В. И., Мионов М. А. Марковские процессы. — М.: Сов. радио, 1977.
14. Гардинер К. В. Стохастические методы в естественных науках. — М.: Мир, 1986.
15. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. — М.: Наука, 1967. Т. 2.
16. Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А. Теория вероятностей. — М.: Наука, 1987.
17. Pawula R. F. Generalizations and extensions of the Fokker—Planck—Kolmogorov equations // Trans. IEEE, 1967, IT-3. № 1. P. 33—41.
18. Смородинский Я. А., Шелепин А. Л., Шелепин Л. А. Групповые и вероятностные основы квантовой теории // УФН. 1992. Т. 162. № 12. С. 1—95.
19. Шелепин А. Л., Шелепин Л. А. Теория амплитуд вероятности и ее групповые аспекты // Тр. ФИАН. 1994. Т. 218. С. 3—59.
20. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. — М.: ГИТТЛ, 1954.
21. Шелепин А. Л. Процессы со скачками и псевдодифференциальные уравнения Шредингера и Фоккера—Планка // Ядерная физика, 1997. Т. 60. № 2. С. 265—276.
22. Ван Кампен Н. Г. Стохастические процессы в физике и химии. — М.: Высш. шк., 1990.
23. Van Kampen N. G. Remarks on non-Markov processes // Brazilian Journal of Physics, 1998. V. 28. № 2. P. 90—96.
24. Тихонов А. Н. О решении некорректно поставленных задач и о методе регуляризации // ДАН СССР, 1963. Т. 151. № 3. С. 501—504.
25. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979.
26. Васильева А. Б., Тихонов А. Н. Интегральные уравнения. — М.: Изд. Московского университета, 1989.
27. Mohammed S. Stochastic differential equation with memory: Theory, examples and applications. In Stochastic Analysis an related topics VI. The Geilo workshop, 1996, p. 1—77. Progress in probability, Birkhäuser, 1998.
28. Золотарев В. М. Одномерные устойчивые распределения. — М.: Наука, 1983.
29. Золотарев В. М. Выражение плотности устойчивого распределения с показателем $\alpha > 1$ через плотность с показателем $1/\alpha$ // ДАН СССР, 1954. Т. 98. № 5. С. 285—290.
30. Петров В. М., Яблонский А. И. Математика и социальные процессы (гиперболические распределения и их применение). — М.: Знание, 1980.
31. Розен Р. Принцип оптимальности в биологии. — М.: Мир, 1969.
32. Mandelbrot B. New methods in statistical economics // Journal of Political Economy, 1963. Т. 71. P. 421—440.
33. Исихара А. Статистическая физика. — М.: Мир, 1973.
34. Харитонов А. С., Шелепин Л. А. Равновесные распределения в теории немарковских процессов: Кратк. сообщ. по физ., 1996. № 7—8. С. 79.
35. Быстрова Т. В., Шелепин Л. А. Кинетический подход в экологии // Тр. ФИАН. 1994. Т. 218. С. 60—77.

Статья поступила в редакцию 26 марта 2004 г.

Processes with memory as the basis of new paradigm in science. Part I

A. L. Shelepin, L. A. Shelepin
Lebedev Physical Institute, Moscow, Russia

Markov paradigm is the basis of contemporary science. According to this paradigm, if one knows the state at present, the future is independent of prehistory. The review describes the formation of new non-Markov paradigm (the theory of processes with memory), which now are coming in to use in almost all areas of knowledge. We consider limitations of Markov approach, description and features of processes with memory (including equations, stable distributions, Zipf-Pareto distribution, Fibonacci numbers). Factors of non-Markov world (structures, information, time characteristic, space non-locality) are analyzed. Non-Markov models in physics, biology, cosmology, and economics are discussed.